第 1 章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何通过坐标法把空间上的点与有序数组对应起来, 把空间上的图形和方程对应起来, 从而可以用代数方法来研究几何问题. 空间解析几何知识对学习多元函数微积分是不可缺少的.

本章内容包括：向量代数、平面和直线、曲面和曲线等.

1.1　向量及其运算

1.1.1　空间直角坐标系

在空间取定一点 O, 以 O 为原点作三条有相同的长度单位并且两两垂直的数轴, 依次记作 x 轴、y 轴和 z 轴, 统称为**坐标轴**. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上, z 轴则在铅直线上. 它们的正方向符合右手规则, 即以右手握住 z 轴, 当四个手指从 x 轴的正向转过 $\dfrac{\pi}{2}$ 角度后指向 y 轴的正向时, 竖起的拇指的指向为 z 轴的正向 (图 1.1). 这样就建立了空间直角坐标系, 称为 $Oxyz$ **直角坐标系**, 点 O 称为该坐标系的**原点**.

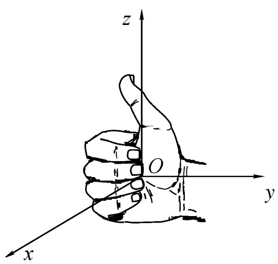

图　1.1

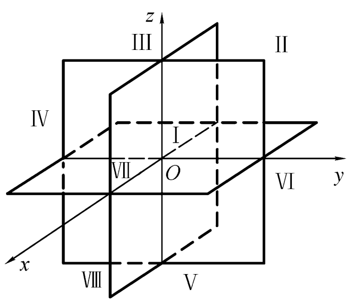

图　1.2

三条坐标轴中的每两条可以确定一个平面, 称为**坐标面**. 由 x 轴和 y 轴确定的坐标面称为 Oxy 平面, 另外两个坐标面称为 Oyz 面和 Ozx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分, 称为八个卦限. 如图 1.2 所示, 在 Oxy 面上方并且在 Oyz 面前方、Ozx 面右方的那个卦限称为第 Ⅰ 卦限, 在 Oxy 面上方按逆时针方向依次为 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限, 在 Oxy 面下方与 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限相对的依次是Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限 (图 1.2).

设 M 是空间一点, 过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴, y 轴和 z 轴并与这三个坐标轴分别交于点 P, Q 和 R(图 1.3). 设点 P, Q 和 R 在三个坐标轴上的坐标分别为 x, y 和 z, 这样, 空间的一点 M 就惟一地确定了一个有序数组 x, y, z. 反过来, 对给定的有序数组 x, y, z, 在三个坐标轴上分别取坐标为 x, y, z 的点 P, Q, R, 再过点 P, Q, R 作平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴, 这三个平面的交点 M 就是由有序数组 x, y, z 所惟一确定的点. 这样, 空间的点 M 与有序数组 x, y, z 之间就建立了一一对应的关系, 称 x, y, z 为点 M 的**坐标**, 依次称 x, y, z 为点 M 的**横坐标**, **纵坐标**和**竖坐标**, 并把点 M 记作 $M(x, y, z)$.

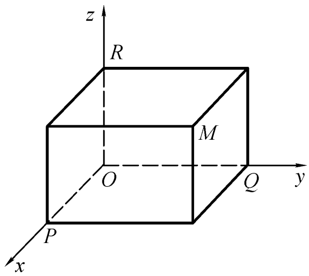

图 1.3

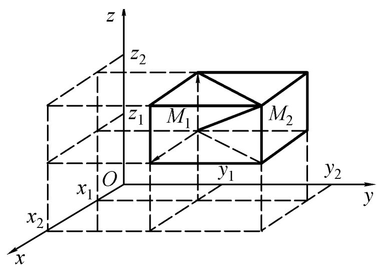

图 1.4

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间两点, 过 M_1, M_2 分别作垂直于三个坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体 (图 1.4), 各棱的长度分别为

$$|x_2 - x_1|,\ |y_2 - y_1|,\ |z_2 - z_1|.$$

根据勾股定理, 对角线 M_1M_2 的长度, 即空间两点 M_1, M_2 的距离为

$$d(M_1, M_2) = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

特别地, 点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d(O, M) = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1.1.1 *在 z 轴上求一点 M, 使该点与点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 的距离相等.*

解 因为所求的点在 z 轴上, 所以设该点为 $M(0, 0, z)$, 由题意有 $|MA| = |MB|$, 即

$$\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (7 - z)^2} = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-2 - z)^2}.$$

两边平方, 解得 $z = \dfrac{14}{9}$. 于是所求点为 $M\left(0, 0, \dfrac{14}{9}\right)$.

1.1.2 向量的概念

在研究实际问题时, 我们通常遇到两种不同类型的量, 一类是只有大小的量, 例如时间、温度、质量、体积等, 这种量称为**数量**或标量; 另一类是既有大小又有方向的量, 例如力、速度、加速度等, 这种量称为**向量**或矢量.

向量通常用黑体字母来表示, 如 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{i}$ 等, 也可以用上方加箭头的字母来表示, 如 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, $\vec{i}$ 等. 数学上往往用一个有方向的线段来表示向量, 如果线段的起点是 M_0, 终点是 M, 那么这个有向线段记为 $\overrightarrow{M_0M}$, 它表示一个向量, 线段的长度表示向量的大小, 线段的方向表示向量的方向. 为以后讨论问题的方便, 我们对向量和表示它的有向线段不加区分.

向量的大小叫作向量的**模**, 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记为 $|\boldsymbol{a}|$. 模为零的向量叫作**零向量**, 记为 $\mathbf{0}$, 规定零向量的方向是任意的. 模为 1 的向量叫作**单位向量**.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等, 方向相同, 则称这两个向量**相等**, 记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这说明, 如果两个向量的大小与方向是相同的, 那么不论它们的起点是否相同, 我们就认为它们是同一向量, 这样理解的向量称为**自由向量**, 本书所讨论的向量都是自由向量.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同方向或者反方向, 称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**, 记为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的, 故可认为零向量与任何向量都平行.

在直角坐标系中, 以坐标原点 O 为起点, 以点 M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于点 O 的**向径**, 常用 $\boldsymbol{r}$ 表示, 即 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$. 空间的每一点都对应着一个向径 $\overrightarrow{OM}$, 反过来, 每个向径 $\overrightarrow{OM}$ 都和它的终点 M 相对应.

1.1.3 向量的线性运算

1. 向量的加法

设有两个不平行的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 任取一点 M, 作 $\overrightarrow{MA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{MB}=\boldsymbol{b}$, 以 MA, MB 为邻边的平行四边形 $MACB$ 的对角线为 MC(图 1.5), 则向量 $\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**, 记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

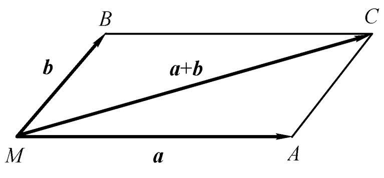

图 1.5

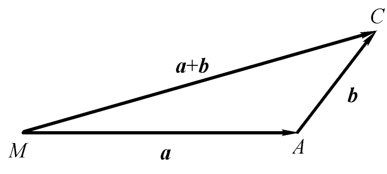

图 1.6

这个定义向量加法的规则称为向量加法的**平行四边形法则**. 这个法则没有对两个平行向量的加法加以定义, 为此我们再给出一个蕴含了平行四边形法则的加法定义:

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 任取一点 M, 作 $\overrightarrow{MA}=\boldsymbol{a}$, 再以 A 为起点, 作 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$, 连接 MC, 则向量 $\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**, 记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 1.6).

这个规则称为向量加法的**三角形法则**.

向量的加法满足如下运算规律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

2. 向量与数的乘法

对任意实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$, 定义 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记为 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模和方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$;

(2) 当 $\lambda>0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向; 当 $\lambda<0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向; 当 $\lambda=0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

向量与数的乘法运算又称为向量的**数乘**.

几何直观上, $\lambda\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 平行的向量, 只是把 $\boldsymbol{a}$ 伸缩了 λ 倍 (图 1.7).

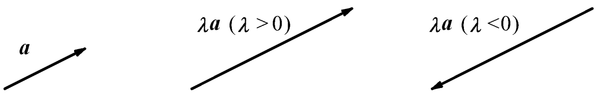

图　1.7

向量的数乘满足如下运算规律：

(1) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},\ \ \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;

(2) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

其中 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是任意向量, λ 和 μ 是任意实数.

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$, 用 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量, 由向量的数乘定义, 有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a \ \text{ 或 } \ \boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

即任何非零向量可以表示为它的模与同方向单位向量的数乘.

定理 1.1.1　设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 且 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 λ, 使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明　必要性　设 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$, 若 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$, 则取 $\lambda=0$, 有 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}=0\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$. 若 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向时 $\boldsymbol{e}_b=\boldsymbol{e}_a$, 取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 有

$$\lambda\boldsymbol{a}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_a=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_b=\boldsymbol{b}.$$

同样的, 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向时, 取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

充分性　若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, 由数乘的定义知 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$. □

利用向量的加法和数乘, 可以定义向量的减法.

对于向量 $\boldsymbol{b}$, 称 $(-1)\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 的**负向量**, 记作 $-\boldsymbol{b}$. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**规定为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

若将向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合, 则从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点到向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点所引的向量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 1.8).

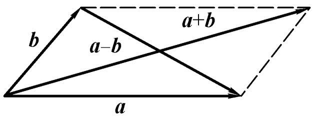

图 1.8

向量的加法和向量的数乘统称为向量的**线性运算**.

例 1.1.2　证明三角形两边中点的连线 (中位线) 平行于第三边, 其长度等于第三边长度的一半 (图 1.9).

证明　在 $\triangle ABC$ 中, 设 $AD=DB$, $AE=EC$, 由向量的线性运算法则, 有

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DE}&=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD},\\
\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\\
&=2\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{AD}\\
&=2(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})\\
&=2\overrightarrow{DE},
\end{aligned}$$

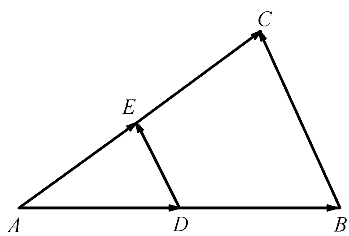

图 1.9

因此 $\overrightarrow{DE}//\overrightarrow{BC}$, 且 $|\overrightarrow{DE}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$. □

1.1.4 向量的坐标

1. 向量的坐标

为了建立向量与数的联系, 我们把向量放在直角坐标系中加以讨论, 定义向量的坐标, 从而把向量与有序数组对应起来.

在空间直角坐标系中, 记 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别是与 x 轴、y 轴、z 轴同方向的单位向量, 称为 $Oxyz$ 坐标系下的**基本单位向量**.

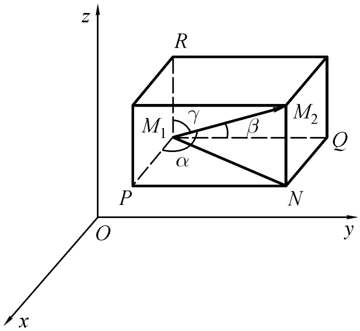

图 1.10

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 是空间直角坐标系中的一个向量, 其起点和终点的坐标为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$. 以 M_1M_2 为对角线作一个各棱分别平行于三个坐标轴的长方体 (图 1.10), 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM_2}\\&=\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{M_1Q}+\overrightarrow{M_1R},\end{aligned}$$

由向量与和它同方向的单位向量的关系, 知

$$\overrightarrow{M_1P}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{M_1Q}=(y_2-y_1)\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{M_1R}=(z_2-z_1)\boldsymbol{k},$$

分别称 x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的**投影**, 并记为

$$x_2-x_1=a_x,\quad y_2-y_1=a_y,\quad z_2-z_1=a_z,$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

称为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解表示式, 其中 $a_x\boldsymbol{i}$, $a_y\boldsymbol{j}$, $a_z\boldsymbol{k}$ 分别叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的**分向量**.

称有序数组 a_x,a_y,a_z 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标**, 并把向量 $\boldsymbol{a}$ 记为

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z).$$

称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表示式**.

特别地, 从原点到 $M(x,y,z)$ 的向径

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(x,y,z).$$

即如果向量的起点为坐标原点, 那么这个向量的坐标与它的终点的坐标是一致的.

由此可知, 每个向量都唯一地确定一个有序数组; 反过来, 每一个有序数组都能唯一地确定一个向径, 而我们讨论的是自由向量, 因而每一个有序数组都能唯一地确定一个向量. 这样向量和它的坐标就是一一对应的.

向量的坐标表示使用的是圆括号, 这与点的坐标表示相同, 我们从上下文是容易区别它们的.

2. 向量的模及方向余弦的坐标表示

设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(a_x,a_y,a_z)$, 其起点和终点的坐标为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$, 由空间两点距离公式, 知 $\boldsymbol{a}$ 的模

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

而

$$a_x=x_2-x_1,\quad a_y=y_2-y_1,\quad a_z=z_2-z_1,$$

于是得

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{1.1.1}$$

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正方向之间的夹角 α,β,γ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角 (规定 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi, 0\leqslant\beta\leqslant\pi, 0\leqslant\gamma\leqslant\pi$), 方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**. 由图 1.10, 知

$$\begin{aligned}
a_x&=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\\
a_y&=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\\
a_z&=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma.
\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

即

$$\begin{aligned}
\cos\alpha&=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\
\cos\beta&=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\
\cos\gamma&=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.
\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

当 $\boldsymbol{a}$ 的坐标给出后, 由式 (1.1.1) 和 (1.1.3) 可以确定它的模和方向角 (即大小和方向); 反过来, 当 $\boldsymbol{a}$ 的模和方向角已知时, 由式 (1.1.2) 可以确定它的坐标.

容易验证方向余弦满足如下的关系式:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量的坐标表示式为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_a&=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}(a_x,a_y,a_z)\\
&=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).
\end{aligned}$$

即 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

例 1.1.3 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$, 求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2, 3-2, 0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2})$,

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2,$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

例 1.1.4 设点 M 位于第二卦限, 向径 $\overrightarrow{OM}$ 与 y 轴、z 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{OM}|=8$, 求点 M 的坐标.

解 由 $\beta=\frac{\pi}{3}, \gamma=\frac{\pi}{4}$ 及 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, 得

$$\cos^2\alpha=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

又点 M 在第二卦限, $\cos\alpha<0$, 所以

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},$$

于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=|\overrightarrow{OM}|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\\&=8\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\&=(-4,4,4\sqrt{2}),\end{aligned}$$

这就是点 M 的坐标.

3. 向量线性运算的坐标表示

设有向量

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=(a_x,a_y,a_z),$$

$$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}=(b_x,b_y,b_z),$$

由向量加法及数乘的运算律, 有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \pm (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \\
&= (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda\boldsymbol{a} &= \lambda(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \\
&= \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k},
\end{aligned}
$$

或

$$(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}) = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z),$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

即两个向量相加减等于对应坐标相加减, 数乘向量等于用这个数乘以向量的各个坐标.

由定理 1.1.1 知, 当 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$. 按照向量的坐标表示式即为

$$(b_x, b_y, b_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

因此, 当 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的充要条件为

$$b_x = \lambda a_x, \quad b_y = \lambda a_y, \quad b_z = \lambda a_z,$$

或写成

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda,$$

即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的对应坐标成比例 (若 a_x, a_y, a_z 中某个为零时, 则上式中理解为相应的分子为零).

1.1.5 向量的乘积运算

1. 向量的数量积

首先, 我们定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角：将 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移使它们的起点重合, 它们所在的射线之间的夹角 θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**(图 1.11), 记作 $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$. 如果 $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \dfrac{\pi}{2}$, 则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**, 记为 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

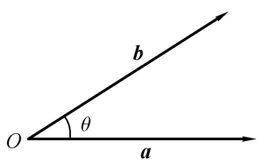

图 1.11

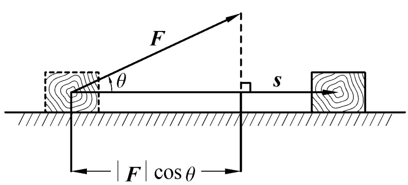

图 1.12

如果某物体在外力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线移动, 位移向量为 $\boldsymbol{s}$, 则力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 $\theta = (\widehat{\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}})$(图 1.12). 由此实际背景出发, 我们来定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积.

定义 1.1.1　设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, $\theta = (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, 规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**是一个数, 记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 其值为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta. \tag{1.1.4}$$

两个向量的数量积又叫作点积或内积. 根据数量积的定义, 上述问题中力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功就可以表示为 $W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

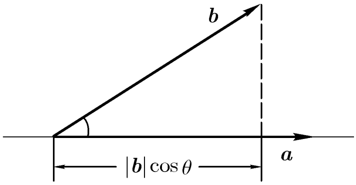

图　1.13

式 (1.1.4) 中的因子$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫作向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影, 记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$, 即 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\cos\theta$. 当 θ 是锐角时, $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 所在直线上投影线段的长度 (图 1.13); 当 θ 是钝角时, $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 是投影线段长度的相反数.

同样, 因子 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影, 记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$, 即 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\theta$. 因此, 有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}.$$

数量积具有下列性质：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$.

(2) 向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

事实上, 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有一个为 $\boldsymbol{0}$ 时, 结论显然成立; 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 均不为 $\boldsymbol{0}$ 时, 按定义, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\theta = (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \dfrac{\pi}{2}$, 即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = 0$.

数量积具有下列运算规律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$;

(3) 结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ (λ 为实数).

下面推导数量积的坐标表示式. 设

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} = (a_x, a_y, a_z),$$

$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k} = (b_x, b_y, b_z).$$

由数量积的运算规律, 有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\
&= a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\
&\quad +a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\
&\quad +a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k},
\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是两两垂直的单位向量, 所以由数量积的性质 (1) 和 (2), 有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{1.1.5}$$

由式 (1.1.5) 及性质 (2) 知, 两向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角满足公式

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

例 1.1.5　设 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{3}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 和 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

解　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=3\times2\times\cos\dfrac{\pi}{3}=3,$

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\
&= |\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\
&= 3^2+2^2+2\times3=19,
\end{aligned}$$

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{19}$.

例 1.1.6　已知三点 $A(1,1,1)$, $B(2,2,1)$ 和 $C(2,1,2)$, 求 $\angle BAC$.

解　$\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(1,0,1)$, 故

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times1+1\times0+0\times1=1,$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2},\quad |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2},$$

从而

$$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2},$$

所以 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$.

2. 向量的向量积

定义 1.1.2　设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, 规定向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**是一个向量, 记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 它的模和方向分别为

(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$;

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 并且 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 符合右手规则 (图 1.14).

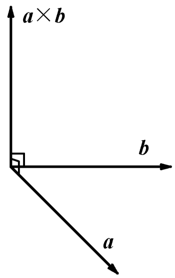

图　1.14

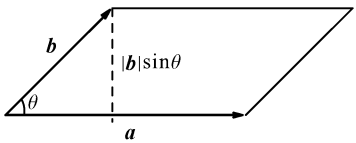

图　1.15

两个向量的向量积又叫作叉积或外积.　两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ 在几何上表示以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积 (图 1.15).

向量积具有下列性质:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

这是因为 $\boldsymbol{a}$ 与自己的夹角 $\theta=0$, 所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^2\sin\theta=0$.

(2) 向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

事实上, 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有一个为 $\boldsymbol{0}$ 时, 结论显然成立; 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 均不为 $\boldsymbol{0}$ 时, 因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 等价于 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$, 即 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=0$, 又 $|\boldsymbol{a}|$ 和 $|\boldsymbol{b}|$ 均不为零, 上式等价于 $\sin\theta=0$, 即 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$, 亦即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

向量积具有下列运算规律:

(1) 反交换律　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

这是因为按照向量积的定义, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 的模相等, 方向相反.

(2) 分配律　$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

(3) 结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$　(λ 是实数).

下面推导向量积的坐标表示式. 设

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=(a_x,a_y,a_z),$$

$$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}=(b_x,b_y,b_z).$$

由向量积的运算规律, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}\\&\quad+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是两两垂直的单位向量, 且它们符合右手规则, 所以

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j},$$

从而有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k},$$

或

$$(a_yb_z-a_zb_y,\ a_zb_x-a_xb_z,\ a_xb_y-a_yb_x).$$

为便于记忆, 引进三阶行列式, 上式可以写成

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

例 1.1.7 设向量 $\boldsymbol{a}=(2,2,1)$, $\boldsymbol{b}=(4,5,3)$, 求一个与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直的向量 $\boldsymbol{c}$.

解 由向量积的定义, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直, 故可取

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&1\\4&5&3\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}=(1,-2,2).$$

例 1.1.8 设 l 是空间过点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,5)$ 的直线, 求点 $C(3,2,-5)$ 到直线 l 的距离 d.

解 作向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$, C 到 l 的距离 d 为以 AB, AC 为邻边的平行四边形的高 (图 1.16), 而 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ 为该平行四边形的面积, 所以

$$d=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

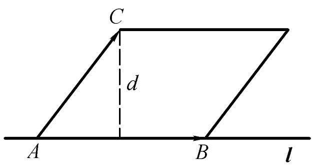

图 1.16

因为 $\overrightarrow{AB}=(1,-3,2)$, $\overrightarrow{AC}=(2,0,-8)$, 所以

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix}=24\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}=6(4,2,1),$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=6\sqrt{4^2+2^2+1^2}=6\sqrt{21},$$

而

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{14},$$

故所求距离 $d=\dfrac{6\sqrt{21}}{\sqrt{14}}=3\sqrt{6}$.

习 题 1.1

1. 求证以 $M_1(4,3,1),M_2(7,1,2),M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

2. 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点坐标是 $(2,-1,0)$, 模 $|\boldsymbol{a}|=14$, 其方向与向量 $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ 的方向一致, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点坐标.

4. 设 $\triangle ABC$ 的重心为 G, 任一点 O 到三角形三顶点的向量为 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}_1$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}_2$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}_3$, 求证: $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)$.

5. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 5, 方向指向 Oxy 面的上方, 并与 x 轴、y 轴正向的夹角分别为 $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{4}$, 试求向量 $\boldsymbol{a}$.

6. 向量 $\boldsymbol{m}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{n}=(b_x,b_y,b_z)$, $\boldsymbol{p}=(c_x,c_y,c_z)$, 求 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-2\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影.

7. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 $A(4,0,5)$, 终点为 $B(7,1,3)$, 求出 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量按基本单位向量的分解表示式.

8. 设 $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=5$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{2}{3}\pi$, 若向量 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{n}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 互相垂直, 求 λ.

9. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为单位向量, 且有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

10. 已知 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$, 求 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$.

11. 设向量 $\boldsymbol{x}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,3,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-1,3)$, 并且与 $\boldsymbol{c}=(2,0,2)$ 的数量积为 -10, 求向量 $\boldsymbol{x}$.

12. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$, 求同时垂直 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 且在向量 $\boldsymbol{c}=(2,1,2)$ 上投影是 14 的向量 $\boldsymbol{r}$.

13. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向平行于向量 $\boldsymbol{c}=(7,-4,-4)$ 和向量 $\boldsymbol{b}=(-2,-1,2)$ 之间的角平分线, 且 $|\boldsymbol{a}|=5\sqrt{6}$, 求向量 $\boldsymbol{a}$.

1.2 平面与直线

从本节开始讨论空间的几何图形及其方程, 这些几何图形包括平面、直线、曲面及曲线. 先以曲面为例介绍几何图形的方程的概念.

对于空间的一张曲面 Σ, 取定直角坐标系 $Oxyz$ 后, 如果曲面上的点 $M(x,y,z)$ 的坐标 x,y,z 和一个三元方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{1.2.1}$$

有如下关系：

(1) 曲面 Σ 上任意一点的坐标都满足方程 (1.2.1),

(2) 不在曲面 Σ 上的点的坐标都不满足方程 (1.2.1),

则称方程 (1.2.1) 为**曲面 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的方程**, 而曲面 Σ 称为方程 (1.2.1) 的**图形**.

下面我们以向量为工具讨论平面与直线及其方程.

1.2.1 平面

1. 平面的点法式方程

垂直于平面 π 的非零向量称为该平面的**法向量**, 一般记为 $\boldsymbol{n}$. 显然平面 π 上的任何向量都与其法向量 $\boldsymbol{n}$ 相垂直.

因为过空间一个已知点有且仅有一个平面垂直于已知直线, 所以当平面 π 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 及平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为已知时, 平面 π 的位置是完全确定的. 下面我们根据上述已知条件来建立平面 π 的方程.

设 $M(x,y,z)$ 是平面 π 上的任意一点, 则 $\overrightarrow{M_0M}\perp\boldsymbol{n}$, 即 $\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=0$(图 1.17). 由于 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$, 故有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{1.2.2}$$

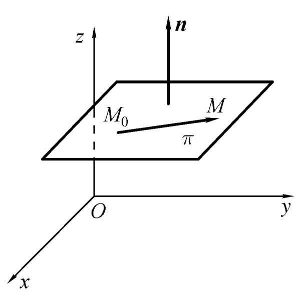

图 1.17

而当点 $M(x,y,z)$ 不在平面 π 上时, $\overrightarrow{M_0M}$ 不垂直于 $\boldsymbol{n}$, 因此点 M 的坐标不满足方程 (1.2.2). 所以 (1.2.2) 是平面 π 的方程, 称为平面 π 的**点法式方程**.

例 1.2.1 求过点 $(1,1,2)$ 且以 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$ 为法向量的平面方程.

解 由点法式方程 (1.2.2), 得所求平面方程为

$$1(x-1)+2(y-1)+1(z-2)=0,$$

即

$$x+2y+z-5=0.$$

例 1.2.2 求过三点 $M_1(1,1,1)$, $M_2(-2,1,2)$ 和 $M_3(-3,3,1)$ 的平面方程.

解 所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2}$ 且 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_1M_3}$, 而 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,0,1)$, $\overrightarrow{M_1M_3}=(-4,2,0)$, 所以可取

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -3 & 0 & 1\\ -4 & 2 & 0\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k},$$

根据点法式方程 (1.2.2), 得所求平面方程为

$$-2(x-1)-4(y-1)-6(z-1)=0,$$

即

$$x+2y+3z-6=0.$$

一般地, 如果平面 π 过不共线的三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 和 $M_3(x_3,y_3,z_3)$, 设 $M(x,y,z)$ 为平面 π 上的任意一点, 则向量 $\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3}$ 共面, 即它们的混合积为零, 因此得

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$$

此式称为平面的三点式方程.

2. 平面的一般方程

在平面的点法式方程 (1.2.2) 中, 若记 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, 则方程 (1.2.2) 成为三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{1.2.3}$$

反过来, 对给定的三元一次方程 (1.2.3), 其中 A,B,C 不同时为零, 设 x_0,y_0,z_0 满足 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, 把式 (1.2.3) 与它相减得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

可见方程 (1.2.3) 就是过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 并且以 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为法向量的平面方程. 我们把方程 (1.2.3) 称为平面的**一般方程**. 因此, 三元一次方程 (1.2.3) 的图形是平面.

要熟悉以下一些特殊的三元一次方程所表示的平面的特点：

当 $D=0$ 时, 方程为 $Ax+By+Cz=0$, 表示一个过原点的平面.

当 $A=0$ 时, 方程为 $By+Cz+D=0$, 法向量 $\boldsymbol{n}=(0,B,C)$ 垂直于 x 轴, 方程表示一个平行于 x 轴的平面.

同样, 方程 $Ax+Cz+D=0$ 和 $Ax+By+D=0$ 分别表示一个平行于 y 轴、z 轴的平面.

当 $A=B=0$ 时, 方程为 $Cz+D=0$, 法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,C)$ 同时垂直于 x 轴和 y 轴, 方程表示一个平行于 Oxy 面的平面.

同样, 方程 $Ax+D=0$ 和 $By+D=0$ 分别表示一个平行于 Oyz 面、Ozx 面的平面.

例 1.2.3　求过 z 轴和点 $(-3,1,-2)$ 的平面方程.

解　由于所求平面过 z 轴, 所以其一般方程可设为

$$Ax+By=0.$$

又所求平面过点 $(-3,1,-2)$, 有

$$-3A+B=0,\quad 即\quad B=3A.$$

代入方程 $Ax+By=0$ 并消去 A 得所求平面方程为

$$x+3y=0.$$

例 1.2.4　求与 x,y,z 轴分别交于点 $P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ 的平面方程 (图 1.18), 其中 $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$.

解　设所求平面方程为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

因为平面不过原点, 所以 $D\neq 0$. 将点 P,Q,R 的坐标代入方程, 得

$$aA+D=0,\ bB+D=0,\ cC+D=0,$$

即 $A=-\dfrac{D}{a},B=-\dfrac{D}{b},C=-\dfrac{D}{c}$.

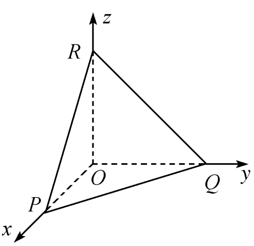

图　1.18

代入所设方程并消去 D, 得平面的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

此方程称为平面的截距式方程, a,b,c 依次称为平面在 x,y,z 轴上的截距.

3. 两平面的夹角

两平面的法向量的夹角称为两平面的夹角, 一般不取钝角 (图 1.19).

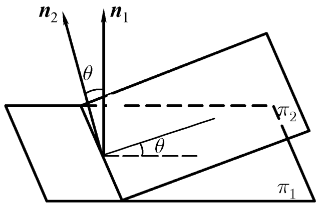

图　1.19

设两平面 π_1 和 π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$, 由于两平面的夹角 θ 是 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角并且不取钝角, 所以

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

根据两向量垂直或平行的充要条件可知:

(1) 平面 π_1 和 π_2 互相垂直的充要条件是:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0;$$

(2) 平面 π_1 和 π_2 互相平行的充要条件是:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

特别地, 当 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$ 时两平面重合.

例 1.2.5　求平面 $2x-y+z-6=0$ 和平面 $x+y+2z-5=0$ 的夹角.

解　$\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{|2\times1+(-1)\times1+1\times2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\dfrac{1}{2}$,

所以两平面的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

4. 点到平面的距离

设 $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 π: $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点, 在平面 π 上任取一点 $M_1\,(x_1,y_1,z_1)$, 并作向量 $\overrightarrow{M_1M_0}$(图 1.20), 则点 M_0 到平面 π 的距离

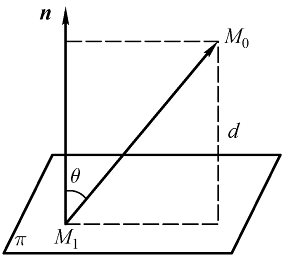

图　1.20

$$d=\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|\cos(\widehat{\overrightarrow{M_1M_0},\boldsymbol{n}})=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

由于

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\boldsymbol{n}&=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)\\&=Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1),\end{aligned}$$

而点 M_1 在平面 π 上, 即 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$, $-(Ax_1+By_1+Cz_1)=D$, 故

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

1.2.2　直线

1. 直线的对称式方程与参数方程

平行于直线的非零向量称为直线的**方向向量**. 一般记作 $\boldsymbol{s}$.

因为过空间一个已知点有且仅有一条直线平行于已知直线, 所以当直线 L 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 及直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为已知时, 直线 L 的位置是完全确定的. 下面我们根据上述已知条件来建立直线 L 的方程.

设 $M(x,y,z)$ 是直线 L 上的任意一点, 于是 $\overrightarrow{M_0M}\ //\boldsymbol{s}$, 根据两向量平行的充要条件有

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{1.2.4}$$

而当点 $M(x,y,z)$ 不在直线 L 上时, $\overrightarrow{M_0M}$ 不平行于 $\boldsymbol{s}$, 因此点 M 的坐标不满足式 (1.2.4). 所以式 (1.2.4) 是直线 L 的方程, 称为直线 L 的**对称式** (**或点向式**) **方程**.

在式 (1.2.4) 中, 若 m,n,p 中某个为零时, 则理解为相应的分子为零.

由直线的对称式方程, 可以导出直线的参数方程. 若设

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t,$$

则有

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\y=y_0+nt,\\z=z_0+pt.\end{cases}$$

此式称为直线 L 的**参数方程**.

例 1.2.6 求过点 $(1,-2,4)$ 且与平面 $2x-3y+z=4$ 垂直的直线方程.

解 因为所求直线垂直于已知平面, 所以可取平面的法向量作为直线的方向向量, 即取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}=(2,-3,1)$, 于是所求直线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}.$$

2. 直线的一般方程

空间直线 L 可以看作不平行的两个平面

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

的交线 (图 1.21). 空间上任意一点 $M(x,y,z)$ 在直线 L 上, 当且仅当它的坐标 x,y,z 同时满足 π_1 和 π_2 的方程, 即满足方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \tag{1.2.5}$$

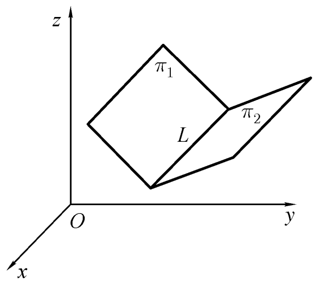

图 1.21

称之为直线 L 的**一般方程**, 其中 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ 不成立.

如果直线由对称式方程 (1.2.4) 给出, 容易写成一般方程, 如

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}-\dfrac{y-y_0}{n}=0, \\ \dfrac{x-x_0}{m}-\dfrac{z-z_0}{p}=0. \end{cases}$$

特别地, 当 m,n,p 中有一个为零, 如 $m=0$ 时, 应理解为一般方程

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ \dfrac{y-y_0}{n}-\dfrac{z-z_0}{p}=0. \end{cases}$$

当 m,n,p 中有两个为零, 如 $m=n=0$, 应理解为一般方程

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ y-y_0=0. \end{cases}$$

如果直线 L 由一般方程 (1.2.5) 给出, 即直线 L 是平面 π_1 和 π_2 的交线, 那么 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 同时垂直于 π_1 和 π_2 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$, 可取

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2.$$