第一部分　方法篇

方法一　推演法

方法概述

有些选择题、填空题是由计算题、应用题、证明题、判断题改编而成的.这类题目可直接从题设的条件出发,利用已知条件、相关公式、公理、定理、法则、特殊结论等,通过准确的运算、严谨的推理、合理的验证得出正确的结论.

推演法就是将选择题、填空题作为解答题来解决的一种常见的基本方法,低档选择题、填空题可用此法迅速求解.通过阅读条件主动地反映性质,再将得到的性质结合相关结论进行直截了当的推理与计算,然后将推理和计算的结果作为答案.这一方法要求对于数学的概念、定义、定理和公式成立的充分条件和必要条件的理解要尽可能地全面、透彻、深入;对于数学公式的推导、应用、计算要尽可能地熟练、迅速、准确.

典例精讲

典例一　推演法在不等式中的应用举例

例 1　设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=x^2$,若对任意的 $x\in[t,t+2]$,不等式 $f(x+t)\geqslant 2f(x)$ 恒成立,则实数 t 的取值范围是(　　).

A. $[2,+\infty)$　　B. $[-\sqrt{2},-1]\cup[0,\sqrt{2}]$

C. $[\sqrt{2},+\infty)$　　D. $(0,\sqrt{2}]$

【分析】根据函数奇偶性求解函数解析式,且奇函数有恒等式 $f(-x)=-f(x)$.

【解析】设 $x<0$,则 $-x>0$,$f(-x)=(-x)^2=x^2$,又 $f(x)$ 为奇函数,$f(-x)=-f(x)$,故 $f(x)=-f(-x)=-x^2$ $(x<0)$.因此 $f(x)=x|x|$,$x\in\mathbf{R}$.易知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.由 $f(x+t)\geqslant 2f(x)=f(\sqrt{2}x)\Rightarrow x+t\geqslant\sqrt{2}x$,即 $t\geqslant(\sqrt{2}-1)x$,对 $x\in[t,t+2]$ 恒成立 $\Rightarrow t\geqslant(\sqrt{2}-1)(t+2)$ $\Rightarrow t\geqslant\sqrt{2}$.故选 C.

【评注】不等式恒成立条件下求参数的取值范围问题,利用等价转化思想转化为函数的单调性和最值问题.

变式 1　已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增.若实数 a 满足 $f(\log_2 a)+f(\log_{\frac{1}{2}} a)\leqslant 2f(1)$,则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $[1,2]$　　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$

C. $\left[\frac{1}{2},2\right]$　　D. $(0,2]$

变式 2　若定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数 $y=f(x)$ 对于任意的 $x,y\in\mathbf{R}$,不等式 $f(x^2-2x)\leqslant -f(2y-y^2)$ 恒成立,且 $y=f(x-1)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称,则当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时,$\frac{y}{x}$ 的取值范围是________.

变式 3　已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$,且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数,当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,$f(\cos 2\theta-3)+f(4m-2m\cos\theta)>f(0)$ 恒成立,则实数 m 的取值范围是________.

例 2　若对任意正数 x,y,都有 $a\leqslant\frac{x+y}{x+2\sqrt{2xy}}$,则实数 a 的最大值是________.

【分析】本题采用推演法求解,将 $a\leqslant\frac{x+y}{x+2\sqrt{2xy}}$ 对 $x,y\in(0,+\infty)$ 恒成立,转化为 $a\leqslant\left(\frac{x+y}{x+2\sqrt{2xy}}\right)_{\min}$.

【解析】因为 $\frac{x+y}{x+2\sqrt{2xy}}\geqslant\frac{x+y}{x+(x+2y)}=\frac{1}{2}$,当且仅当 $x=2y$ 时取等号,所以 $a\leqslant\frac{1}{2}$,则实数 a 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

【评注】本题利用均值不等式,巧妙地求出 $\frac{x+y}{x+2\sqrt{2xy}}$ $(x,y\in(0,+\infty))$ 的最小值.

变式 1　设 $a+b=2$,$b>0$,则当 $a=$________时,$\frac{1}{2|a|}+\frac{|a|}{b}$ 取得最小值.

例 3　若 $x,y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,$a\in\mathbf{R}$,且满足方程:$x^3+\sin x-2a=0$ 和 $4y^3+\sin y\cos y+a=0$,则 $\cos(x+2y)=$________.

【解析】由 $x^3+\sin x-2a=0$,$4y^3+\sin y\cos y+a=0$,得 $x^3+\sin x=2a$,$(2y)^3+\sin 2y=-2a$,设函数 $f(x)=x^3+\sin x$,$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,则 $f'(x)=3x^2+\cos x>0$,故函数 $f(x)$ 为单调递增的奇函数.由 $f(x)=-f(2y)=f(-2y)$ 可知 $x=-2y$,即 $x+2y=0$,故 $\cos(x+2y)=1$.

变式 1　已知 $x,y\in(0,+\infty)$,$a\in\mathbf{R}$,若 $x^3+\ln x+2a=0$,$4y^3+\ln\sqrt{y}+\ln\sqrt{2}+a=0$,则 $\frac{y}{x}$ 的值是(　　).

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

典例二　推演法在三角函数中的应用举例

例 4　若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$,$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$,

$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)$ 等于(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{9}$

【分析】建立未知角与已知角的联系，$\alpha+\frac{\beta}{2}=\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$，利用推演法求解.

【解析】因为 $\alpha+\frac{\beta}{2}=\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$，

所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right]$

$=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$.

又 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，

则 $\frac{\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$，

因为 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

故 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$. 故选 C.

【评注】本题是求解角的三角函数值问题，将未知角与已知角建立联系，利用三角恒等变换公式转化为已知角的三角函数值求解.

典例三　推演法在解析几何中应用举例

例 5　已知抛物线 C：$y^2=8x$ 与点 $M(-2,2)$，过抛物线 C 的焦点，且斜率为 k 的直线与 C 交于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，则 $k=$(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

【分析】将直线方程与抛物线方程联立，利用"设而不求"的方法求解.

【解析】解法一：由抛物线的焦点 $F(2,0)$，设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)(k\neq0)$. 联立 $\begin{cases}y=k(x-2)\\y^2=8x\end{cases}$，消去 x，得 $y^2-\frac{8}{k}y-16=0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{8}{k}$，$y_1y_2=-16$，又 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+2,y_1-2)\cdot(x_2+2,y_2-2)=\left(\frac{y_1}{k}+4,y_1-2\right)\cdot\left(\frac{y_2}{k}+4,y_2-2\right)=\frac{k^2+1}{k^2}y_1y_2+\frac{4-2k}{k}(y_1+y_2)+20=\frac{4k^2-16k+16}{k^2}=0$，得 $k=2$.

故选 D.

解法二：设 l_{AB}：$y=k(x-2)$，由题意知 $k\neq0$，则 $x=\frac{1}{k}y+2$，令 $t=\frac{1}{k}$，则 $x=ty+2$，联立直线 AB 与抛物线 C 的方程得 $\begin{cases}x=ty+2\\y^2=8x\end{cases}$，消 x 得关于 y 的一元二次方程 $y^2+8ty-16=0$，显然 $\Delta=64t^2+64>0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=8t$，$y_1y_2=-16$，又 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+2,y_1-2)\cdot(x_2+2,y_2-2)=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4+y_1y_2-2(y_1+y_2)+4=\frac{y_1^2y_2^2}{64}+2\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{8}\right)+4+y_1y_2-2(y_1+y_2)+4=\frac{(y_1y_2)^2}{64}+\frac{(y_1+y_2)^2}{4}+\frac{y_1y_2}{2}-2(y_1+y_2)+8=16t^2-16t+4=0$，解得 $t=\frac{1}{2}$，故 $k=2$. 故选 D.

【评注】"设而不求"在直线与圆锥曲线位置关系问题中经常考查，需重点掌握. 另外，选择适当的直线方程与圆锥曲线方程联立，可有效减少计算量，以提高解题效率. 对于本题，建议使用解法二中的直线方程与抛物线方程进行联立.

变式 1　椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A_1、A_2，点 P 在 C 上，且直线 PA_2 的斜率的取值范围是 $[-2,-1]$，那么直线 PA_1 的斜率取值范围是(　　).

A. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{3}{8},\frac{3}{4}\right]$

C. $\left[\frac{1}{2},1\right]$　　D. $\left[\frac{3}{4},1\right]$

强化训练

1. 若 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的单位向量，且 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于(　　).

A. 1　　B. -4　　C. $-\frac{7}{2}$　　D. $\frac{7}{2}$

2. 若△ABC 的内角 A，B，C 所对的边 a，b，c 满足 $(a+b)^2-c^2=4$，且∠$C=60°$，则 ab 的值为(　　).

A. $\frac{4}{3}$　　B. $8-4\sqrt{3}$　　C. 1　　D. $\frac{2}{3}$

3. 已知函数 $f(x)=ax^3+b\sin x+4$ $(a,b\in\mathbf{R})$，$f(\lg(\log_2 10))=5$，则 $f(\lg(\lg 2))$ 等于(　　).

A. -5　　B. -1

C. 3　　D. 4

4. 阅读如图 1-1 所示的程序框图，若输出的 S 值等于 16，那么判断框内应填写的条件是(　　).

A. $i>5$?　　B. $i>6$?

C. $i>7$?　　D. $i>8$?

5. 如图 1-2 所示，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=1$. 若二面角 $C-AB-C_1$ 的大小为 $60°$，则点 C 到平面 C_1AB 的距离为(　　).

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

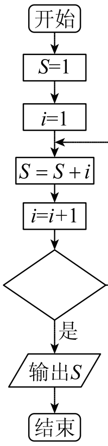


图 1-1

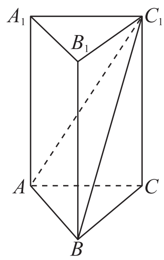


图 1-2

6. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 且倾斜角为 $60°$ 的直线 l 与抛物线在第一、四象限分别交于 A、B 两点，则 $\frac{|AF|}{|BF|}$ 的值等于(　　).

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

7. 设 a 为函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x\ (x\in\mathbf{R})$ 的最大值，则二项式 $\left(a\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中含 x^2 项的系数是(　　).

A. 192　　B. 182　　C. -192　　D. -182

8. 已知集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 0\}$，$B=\{x|ax+b\cdot 2^x-1<0,0\leqslant a\leqslant 2,1\leqslant b\leqslant 3\}$，$a,b\in\mathbf{R}$，则 $A\cap B=\varnothing$ 的概率为(　　).

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{16}$　　D. $\frac{15}{16}$

9. 已知集合 $A=\{(x,y)|x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)|x=m,y=3m^2+12,m\in\mathbf{Z}\}$. 若存在实数 a,b 使得 $A\cap B\neq\varnothing$ 成立，称点 (a,b) 为“Γ”点，则“Γ”点在平面区域 $C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 108\}$ 内的个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 无数个

10. 已知集合 $M=\{1,2,3\}$，$N=\{1,2,3,4\}$，定义函数 $f:M\to N$. 若点 $A(1,f(1))$，$B(2,f(2))$，$C(3,f(3))$，$\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 D，且 $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\lambda\overrightarrow{DB}\ (\lambda\in\mathbf{R})$，则满足条件的函数 $f(x)$ 有(　　).

A. 6 个　　B. 10 个

C. 12 个　　D. 16 个

11. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2ax+4>0$ 恒成立；q：$f(x)=(3-2a)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为假，则实数 a 的取值范围是________.

12. 已知函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足 $f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$，若 $f(1)=-5$，则 $f(f(5))=$________.

13. 已知 $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2$，则 $\frac{\tan x}{\tan 2x}$ 的值为________.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$B=45°$，$b=\sqrt{2}$，$a=1$，则 A 等于________.

15. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1+a_2=4$，$a_9+a_{10}=36$，则 $S_{10}=$________.

16. 已知 $x,y,z\in(0,+\infty)$，$x-2y+3z=0$，则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值为________.

17. 设函数 $f(x)=x^2-1$，对一切 $x\in\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$，有 $f\left(\frac{x}{m}\right)-4m^2f(x)\leqslant f(x-1)+4f(m)$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是________.

18. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$M,N$ 是椭圆的左、右顶点，P 是椭圆上任意一点，且直线 PM,PN 的斜率分别为 $k_1,k_2(k_1k_2\neq 0)$，若 $|k_1|+|k_2|$ 的最小值为 1，则椭圆的离心率为________.

19. 已知直线 $y=a$ 交抛物线 $y=x^2$ 于 A,B 两点. 若该抛物线上存在点 C，使得 $\angle ACB$ 为直角，则实数 a 的取值范围为________.

20. 已知以 $y=\pm\sqrt{3}x$ 为渐近线的双曲线 D：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，若 P 为双曲线 D 右支上任意一点，则 $\frac{|PF_1|-|PF_2|}{|PF_1|+|PF_2|}$ 的取值范围是________.

21. 将 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数随机排成一列，得到的一列数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列. 定义 $\tau(a_1,a_2,\cdots,a_n)=|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|$ 为排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的波动程度. 当 $n=2012$ 时，则 $\tau(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的最小值为________；当 $n=2k(k\geqslant 2,k\in\mathbf{N}^*)$ 时，则 $\tau(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的最大值为________.

22. 若一个三位数的十位数字比个位数字和百位数字都大，则称这个数为“组合数”，现从 1，2，3，4，5，6 这六个数中任取 3 个数，组成无重复数字的 3 位数，其中“组合数”有________个.

23. 在平面直角坐标系中，定义横坐标及纵坐标为整数的点为格点，如果直线 $y=kx+b$ 与圆 $x^2+y^2=5$ 的公共点均为格点，那么这样的直线有________条.

24. 设 r,s,t 为整数，集合 $\{x|x=2^r+2^s+2^t,0\leqslant t<s<r\}$ 中的数由小到大组成的数列 $\{a_n\}$ 为 7，11，13，14，…，则 a_{36} 的值是________.

方法二　图像法

方法概述

图像法也叫图示法，它体现了数形结合的思想. 图像法是利用函数图像或数学结果的几何意义，将数的问题(如解方程的根(位置或个数)、解不等式、求最值、求取值范围等)与相应图形结合起来，利用几何图形的直观性，再辅以简单计算，确定正确答案的方法.

每年高考试题中均有选择题、填空题是以应用此法求解为落脚点考查学生对数形结合思想的应用意识. 采用本方法解题往往既简捷又迅速，如：①借助集合中的韦恩图明

确集合的交、并、补的关系；②借助三角函数线和三角函数图像，解决有关三角的问题；③借助直线和曲线的位置关系，来解决某些方程、不等式的问题．合理应用数形结合思想往往可以起到事半功倍的效果．

典例精讲

典例一　图像法在方程根的问题中的应用举例

例1　方程 $2^{|x|}=2\cos x$ 的解的个数是(　　)．

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 无穷多个

【解析】在同一直坐标系中作出函数 $y_1=2^{|x|}$，$y_2=2\cos x$ 的图像，如图1-3所示，即得交点个数为2．所以方程 $2^{|x|}=2\cos x$ 的解的个数是2．故选C．

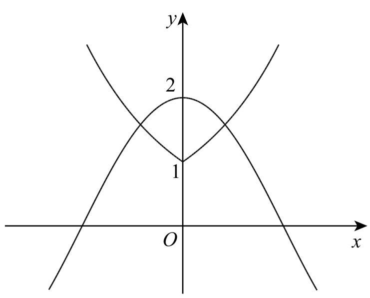


图 1-3

【评注】此方程为超越方程，不易求出其解，采用一般方法很可能无功而返．而根据函数具体模型画出函数图像，利用数形结合的思想很容易求出解的个数，应用此法真有一种"一览众题小"的感觉，简便、易解、易懂．

变式1　方程 $\lg x+x=3$ 的解所在的区间为(　　)．

A. (0,1)　　B(1,2)　　C. (2,3)　　D. $(3,+\infty)$

变式2　已知函数 $f(x)=a^x+x-b$ 的零点 $x_0\in(n,n+1)$ $(n\in \mathbf{Z})$，其中常数 a,b 满足 $2^a=3$，$3^b=2$，则 n 的值是(　　)．

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

例2　直线 $y=kx$ 与曲线 $y=e^{|\ln x|}-|x-2|$ 有3个公共点时，则实数 k 的取值范围是________．

【解析】由函数 $y=e^{|\ln x|}-|x-2|$ 得：

当 $0<x<1$ 时，$\ln x<0$，$x-2<0$，$y=e^{-\ln x}+x-2=\dfrac{1}{x}+x-2$；

当 $1\leqslant x<2$ 时，$\ln x\geqslant 0$，$x-2<0$，$y=e^{\ln x}+x-2=2x-2$；

当 $x\geqslant 2$ 时，$\ln x>0$，$x-2\geqslant 0$，$y=e^{\ln x}-(x-2)=2$．

则函数 $y=f(x)$ 的图像如图1-4所示．当直线 $y=kx$ 与曲线 $y=e^{|\ln x|}-|x-2|$ 有三个交点时，$k\in(0,1)$．

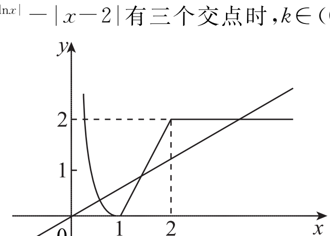


图 1-4

变式1　定义 $a\otimes b=\sqrt{ab-1}-ka-2$，则方程 $x\otimes x=0$ 有唯一解时，实数 k 的取值范围是(　　)．

A. $[-2,-1]\cup[1,2]$　　B. $\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\}$

C. $[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$　　D. $[-\sqrt{5},-1]\cup[1,\sqrt{5}]$

典例二　图像法在不等式问题中的应用举例

例3　当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，不等式 $\sin\dfrac{\pi x}{2}\geqslant kx$ 成立，则实数 k 的取值范围是________．

【分析】利用图像法求解本题．不等式 $\sin\dfrac{\pi x}{2}\geqslant kx$ 等价于函数 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ 的图像在直线 $y=kx$ 上方(可有公共点)．

【解析】如图1-5所示，作函数 $y_1=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ 和 $y_2=x$ 的图像，两个图像的交点恰好为(0,0)和(1,1)．当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，要使 $\sin\dfrac{\pi x}{2}\geqslant kx$，需使 $k\leqslant 1$，故 k 的取值范围为 $(-\infty,1]$．

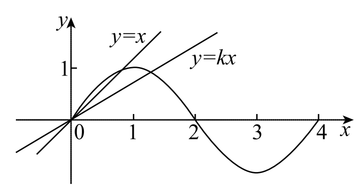


图 1-5

【评注】本题可归结为不等式恒成立条件下求参数的取值范围问题，利用数形结合思想求解这类问题特别奏效．

变式1　若存在正数 x 使 $2^x(x-a)<1$ 成立，则实数 a 的取值范围是(　　)．

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $(-2,+\infty)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $(-1,+\infty)$

变式2　函数 $y=f(x)$ 的图像如图1-6所示，在区间 $[a,b]$ 上可找到 $n(n\geqslant 2)$ 个不同的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得 $\dfrac{f(x_1)}{x_1}=\dfrac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\dfrac{f(x_n)}{x_n}$，则 n 的取值范围是(　　)．

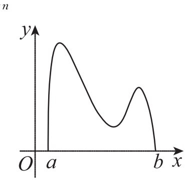


图 1-6

A. {2,3}　　B. {2,3,4}

C. {3,4}　　D. {3,4,5}

典例三　图像法在平面向量问题中的应用举例

例4　已知向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{e}$，$|\boldsymbol{e}|=1$，若对任意 $t\in\mathbf{R}$，恒有 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$ 成立，则(　　)．

A. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{e}$　　B. $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$

C. $\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$　　D. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$

【分析】显然对 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$ 进行平方处理会比较麻烦，我们联想到向量的几何表示，即用图像法解本题．

【解析】如图1-7所示，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}$，则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}$，因为对任意的 $t\in\mathbf{R}$，有 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$，所以当 $t_1>1$ 时，设

$\overrightarrow{OB_1}=t_1\boldsymbol{e}$,则 $\boldsymbol{a}-t_1\boldsymbol{e}=\overrightarrow{B_1A}$,即 $|\overrightarrow{B_1A}|\geqslant|\overrightarrow{BA}|$;当 $t_2<1$ 时,设$\overrightarrow{OB_2}=t_2\boldsymbol{e}$,则 $\boldsymbol{a}-t_2\boldsymbol{e}=\overrightarrow{B_2A}$,则 $|\overrightarrow{B_2A}|\geqslant|\overrightarrow{BA}|$.综上,$|\overrightarrow{BA}|$是点 A 到直线 OB 的最短距离,即 $BA\perp OB$,所以 $\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$.故选 C.

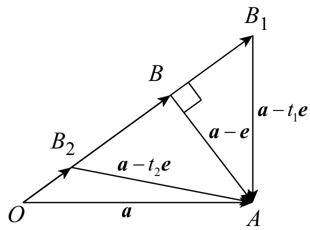


图 1-7

【评注】利用向量运算的几何表示,结合三角形法则、平行四边形法则,可将代数运算转化为几何运算求解.

变式 1　已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\neq 0,\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b})$满足$|\boldsymbol{b}|=1$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 的夹角为 $120°$,则$|\boldsymbol{a}|$的取值范围是________.

典例四　图像法在解析几何问题中的应用举例

例 5　点 P 在直线 $l:y=x-1$ 上,若存在过 P 的直线交抛物线 $y=x^2$ 于 A,B 两点,且$|PA|=|AB|$,则称点 P 为"τ 点",那么下列结论中正确的是(　　).

A. 直线 l 上的所有点都是"τ 点"

B. 直线 l 上仅有有限个点是"τ 点"

C. 直线 l 上的所有点都不是"τ 点"

D. 直线 l 上有无穷多个点(点不是所有的点)是"τ 点"

【解析】解法一:(极限法)如图 1-8 所示,在直线 l 上任取一点 P,作 $y=x^2$ 的切线 PT,及交线 PAB,当直线 PAB 绕点 P 旋转时,易知$|AB|$的长度变化区间为$(0,+\infty)$,故一定存在一条直线 PAB,使得$|PA|=|AB|$,故直线 l 上的所有点都是"τ 点".故选 A.

解法二:(推演法)设 $A(m,n)$,$P(x,x-1)$,则 $B(2m-x,2n-x+1)$,因为 A,B 在 $y=x^2$ 上,所以 $\begin{cases}n=m^2\\2n-x+1=(2m-x)^2\end{cases}$(*).消去 n,整理得关于 x 的方程 $x^2-(4m-1)x+2m^2-1=0$,因为 $\Delta=(4m-1)^2-4(2m^2-1)=8m^2-8m+5>0$ 恒成立,所以方程(*)恒有实数根.故选 A.

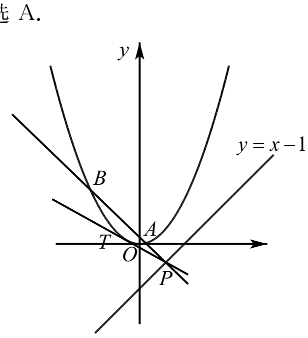


图 1-8

变式 1　已知圆 $M:(x-1)^2+(y-3)^2=4$,过 x 轴上一点 $P(a,0)$存在一直线与圆 M 相交,交点分别为 A,B,且满足$|PA|=|AB|$,则点 P 的横坐标 a 的取值范围为________.

典例五　图像法在线性规划问题中的应用举例

例 6　设二元一次不等式组$\begin{cases}x+2y-19\geqslant 0\\x-y+8\geqslant 0\\2x+y-14\leqslant 0\end{cases}$所表示的平面区域为 M,使函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$的图像经过区域 M 的 a 的取值范围是(　　).

A. $[1,3]$　　B. $[2,\sqrt{10}]$　　C. $[2,9]$　　D. $[\sqrt{10},9]$

【分析】这是目标函数中参数的取值范围问题,先画出平面区域,确定最优解,从而求出 a 的范围.

【解析】作出不等式组的平面区域 M,如图 1-9 所示,

由$\begin{cases}x+2y-19=0\\2x+y-14=0\end{cases}$,得 $A(3,8)$.

由$\begin{cases}x+2y-19=0\\x-y+8=0\end{cases}$,得$B(1,9)$.由图可知,若 $y=a^x$ 的图像过区域M,则当 $y=a^x$ 的图像过点 $A(3,8)$,即 $a^3=8$,$a=2$时,a 最小;当 $y=a^x$ 的图像过点 $B(1,9)$,即 $a=9$ 时,a 最大.所以 $2\leqslant a\leqslant 9$.故选 C.

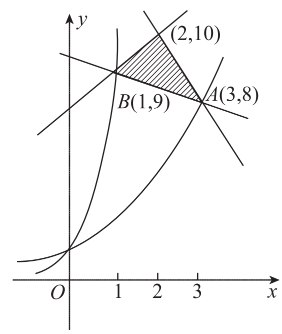


图 1-9

变式 1　设 O 为坐标原点,点 $M(2,1)$,点 $N(x,y)$满足$\begin{cases}x\leqslant 3\\x-y+6\geqslant 0\\x+y\geqslant 0\end{cases}$,则$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$的取值范围是________.

例 7　已知 $f(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant 0\\\log_2 x,x>0\end{cases}$,则函数 $y=f[f(x)]+1$ 的零点个数是(　　).

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

【分析】对于复合函数的零点问题,可利用换元法与图像法综合求解.

【解析】令 $t=f(x)\in\mathbf{R}_f$,则 $y=f(t)+1$.由图 1-10(1)知,$f(t)=-1$,得 $t=-2$ 或$\dfrac{1}{2}$;对应图 1-10(2)知,$x_1=-3$,$x_2=\dfrac{1}{4}$,$x_3=-\dfrac{1}{2}$,$x_4=\sqrt{2}$.因此函数 $y=f[f(x)]+1$ 的零点个数是 4.故选 A.

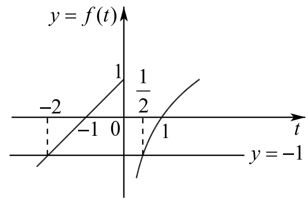


图 1-10(1)

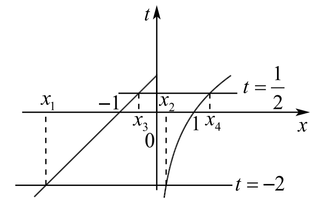


图 1-10(2)

【评注】本题通过换元后,得到函数 $f(x)=t$ 与 $y=f(t)+1$,

同时作出 $t=f(x)$ 与 $y=f(t)$ 的图像. 由 $f(t)=-1$ 得 t 的值（或范围），再由 $t=f(x)$ 确定 x 的值（或范围），这是复合函数求解零点个数问题的通法，应该掌握.

变式 1 若函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有极值点 x_1,x_2，且 $f(x_1)=x_1$，则关于 x 的方程 $3(f(x))^2+2af(x)+b=0$ 的不同实根个数是（　　）.

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

例 8 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2-2(a\neq 0)$ 有且仅有两个不同的零点 x_1,x_2，则（　　）.

A. $a<0$ 时，$x_1+x_2<0, x_1\cdot x_2>0$

B. $a<0$ 时，$x_1+x_2>0, x_1\cdot x_2<0$

C. $a>0$ 时，$x_1+x_2<0, x_1\cdot x_2>0$

D. $a>0$ 时，$x_1+x_2>0, x_1\cdot x_2<0$

【解析】因为 $f(0)=-2$，故 0 不是函数 $f(x)$ 的零点，则方程 $ax^3+bx^2-2=0$ 有两个不等实根等价于方程 $ax^2+bx=\frac{2}{x}$ 有两个不等实根，令 $g(x)=ax^2+bx, h(x)=\frac{2}{x}$.

①当 $a>0$ 时，如图 1-11(1) 所示，抛物线 $y=g(x)$ 过点 $O(0,0)$，且对称轴 $x=-\frac{b}{2a}<0$，设抛物线 $y=g(x)$ 与双曲线切点为 A，交点为 B. 因为 $y=\frac{2}{x}$ 是奇函数，将 $y=g(x)$ 的图像作关于 O 点的中心对称变换，易知 $A'(-x_1,-y_1)$.

即 $x_1+x_2<0, x_1\cdot x_2<0$，排除 C，D；

②当 $a<0$ 时，如图 1-11(2) 所示，因为抛物线 $y=g(x)$ 过 $O(0,0)$ 点，且对称轴 $x=-\frac{b}{2a}>0$，同理知，$x_1+x_2>0$，$x_1\cdot x_2<0$，排除 A. 故选 B.

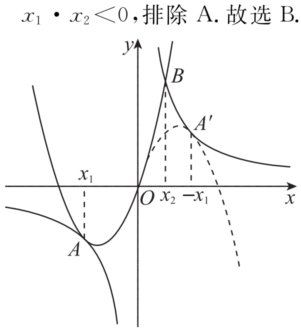


图 1-11(1)

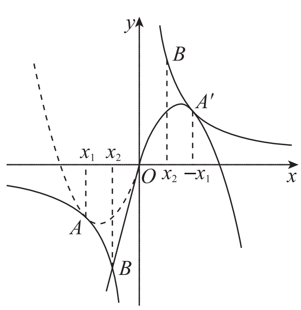


图 1-11(2)

变式 1 设函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，$g(x)=ax^2+bx(a,b\in\mathbf{R},a\neq 0)$，若 $y=f(x)$ 的图像与 $y=g(x)$ 的图像有且仅有两个不同的公共点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则下列判断中正确的是（　　）

A. $a<0$ 时，$x_1+x_2<0, y_1+y_2>0$

B. $a<0$ 时，$x_1+x_2>0, y_1+y_2<0$

C. $a>0$ 时，$x_1+x_2<0, y_1+y_2<0$

D. $a>0$ 时，$x_1+x_2>0, y_1+y_2>0$

强化训练

1. 函数 $f(x)=2^x+3x$ 的零点所在的一个区间是（　　）.

A. $(-2,-1)$　　B. $(-1,0)$

C. $(0,1)$　　D. $(1,2)$

2. 下列区间中，函数 $f(x)=|\ln(2-x)|$ 在其上为增函数的区间是（　　）.

A. $(-\infty,1]$　　B. $\left[-1,\frac{3}{4}\right]$

C. $\left[0,\frac{3}{2}\right)$　　D. $[1,2)$

3. 在直角坐标系 xOy 中，如果两点 $A(a,b)$，$B(-a,-b)$ 在函数 $y=f(x)$ 的图像上，那么称 $[A,B]$ 为函数 $f(x)$ 的一组关于原点的中心对称点（$[A,B]$ 与 $[B,A]$ 看作一组）. 函数 $g(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2}x & (x\leqslant 0)\\ \log_4(x+1) & (x>0)\end{cases}$ 关于原点的中心对称点的组数为（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 在平面直角坐标系中，O 是坐标原点，两定点 A,B 满足 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，则点集 $\{P\mid\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},|\lambda|+|\mu|\leqslant 1,\lambda,\mu\in\mathbf{R}\}$ 所表示的区域的面积是（　　）.

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{3}$

5. 已知函数 $f(x)=x^2+1$ 的定义域为 $[a,b](a<b)$，值域为 $[1,5]$，则在平面直角坐标系内，点 (a,b) 的运动轨迹与直角坐标轴围成的图形的面积为（　　）.

A. 8　　B. 6　　C. 4　　D. 2

6. 已知 α 为锐角，则关于 x 的方程 $x^3-x^2+(\sin\alpha-3)x+1=0$ 的根的情况是（　　）.

A. 只有一个正根

B. 有三个正根

C. 有一个正根，两个负根

D. 有两个正根，一个负根

7. 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$，$g(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{4x}, x>0\\ -x^2-6x-8, x\leqslant 0\end{cases}$，则方程 $g[f(x)]-a=0(a\in\mathbf{R}^+)$ 的解的个数不可能为（　　）.

A. 3 个　　B. 4 个　　C. 5 个　　D. 6 个

8. 设 A,B 是两个集合，定义集合运算 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$，若 $M=\{x\mid |x+1|\leqslant 2\}$，$N=\{y\mid y=\sin x, x\in\mathbf{R}\}$，则 $M-N=$________.

9. 设集合 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{m}{2}\leqslant(x-2)^2+y^2\leqslant m^2,x,y\in\mathbf{R}\right\}$，$B=\{(x,y)\mid 2m\leqslant x+y\leqslant 2m+1,x,y\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 m 的取值范围________.

10. 若不等式 $\sqrt{4x-x^2}>(a-1)x$ 的解集为 A，且 $A\subseteq\{x\mid 0<x<1\}$，则实数 a 的取值范围为________.

11. 已知变量 x,y 满足 $\begin{cases}x-2y+4\geqslant 0\\ x\leqslant 2\\ x+y-2\geqslant 0\end{cases}$，则 $\frac{x+y+3}{x+2}$ 的取值范围是________.

12. 已知点 M 是抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 上一点，F 为抛物线的焦

点，A 在圆 $C:(x-1)^2+(y-4)^2=1$ 上，则 $|MA|+|MF|$ 的最小值为________.

13. 抛物线 $y^2=2x$ 上的动点 A,B 满足 $|AB|=3$，则 AB 的中点横坐标的最小值为________.

14. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在非零实数 l 使得对任意 $x\in M(M\subseteq D)$，有 $x+l\in D$，且 $f(x+l)\geqslant f(x)$，则称 $f(x)$ 为 M 上的 l 高调函数. 如果定义域为 $[-1,+\infty)$ 的函数 $f(x)=x^2$ 为 $[-1,+\infty)$ 上的 m 高调函数，那么实数 m 的取值范围是________；

如果定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 是奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=|x-a^2|-a^2$，且 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的 4 高调函数，那么实数 a 的取值范围是________.

方法三　构造法

方法概述

在解决某些数学问题时，我们常会采用这样的方法：通过对条件和结论充分细致地分析，抓住问题的本质特征，联想熟知的数学模型，然后变换命题，恰当地构造辅助元素，它可以是一个图形，一个函数，一个方程，一个等价命题等，以此架起一座连接条件和结论的桥梁，从而使问题得以解决. 这种解题的数学方法，我们称之为构造法.

典例精讲

典例一　构造法在平面向量问题中的应用举例

例 1　在△ABC 中，M 是 BC 的中点，$AM=3$，$BC=10$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

【分析】用已知向量来表示所求向量.

【解析】因为点 M 是 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$　①

又 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$　②

由①^2－②^2 得 $4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4|\overrightarrow{AM}|^2-|\overrightarrow{CB}|^2=-64$，

则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-16$.

【评注】本题作为填空题，可利用中线向量的结论：如图 1-12 所示，在△ABC 中，点 M 为线段 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})=\overrightarrow{AM}^2-\overrightarrow{MB}^2=\overrightarrow{AM}^2-\dfrac{\overrightarrow{CB}^2}{4}$.

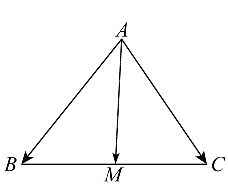


图 1-12

变式 1　在△ABC 中，P_0 是边 AB 上一定点，满足 $P_0B=\dfrac{1}{4}AB$，且对于边 AB 上任一点 P，恒有 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$，则(　　).

A. $\angle ABC=90^\circ$　　B. $\angle BAC=90^\circ$

C. $AB=AC$　　D. $AC=BC$

变式 2　点 P 是棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}$ 的取值范围是(　　).

A. $\left[-1,-\dfrac{1}{4}\right]$　　B. $\left[-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4}\right]$

C. $[-1,0]$　　D. $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$

典例二　构造法在线性规划问题中的应用举例

例 2　已知 α,β 是三次函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}ax^2+2bx$ 的两个极值点，且 $\alpha\in(0,1)$，$\beta\in(1,2)$，则 $\dfrac{b-2}{a-1}$ 的取值范围是(　　).

A. $\left(\dfrac{1}{4},1\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

C. $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$　　D. $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

【分析】目标函数 $\dfrac{b-2}{a-1}$ 的几何意义为动点 (a,b) 与定点 $(1,2)$ 所在直线的斜率.

【解析】依题意，由 α,β 是三次函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}ax^2+2bx$ 的两个极值点，故方程 $f'(x)=0$ 的两根为 α,β，即方程 $x^2+ax+2b=0$ 的两根为 α,β，且 $\alpha\in(0,1)$，$\beta\in(1,2)$，则函数 $f'(x)=x^2+ax+2b$ 的图像如图 1-13(1)所示，因此有不等式组 $\begin{cases}f(0)=2b>0\\ f(1)=1+a+2b<0\\ f(2)=4+2a+2b>0\end{cases}$，其所表示的平面区域如图 1-13(2)所示，$\dfrac{b-2}{a-1}$ 表示动点 $P(a,b)$ 与定点 $(1,2)$ 所在直线的斜率，因此其取值范围为 $\left(\dfrac{1}{4},1\right)$.

故选 A.

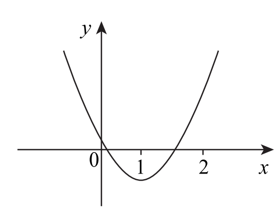


图 1-13(1)

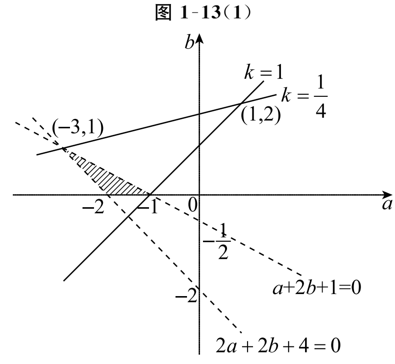


图 1-13(2)

变式1 已知 $P(x,y)$ 的坐标满足 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y<0\\x-\sqrt{3}y+2<0\\y\geqslant 0\end{cases}$，则 $\dfrac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的取值范围为________.

典例三　构造法在立体几何问题中的应用举例

例3 某三棱锥的三视图如图1-14所示，则该三棱锥的体积为（　　）.

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

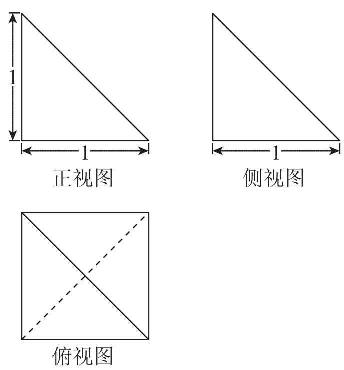


图 1-14

【分析】构造正方体，将三棱锥置于特殊几何体中求解.

【解析】将三棱锥 $P-ABC$ 置入单位正方体中. 当三棱锥 $P-ABC$ 的三视图符合题意时，如图1-15所示. $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{6}$. 故选A.

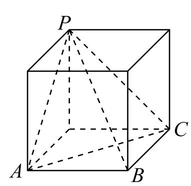


图 1-15

变式1 三棱锥的三组相对的棱（相对的棱是指三棱锥中成异面直线的一组棱）分别相等，且长度分别为 $\sqrt{2}$，m，n，其中 $m^2+n^2=6$，则该三棱锥体积的最大值为________.

典例四　构造法在函数问题中的应用举例

例4 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 分别是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数和偶函数，当 $x<0$ 时，$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$，且 $g(-3)=0$，则不等式 $f(x)g(x)<0$ 的解集是（　　）.

A. $(-3,0)\cup(0,3)$　　B. $(-3,0)\cup(3,+\infty)$

C. $(-\infty,-3)\cup(0,3)$　　D. $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

【分析】构造函数 $h(x)=f(x)g(x)(x\neq0)$，利用函数的单调性和奇偶性求解.

【解析】构造函数 $h(x)=f(x)g(x)(x\neq0)$，则 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$，因为当 $x<0$ 时，$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$，即 $h'(x)>0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，又 $g(-3)=0$，所以 $h(-3)=0$，因为 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，所以 $h(x)$ 为奇函数，则 $h(x)$ 的图像大致如图1-16所示，则不等式 $f(x)\cdot g(x)<0$ 的解集为 $(-\infty,-3)\cup(0,3)$. 故选C.

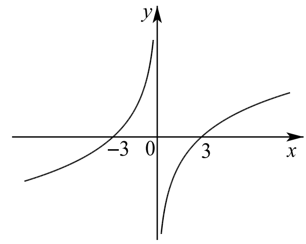


图 1-16

变式1 已知 $f(x)$，$g(x)$ 都是定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导的函数，且满足以下条件：

①$f(x)=a^x\cdot g(x)(a>0,a\neq1)$；

②$g(x)\neq0$；

③$f(x)\cdot g'(x)>f'(x)g(x)$；

④$\frac{f(1)}{g(1)}+\frac{f(-1)}{g(-1)}=\frac{5}{2}$.

则 $a=$（　　）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{5}{4}$　　D. 2或 $\frac{1}{2}$

典例五　构造法在数列问题中的应用举例

例5 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $(a_7-1)^3+2012(a_7-1)=1$，$(a_{2006}-1)^3+2012(a_{2006}-1)=-1$，则 $S_{2012}=$________，a_7________a_{2012}（填“＞”，“＜”或“＝”）.

【分析】构造函数 $f(x)=x^3+2012x$，$x\in\mathbf{R}$. 利用函数的奇偶性与单调性综合求解.

【解析】令 $f(x)=x^3+2012x$，$x\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增且为奇函数. 由题意知 $f(a_7-1)=1$，$f(a_{2006}-1)=-1$，即 $f(a_7-1)+f(a_{2006}-1)=0$，得 $a_7-1+a_{2006}-1=0$，即 $a_7+a_{2006}=2$，

$S_{2012}=\frac{(a_1+a_{2012})\times2012}{2}=\frac{(a_7+a_{2006})\times2012}{2}=2012$.

且 $f(a_{2006}-1)<f(a_7-1)$，得 $a_7>a_{2006}$，所以等差数列 $\{a_n\}$ 单调递减，故 $a_7>a_{2012}$.

变式1 设函数 $f(x)=2x-\cos x$，$\{a_n\}$ 是公差为 $\frac{\pi}{8}$ 的等差数列，$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_5)=5\pi$，则 $[f(a_3)]^2-a_1a_5=$（　　）.

A. 0　　B. $\frac{1}{16}\pi^2$　　C. $\frac{1}{8}\pi^2$　　D. $\frac{13}{16}\pi^2$

典例六　构造法在不等式问题中的应用举例

例6 设 a,b,c,x,y,z 是正数，且 $a^2+b^2+c^2=10$，$x^2+y^2+z^2=40$，$ax+by+cz=20$，则 $\frac{a+b+c}{x+y+z}=$（　　）.

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

【分析】本题考查柯西不等式的运用及取“＝”的条件.

【解析】由于 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(ax+by+cz)^2$，当且仅当 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ 时取等号. 由题设条件可知上式取等

号“=”,设 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=t$,则 $t^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{4}$,即 $t=\frac{1}{2}$.故选 C.

【评注】本题也可通过构造空间向量求解.

令 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$,$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=ax+by+cz=20$. $\boldsymbol{m}^2=a^2+b^2+c^2=10$,$\boldsymbol{n}^2=x^2+y^2+z^2=40$. 因为 $(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})^2=400=\boldsymbol{m}^2\cdot\boldsymbol{n}^2$,所以 $|\boldsymbol{m}|^2|\boldsymbol{n}|^2\cos^2\theta=|\boldsymbol{m}|^2|\boldsymbol{n}|^2$,即 $\cos^2\theta=1$,故 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$,所以 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$,所以 $\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{a}{x}=\frac{|\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|}=\sqrt{\frac{\boldsymbol{m}^2}{\boldsymbol{n}^2}}=\frac{1}{2}$.

变式 1 设 $x,y,z\in\mathbf{R}$,且满足:$x^2+y^2+z^2=1$,$x+2y+3z=\sqrt{14}$,则 $x+y+z=$________.

变式 2 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$,$a+2b+3c=6$,则 $a^2+4b^2+9c^2$ 的最小值为________.

强化训练

1. 已知 $a=\frac{\ln\pi}{\pi}$,$b=\frac{1}{\mathrm{e}}$,$c=\ln\sqrt{2}$,则实数 a,b,c 的大小为(　　).

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

C. $b>c>a$　　D. $b>a>c$

2. 若 $\alpha,\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,且 $\alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta>0$,则下列结论中正确的是(　　).

A. $\alpha>\beta$　　B. $\alpha+\beta>0$

C. $\alpha<\beta$　　D. $\alpha^2>\beta^2$

3. 已知 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$,满足 $f(x)+x\cdot f'(x)>0$,若 $a>b$,则(　　).

A. $af(b)>bf(a)$　　B. $bf(a)>af(b)$

C. $af(a)>bf(b)$　　D. $bf(b)>af(a)$

4. 设 $A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,且 $\sin A-\sin B=\sin C$,$\cos A-\cos B=-\cos C$,则 $A-B=$________.

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=t\cdot 5^n-2$,则实数 t 的值为________.

6. 正四面体的棱长为 2,四个顶点在同一个球面上,则该球的表面积为________.

7. 函数 $f(x)=6x^3+9x+1$ 满足 $f(a)+f(a-1)>2$,则实数 a 的取值范围是________.

8. 已知函数 $f(x)=\frac{3x-2}{2x-1}\left(x\neq\frac{1}{2}\right)$,则 $f\left(\frac{1}{2012}\right)+f\left(\frac{2}{2012}\right)+\cdots+f\left(\frac{2011}{2012}\right)$ 的值是________.

9. 不等式 $x^2-3>ax-a$ 对一切 $3\leqslant x\leqslant 4$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是________.

10. 已知 $0<x<1$,$0<y<1$,则 $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}$ 的最小值是______.

11. 已知 $\sin x+\cos x=a\left(-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{2}\right)$,则 $\sin^n x+\cos^n x=$________(关于 a 的表达式,$n\in\mathbf{N}^*$).

12. $\sin20^\circ\cos70^\circ+\sin10^\circ\sin50^\circ=$________.

13. 若 x,y 为实数,且 $4x^2+y^2+xy=1$,则 $2x+y$ 的最大值是________.

14. 圆 $x^2+y^2=1$ 的任意一条切线 l 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 两点,O 为坐标原点,则 $x_1x_2+y_1y_2=$________.

方法四　特例法

方法概述

所谓特例法,具体来说就是特殊情形:如使用特殊的数值、向量、点、数列、函数、位置、图形等来代替一般情形.利用一个问题在某一特殊情况下不真,则它在一般情况下也不真的原理,由此判明选项的真伪,从而达到快速解题的目的.用特例法解选择题,特例取得越简单、越特殊越好,同时,需要强调一点:利用特例法求解选择题的作用不是“选择”出正确选项,而是“排除”掉错误选项,即特例不成立时,一般性结论也不成立;但特例即便成立,一般性结论也不一定成立!即如果我们使用一次特例无法排除掉全部伪项,这就是要求我们选择更多、更好的特例再次加以排除,直到得到正确选项.

用特例法解填空题时,首先要深入分析题设条件,当填空题的结论唯一或题设中提供的信息暗示答案唯一时,就可以把题中变化的不定量用特殊量代替,即可以得出正确的结果.

典例精讲

典例一　特殊数列的应用举例

例 1 设 $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 为各项都大于零的等差数列,公差 $d\neq0$,则(　　).

A. $a_1a_8>a_4a_5$　　B. $a_1a_8<a_4a_5$

C. $a_1+a_8>a_4+a_5$　　D. $a_1a_8=a_4a_5$

【分析】本题用特殊数列法,代入各选项中逐一检验,直至正确选项出现.

【解析】依题意,可取 $a_1=1$,$a_2=2$,$\cdots$,$a_8=8$. $a_1a_8=8$,$a_4a_5=20$,所以 $a_1a_8<a_4a_5$.故选 B.

【评注】多思少算,特值判断.这里所谈到的特值不仅限于特殊值求解,其包括特殊值、特殊角度、特殊函数、特殊数列、特殊位置、特殊图形等.

变式 1 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d\neq0$,且 a_1,a_3,a_9 成等比数列,则 $\frac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}=$________.

典例二　特殊值的应用举例

例 2 若 $a>b>1$,$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$,$Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$,$R=\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$,则(　　).

A. $R<P<Q$　　B. $P<Q<R$

C. $Q<P<R$　　D. $P<R<Q$

【解析】由 $a>b>1$,不妨取 $a=100,b=10$,

则 $P=\sqrt{\lg100\cdot\lg10}=\sqrt{2}$,

$Q=\frac{1}{2}(\lg100+\lg10)=\frac{3}{2}$,

$R=\lg\frac{100+10}{2}>\lg\sqrt{100\times10}=\frac{3}{2}$. 故选 B.

变式 1　设 $a,b\in\mathbf{R}$,定义运算"∧"和"∨"如下:

$a\wedge b=\begin{cases}a,a\leqslant b\\b,a>b\end{cases}$,$a\vee b=\begin{cases}b,a\leqslant b\\a,a>b\end{cases}$,

若正数 a,b,c,d 满足 $ab\geqslant4,c+d\leqslant4$,则(　　).

A. $a\wedge b\geqslant2,c\wedge d\leqslant2$　　B. $a\wedge b\geqslant2,c\vee d\geqslant2$

C. $a\vee b\geqslant2,c\wedge d\leqslant2$　　D. $a\vee b\geqslant2,c\vee d\geqslant2$

例 3　若 $(2x-3)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$,则 $a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5=$(　　).

A. -10　　B. -5　　C. 5　　D. 10

【分析】挖掘已知与求解的目标式的关系. 给 x 赋特殊值处理.

【解析】$[(2x-3)^5]'=10(2x-3)^4=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4$,令 $x=1$ 得,$a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5=10$. 故选 D.

典例三　特殊图形的应用举例

例 4　$\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O,$AB=2$,$AC=\sqrt{3}$,则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=$________.

【解析】利用特殊图形. 若 $\triangle ABC$ 为直角三角形,且 $\angle C$ 为直角. O 为 AB 的中点,如图 1-17 所示,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$,所以 $\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{1}{2}$,故 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\times2\times1\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

【评注】本题若利用数量积的几何意义(向量投影)理解求解则更为简捷一些. 在直角 $\triangle ABC$ 中 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2=-\frac{1}{2}$.

下面利用上面的观点(向量投影)一般性求解本题,如图 1-18所示,在 $\triangle ABC$ 中,过点 O 作 $OD\perp AB$ 于点 D,过点 O 作 $OE\perp AC$ 于点 E.

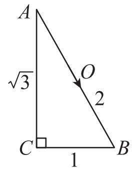


图 1-17

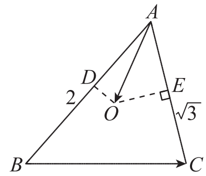


图 1-18

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\frac{(\sqrt{3})^2}{2}-\frac{2^2}{2}=-\frac{1}{2}$.

变式 1　如图 1-19 所示,O,A,B 是平面上三点,向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,在平面 AOB 上,P 是线段 AB 垂直平分线上任意一点,向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$,且 $|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=2$,则 $\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ 的值是(　　).

A. 5　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 3　　D. $\frac{3}{2}$

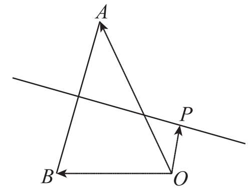


图 1-19

典例四　特殊位置的应用举例

例 5　如图 1-20 所示,在 $\triangle ABC$ 中,点 O 是 BC 的中点,过点 O 的直线分别交直线 AB,AC 于不同的两点 M,N,若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$,则 $m+n$ 的值为________.

【解析】用特值法. 当 M 点与 B 点重合,N 点与 C 点重合,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}$,且 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AN}$,则 $m+n=2$.

【评注】推演法. 连接 AO,如图 1-21 所示,$\overrightarrow{AO}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{m}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{n}{2}\overrightarrow{AN}$,又 M、O、N 三点共线,则 $\frac{m}{2}+\frac{n}{2}=1$,即 $m+n=2$.

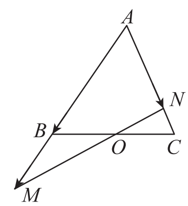


图 1-20

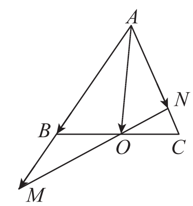


图 1-21

变式 1　设点 O 在 $\triangle ABC$ 内部,且有 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,则 $\triangle BOC$ 与 $\triangle AOC$ 和 $\triangle AOB$ 这三个三角形的面积比为________.

例 6　如图 1-22 所示,抛物线 C_1:$y^2=2px$ 和圆 C_2:$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\frac{p^2}{4}$,其中 $p>0$,直线 l 经过 C_1 的焦点,依次交 C_1,C_2 于 A,B,C,D 四点,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ 的值为(　　).

A. $\frac{p^2}{4}$　　B. $\frac{p^2}{3}$　　C. $\frac{p^2}{2}$　　D. p^2

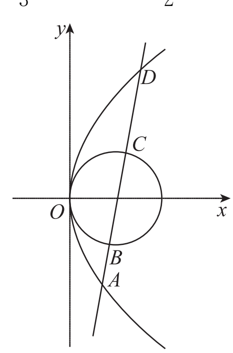


图 1-22

【分析】由选项知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ 的值为定值,故满足一般情形下的定值,亦即特殊位置下也为定值. 本题用特殊位置,即直线 l 垂直于 x 轴时进行计算而得到 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ 的值.

【解析】若直线 l 垂直于 x 轴，则 $A\left(\frac{p}{2},-p\right)$，$D\left(\frac{p}{2},p\right)$，$B\left(\frac{p}{2},-\frac{p}{2}\right)$，$C\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{AB}=\left(0,\frac{p}{2}\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(0,\frac{p}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{p^2}{4}$. 故选 A.

【评注】利用特殊位置求解更简洁，对巧解“秒杀”选择题，达到了事半功倍的效果. 另外本题中的特例使用还可以更加彻底，如取 $p=2$，同时使直线 l 垂直于 x 轴，则各个点的坐标及计算更为简洁，此时四个选项变为：

A. 1　　B. $\frac{4}{3}$　　C. 2　　D. 4

而 $A(1,-2)$，$B(1,-1)$，$C(1,1)$，$D(1,2)$，则 $\overrightarrow{AB}=(0,1)$，$\overrightarrow{CD}=(0,1)$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=1$. 故只能选 A.

变式 1　已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$M$，$N$ 是椭圆的左、右顶点，P 是椭圆上一动点，且直线 PM，PN 的斜率分别为 k_1，$k_2(k_1k_2\neq 0)$，则 $k_1k_2=$________.

强化训练

1. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数，则下列结论中恒成立的是（　　）.

A. $f(x)+|g(x)|$ 是偶函数　B. $f(x)-|g(x)|$ 是奇函数

C. $|f(x)|+g(x)$ 是偶函数　D. $|f(x)|-g(x)$ 是奇函数

2. 若 $0<a_1<a_2$，$0<b_1<b_2$，且 $a_1+a_2=b_1+b_2=1$，则下列代数式中值最大的是（　　）.

A. $a_1b_1+a_2b_2$　　B. $a_1a_2+b_1b_2$

C. $a_1b_2+a_2b_1$　　D. $\frac{1}{2}$

3. 如果对于任意实数 x，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例如 $[3.27]=3$，$[0.6]=0$，那么 $[x]=[y]$ 是 $|x-y|<1$ 的（　　）.

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 在 $\triangle ABC$ 中，C 为钝角，设 $\sin A+\sin B=m$，$\cos A+\cos B=n$，$\sin C=p$，则 m，n，p 的大小关系是（　　）.

A. $p<n<m$　　B. $n<p<m$

C. $p<m<n$　　D. $m<p<n$

5. 若等比数列的各项均为正数，前 n 项的和为 S，前 n 项的积为 P，前 n 项倒数的和为 M，则有（　　）.

A. $P=\frac{S}{M}$　　B. $P>\frac{S}{M}$

C. $P^2=\left(\frac{S}{M}\right)^n$　　D. $P^2>\left(\frac{S}{M}\right)^n$

6. 设整数 $n\geq 4$，集合 $X=\{1,2,3,\cdots,n\}$. 令集合 $S=\{(x,y,z)|x,y,z\in X$，且三条件 $x<y<z$，$y<z<x$，$z<x<y$ 恰有一个成立$\}$. 若 (x,y,z) 和 (z,ω,x) 都在 S 中，则下列选项中正确的是（　　）.

A. $(y,z,\omega)\in S$，$(x,y,\omega)\notin S$

B. $(y,z,\omega)\in S$，$(x,y,\omega)\in S$

C. $(y,z,\omega)\notin S$，$(x,y,\omega)\in S$

D. $(y,z,\omega)\notin S$，$(x,y,\omega)\notin S$

7. 已知事件“在矩形 $ABCD$ 的边 CD 上随机取一点 P，使 $\triangle APB$ 的最大边是 AB”发生的概率为 $\frac{1}{2}$，则 $\frac{AD}{AB}=$（　　）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

8. 设 $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$，若 $S=a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$，则 S 的值为（　　）.

A. 2^n　　B. 2^n+1　　C. $\frac{3^n-1}{2}$　　D. $\frac{3^n+1}{2}$

9. $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O，两条边上的高的交点为 H，$\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，则实数 m 的值为（　　）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 已知 A，B，C，D 是抛物线 $y^2=8x$ 上的点，F 是抛物线的焦点，且 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FD}=\mathbf{0}$，则 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|+|\overrightarrow{FD}|$ 的值为（　　）.

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 16

11. 在平面上，$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2}$，$|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{OB_2}|=1$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}$. 若 $|\overrightarrow{OP}|<\frac{1}{2}$，则 $|\overrightarrow{OA}|$ 的取值范围是（　　）.

A. $\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$　　B. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right]$

C. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}\right]$　　D. $\left(\frac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}\right]$

12. (1)若函数 $f(x)=\frac{1}{2^x-1}+a$ 是奇函数，则 $a=$________；

(2)若函数 $f(x)=\frac{1}{2^x+1}+a$ 是奇函数，则 $a=$________.

13. 已知函数 $f(x)=2\cos^2x+2a\sin x\cos x-1$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称，则 $a=$________.

14. 若 $\alpha\in\mathbf{R}$，$\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\alpha$ 的值等于________.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\sin A:\sin B:\sin C=5:6:8$，那么此三角形最小角的余弦值是________.

16. 已知 a，b，c 为等比数列，b，m，a 和 b，n，c 是两个等差数列，则 $\frac{a}{m}+\frac{c}{n}=$________.

17. 如果 $abc=1$，则 $\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ca+a+1}$ 的值是________.

18. 在三棱锥 $O-ABC$ 中，三条棱 OA，OB，OC 两两垂直，且 $OA>OB>OC$，分别经过三条棱 OA，OB，OC 作三个截面，使其平分三棱锥的体积，截面面积依次为 S_1，S_2，S_3，则 S_1，S_2，S_3 的大小关系为________.

19. 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 E，F 分别为 AB，AC 的中点，平面 EB_1C_1F 将三棱柱分成体积为 V_1，V_2 的两部分 $(V_1>V_2)$，那么 $V_1:V_2=$________.

20. 函数 $f(x)=M\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 在区间 $[a,b]$ 上是增函数，且 $f(a)=-M$，$f(b)=M$，则给出函数 $g(x)=M\cos(\omega x+\varphi)$ 在区间 $[a,b]$ 上的如下结论：① $g(x)$ 是增

函数；② $g(x)$ 是减函数；③ $g(x)$ 可以取得最大值 M；④ $g(x)$ 可以取得最小值 $-M$；⑤ $g(x)$ 的值域为 $[0,M]$.
其中正确结论的序号为________.

方法五　排除法

方法概述

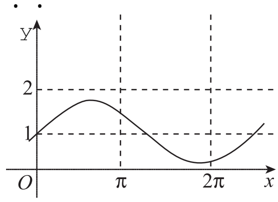
数学选择题的解题本质就是去伪存真，通过对试题的观察、分析，将各选项逐个代入题中进行验证，舍弃不符合题目要求的错误答案，找到符合题意的正确结论.

排除法就是充分运用选择题中单选题的特征——“答案唯一”，即四个选项中有且只有一个答案正确，从选项入手，根据题设条件与各选项的关系，通过分析、推理、计算、判断，对选项进行筛选，将其中与题设相矛盾的干扰项逐一排除，缩小选择的范围，再从其余的结论中求得正确的答案. 排除法的思维路径是：阅读—反射—估算—判断—排除.

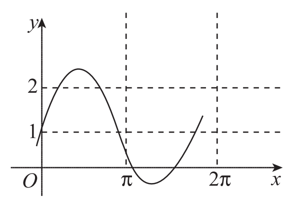
典例精讲

典例一　排除法在函数图像识别问题中的应用举例

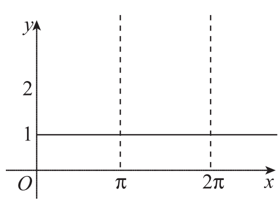
例 1　已知 a 是实数，则函数 $f(x)=1+a\sin ax$ 的图像不可能是(　　).



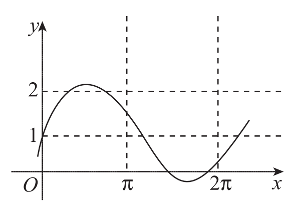
A.



B.



C.



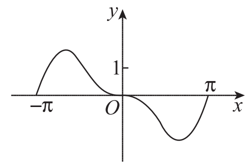
D.

【分析】本题需要我们根据题设逐一对答案进行分析. 因此，采用排除法最为合适.

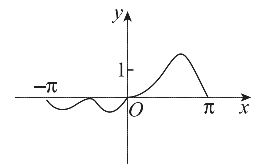
【解析】首先看最为特殊的 C 选项，易知当 $a=0$ 时，$y=1$，故排除选项 C；再看其余 3 个选项，它们之间最大的区别就是振幅与周期. 根据解析式可知，振幅为 $|a|$，周期为 $\frac{2\pi}{|a|}$，当 $|a|>1$ 时，$T<2\pi$，或当 $|a|<1$ 时，$T>2\pi$. 可排除选项 A，B. 故选 D.

【评注】根据解析式确定函数图像，解决此类问题的关键在于熟悉各类函数的图像及其性质.

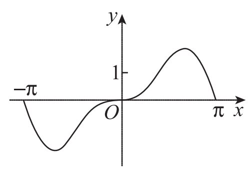
变式 1　函数 $f(x)=(1-\cos x)\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致为(　　).



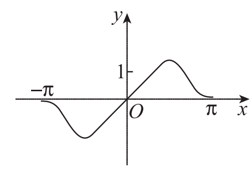
A.



B.



C.



D.

典例二　排除法在三角函数中的应用举例

例 2　已知函数 $f(x)=\sin x$，$x\in\left(0,\frac{5\pi}{2}\right)$，若方程 $f(x)=a$ 有三个不同的实数根，且三个根由小到大依次成等比数列，则 a 的值是(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

【分析】将各选项逐个代入题设中进行验证.

【解析】对于选项 A，将 $a=\frac{1}{2}$ 代入 $f(x)=a$ 中得 $x_1=\frac{\pi}{6}$，$x_2=\frac{5\pi}{6}$，$x_3=\frac{13\pi}{6}$，不满足 $x_2^2=x_1x_3$，故排除选项 A；

对于选项 B，将 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 代入 $f(x)=a$ 中得 $x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$，$x_3=\frac{9\pi}{4}$，即 $x_2^2=x_1x_3$，满足三个根 x_1,x_2,x_3 成等比数列；

对于选项 C，将 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 代入 $f(x)=a$ 中得 $x_1=\frac{\pi}{3}$，$x_2=\frac{2\pi}{3}$，$x_3=\frac{7\pi}{3}$，不满足 $x_2^2=x_1x_3$，故排除选项 C；

对于选项 D，将 $a=1$ 代入 $f(x)=a$ 中得 $x=\frac{\pi}{2}$，在区间 $\left(0,\frac{5\pi}{2}\right)$ 上只有一解不满足有三个不同的实数根，故排除选项 D. 故选 B.

【评注】函数 $f(x)=\sin x$，$x\in\left(0,\frac{5\pi}{2}\right)$，如图 1-23 所示，因为 $\alpha,\pi-\alpha,2\pi+\alpha$ 成等比数列(其中 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$)，所以 $(\pi-\alpha)^2=\alpha(2\pi+\alpha)$，解得 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，所以 $a=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

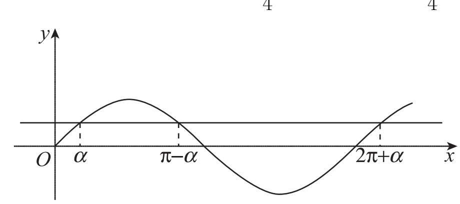


图 1-23

变式 1　若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\tan\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\alpha\in$(　　).

A. $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$　B. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$　C. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$　D. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

典例三 排除法在平面向量问题中的应用举例

例 3 设 A_1,A_2,A_3,A_4 是平面直角坐标系中两两不同的四点，若 $\overrightarrow{A_1A_3}=\lambda\overrightarrow{A_1A_2}(\lambda\in\mathbf{R})$，$\overrightarrow{A_1A_4}=\mu\overrightarrow{A_1A_2}(\mu\in\mathbf{R})$，且 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2$，则称 A_3,A_4 调和分割 A_1,A_2. 已知平面上的点 C,D 调和分割 A,B，则下面说法中正确的是（　　）.

A. C 可能是线段 AB 的中点

B. D 可能是线段 AB 的中点

C. C,D 可能同时在线段 AB 上

D. C,D 不可能同时在线段 AB 的延长线上

【分析】将各选项逐个代入进行验证.

【解析】依题意，若 C,D 调和分割 A,B，则有 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}=\mu\overrightarrow{AB}$，且 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2$，若 C 是线段 AB 的中点，则有 $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，此时 $\lambda=\frac{1}{2}$，又 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2$，所以 $\frac{1}{\mu}=0$，不可能成立，排除 A；同理可排除选项 B.

对于选项 C，当 C,D 同时在线段 AB 上时，$0<\lambda<1$，$0<\mu<1$，$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}>2$ 与条件 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2$ 矛盾，因此选项 C 不正确，故排除 C. 故选 D.

【评注】若 C,D 同时在线段 AB 的延长线上时，$\lambda>1$，$\mu>1$，$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}<2$ 与已知条件 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2$ 相矛盾，故 C,D 不可能同时在线段 AB 的延长线上.

典例四 排除法在立体几何问题中的应用举例

例 4 如图 1-24 所示，在多面体 $ABCDEF$ 中，$ABCD$ 是边长为 3 的正方形，$EF\parallel AB$，$EF=\frac{3}{2}$，EF 与面 AC 的距离为 2，则该多面体的体积是（　　）.

A. $\frac{9}{2}$　　B. 5　　C. 6　　D. $\frac{15}{2}$

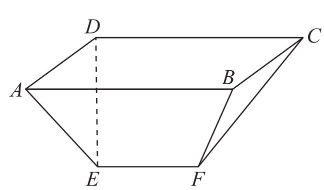


图 1-24

【分析】本题采用排除法求解.

【解析】计算 $V_{F-ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{四边形ABCD}\cdot d(EF,面AC)=\frac{1}{3}\times3^2\times2=6$，$V_{多面体ABCDEF}>V_{F-ABCD}=6$. 观察 A，B，C，D 四个选项，只有选项 D 满足大于 6. 故选 D.

变式 1 如图 1-25 所示，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，P 为 BC 的中点，Q 为线段 CC_1 上的动点，过点 A，P，Q 的平面截该正方体所得的截面记为 S. 则下列命题中正确的是________（写出所有正确命题的序号）.

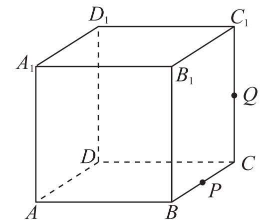


图 1-25

①当 $0<CQ<\frac{1}{2}$ 时，S 为四边形；

②当 $CQ=\frac{1}{2}$ 时，S 为等腰梯形；

③当 $CQ=\frac{3}{4}$ 时，S 与 C_1D_1 的交点 R 满足 $C_1R=\frac{1}{3}$；

④当 $\frac{3}{4}<CQ<1$ 时，S 为六边形；

⑤当 $CQ=1$ 时，S 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

典例五 排除法在函数问题中的应用举例

例 5 某校召开学生代表大会，规定各班：每 10 人推选一名代表，当各班人数除以 10 的余数大于 6 时，再增选一名代表，各班可推选的代表人数 y 与该班的人数 x 之间的函数关系用取整函数 $y=[x]$（$[x]$表示不大于 x 的最大整数）可以表示为（　　）.

A. $y=\left[\frac{x}{10}\right]$　　B. $y=\left[\frac{x+3}{10}\right]$

C. $y=\left[\frac{x+4}{10}\right]$　　D. $y=\left[\frac{x+5}{10}\right]$

【解析】记 $y=f(x)$，则 $f(36)=3$，$f(37)=4$，由 $f(36)=3$，排除 C，D；再由 $f(37)=4$，排除 A. 故选 B.

【评注】本题解法也可理解为特例法.

变式 1 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, & x\leqslant0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$，若 $|f(x)|\geqslant ax$，则 a 的取值范围是（　　）.

A. $(-\infty,0]$　　B. $(-\infty,1]$

C. $[-2,1]$　　D. $[-2,0]$

强化训练

1. 下列函数中，既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的函数是（　　）.

A. $y=x^3$　　B. $y=|x|+1$

C. $y=-x^2+1$　　D. $y=2^{-|x|}$

2. 给出下列三个等式：$f(xy)=f(x)+f(y)$，$f(x+y)=f(x)f(y)$，$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$. 下列函数中不满足其中任何一个等式的是（　　）.

A. $f(x)=3^x$　　B. $f(x)=\sin x$

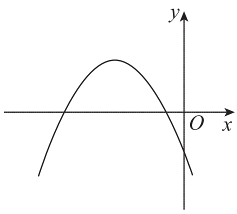
C. $f(x)=\log_2 x$　　D. $f(x)=\tan x$

3. 对于函数 $f(x)=a\sin x+bx+c$（其中 $a,b\in\mathbf{R}$，$c\in\mathbf{Z}$），选取 a,b,c 的一组值计算 $f(1)$ 和 $f(-1)$，所得出的正确结果不可能是（　　）.

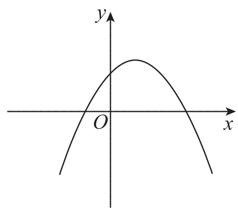
A. 4 和 6　　B. 3 和 1

C. 2 和 4　　D. 1 和 2

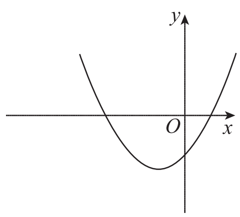
4. 设 $abc>0$,二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像可能是(　　).



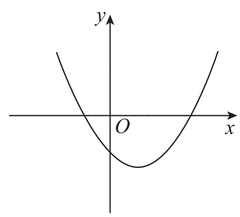
A.



B.



C.



D.

5. 设$[x]$表示不大于 x 的最大整数,则对任意实数 x,有(　　).

A. $[-x]=-[x]$　　B. $\left[x+\dfrac{1}{2}\right]=[x]$

C. $[2x]=2[x]$　　D. $[x]+\left[x+\dfrac{1}{2}\right]=[2x]$

6. 已知抛物线 C:$y=x^2+mx+2$ 与经过 $A(0,1)$,$B(2,3)$两点的线段 AB 有公共点,则 m 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$　　B. $[3,+\infty)$

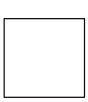
C. $(-\infty,-1]$　　D. $[-1,3]$

7. 函数 $y=\sqrt{x-4}+\sqrt{15-3x}$的值域是(　　).

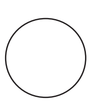
A. $[1,2]$　　B. $[0,2]$

C. $(0,\sqrt{3}]$　　D. $[1,\sqrt{3}]$

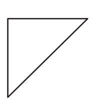
8. 某几何体的正视图与侧视图都是边长为 1 的正方形,且体积为$\dfrac{1}{2}$,则该几何体的俯视图可以是(　　).



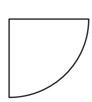
A.



B.



C.



D.

9. 如图 1-26 所示,平面 $\alpha\perp$平面 β,$\alpha\cap\beta=l$,A 和 C 是 α 内不同的两点,B 和 D 是 β 内不同的两点,且 $A,B,C,D\notin l$,M,N 分别是线段 AB 和 CD 的中点,下列判断中正确的是(　　).

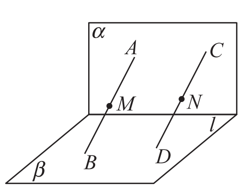


图 1-26

A. 当$|CD|=2|AB|$时,M 和 N 两点不可能重合

B. M 和 N 两点可能重合,但此时直线 AC 与 l 不可能相交

C. 当 AB 和 CD 相交,直线 AC 平行于 l 时,直线 BD 可以与 l 相交

D. 当 AB 和 CD 是异面直线时,直线 MN 可能与 l 平行

10. 若直线 $y=kx+2$ 与双曲线 $x^2-y^2=6$ 的右支交于不同的两点,则 k 的取值范围是(　　).

A. $\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{3},\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)$　　B. $\left(0,\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)$

C. $\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{3},0\right)$　　D. $\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{3},-1\right)$

11. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点,作直线与此抛物线相交于两点 P 和 Q,那么线段 PQ 中点的轨迹方程是(　　).

A. $y^2=2x-1$　　B. $y^2=2x-2$

C. $y^2=-2x+1$　　D. $y^2=-2x+2$

12. 如图 1-27 所示,虚线部分是四个象限的角平分线,实线部分是函数 $y=f(x)$的部分图像,则 $f(x)$可能是(　　).

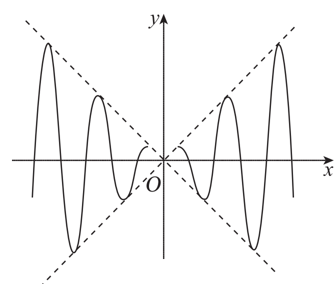


图 1-27

A. $x\sin x$　　B. $x\cos x$　　C. $x^2\cos x$　　D. $x^2\sin x$

13. 已知函数 $f(x)=2mx^2-2(4-m)x+1$,$g(x)=mx$,若对于任意实数 x,$f(x)$与 $g(x)$至少有一个为正数,则实数 m 的取值范围是(　　).

A. $(0,2)$　　B. $(0,8)$　　C. $(2,8)$　　D. $(-\infty,0)$

14. 已知函数的图像如图 1-28 所示,则其函数解析式可能是(　　).

A. $f(x)=x^2+\ln|x|$　　B. $f(x)=x^2-\ln|x|$

C. $f(x)=x+\ln|x|$　　D. $f(x)=x-\ln|x|$

15. 如图 1-29 所示,当参数 λ 分别取 λ_1,λ_2 时,连续函数 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+\lambda x}}(x\geqslant0)$的图像分别对应曲线 C_1 和 C_2,则(　　).

A. $0<\lambda_1<\lambda_2$　　B. $0<\lambda_2<\lambda_1$

C. $\lambda_1<\lambda_2<0$　　D. $\lambda_2<\lambda_1<0$

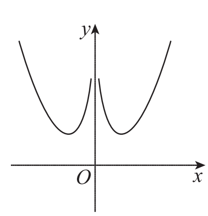


图 1-28

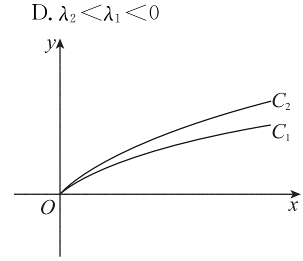


图 1-29

16. 在下列四个函数中,满足性质:“对于区间(1,2)上的任意 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$,$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$恒成立”的只有(　　).

A. $f(x)=\dfrac{1}{x}$　　B. $f(x)=|x|$

C. $f(x)=2^x$　　D. $f(x)=x^2$

17. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，则下列结论中错误的是(　　).

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$f(x_0)=0$

B. 函数 $y=f(x)$ 的图像是中心对称图形

C. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 单调递减

D. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=0$

18. 已知 e 为自然对数的底数，设函数 $f(x)=(e^x-1)(x-1)^k(k=1,2)$，则(　　).

A. 当 $k=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值

B. 当 $k=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值

C. 当 $k=2$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值

D. 当 $k=2$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值

19. 若长度为定值的线段 AB 的两端点分别在 x 轴正半轴和 y 轴正半轴上移动，O 为坐标原点，则 $\triangle OAB$ 的重心、内心、外心、垂心的轨迹不可能是(　　).

A. 点　　B. 线段

C. 圆弧　　D. 抛物线的一部分

20. 已知点 $P(3,-4)$ 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 渐近线上的一点，E,F 是双曲线 C 的左、右两个焦点，若 $\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{FP}=0$，则双曲线方程为(　　).

A. $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$

C. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

21. 已知两点 $M\left(1,\dfrac{5}{4}\right)$，$N\left(-4,-\dfrac{5}{4}\right)$，给出下列曲线方程：①$4x+2y-1=0$；②$x^2+y^2=3$；③$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$；④$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$. 在曲线上存在点 P 满足 $|MP|=|NP|$ 的所有曲线方程是(　　).

A. ①③　　B. ②④

C. ①②③　　D. ②③④

22. 设 z 是复数，则下列命题中的假命题是(　　).

A. 若 $z^2\geqslant 0$，则 z 是实数　　B. 若 $z^2<0$，则 z 是虚数

C. 若 z 是虚数，则 $z^2\geqslant 0$　　D. 若 z 是纯虚数，则 $z^2<0$

23. 设 a,b,c 为实数，$f(x)=(x+a)(x^2+bx+c)$，$g(x)=(ax+1)(cx^2+bx+1)$. 记集合 $S=\{x\mid f(x)=0,x\in\mathbf{R}\}$，$T=\{x\mid g(x)=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $|S|$，$|T|$ 分别为集合 S,T 的元素个数，则下列结论中不可能成立的是(　　).

A. $|S|=1$ 且 $|T|=0$　　B. $|S|=1$ 且 $|T|=1$

C. $|S|=2$ 且 $|T|=2$　　D. $|S|=2$ 且 $|T|=3$

方法六　信息迁移法

方法概述

所谓“信息迁移法”，是根据题目给出的信息(可能是已经学过的知识，也可能是没有学过的知识)，联系教科书中的基本原理或方法，通过分析、转化，概括出两者之间在本质上存在的共同因素，进行知识的迁移，从而使问题得以解决的一种解题方法.

典例精讲

典例一　信息迁移法在映射创新题中的应用举例

例 1　设 V 是全体平面向量构成的集合，若映射 $f:V\to\mathbf{R}$ 满足：对任意向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)\in V$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)\in V$，以及任意 $\lambda\in\mathbf{R}$，均有 $f(\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b})=\lambda f(\boldsymbol{a})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{b})$ 则称映射 f 具有性质 P.

先给出如下映射：

①$f_1:V\to\mathbf{R}$，$f_1(\boldsymbol{m})=x-y$，$\boldsymbol{m}=(x,y)\in V$；

②$f_2:V\to\mathbf{R}$，$f_2(\boldsymbol{m})=x^2+y$，$\boldsymbol{m}=(x,y)\in V$；

③$f_3:V\to\mathbf{R}$，$f_3(\boldsymbol{m})=x+y+1$，$\boldsymbol{m}=(x,y)\in V$.

其中，具有性质 P 的映射的序号为________.(写出所有具有性质 P 的映射的序号)

【解析】①：$f_1(\boldsymbol{m})=x-y$，$f_1(\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b})$

$=f_1(\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2))$

$=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)$

$=\lambda(x_1-y_1)+(1-\lambda)(x_2-y_2)$

$=\lambda f(\boldsymbol{a})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{b})$，具有性质 P 的映射.

同理③：$f_3(\boldsymbol{m})=x+y+1$，$f_3(\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b})$

$=f_3(\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2))$

$=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)$

$=\lambda(x_1+y_1)+(1-\lambda)(x_2+y_2)+1$

$=\lambda(x_1+y_1+1)+(1-\lambda)(x_2+y_2+1)$

$=\lambda f(\boldsymbol{a})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{b})$，具有性质 P 的映射. ②不符合.

故具有性质 P 的映射序号为①③.

【评注】本题所给的新概念为“具有性质 P”，也就是判断是否满足条件 $f(\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b})=\lambda f(\boldsymbol{a})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{b})$，代入 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 坐标进行验证即可.

变式 1　设 S,T 是 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集，如果存在一个从 S 到 T 的函数 $y=f(x)$ 满足：

(i) $T=\{f(x)\mid x\in S\}$；

(ii) 对任意 $x_1,x_2\in S$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，

那么称这两个集合“保序同构”，现给出以下三对集合：

①$A=\mathbf{N}$，$B=\mathbf{N}^*$；

②$A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid -8\leqslant x\leqslant 10\}$；

③$A=\{x\mid 0<x<1\}$，$B=\mathbf{R}$.

其中，“保序同构”的集合对的序号是________.(写出“保序同构”的集合对的序号)

变式 2　给定集合 $A_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$，映射 $f:A_n\to A_n$ 满足：当 $i,j\in A_n$，$i\neq j$ 时，$f(i)\neq f(j)$；任取 $m\in A_n$，若 $m\geqslant 2$，则有 $m\in\{f(1),f(2),\cdots,f(m)\}$，则称映射 $f:A_n\to A_n$ 是一个“优映射”，例如，用表 1-1 表示的映射 $f:A_3\to A_3$ 是一个“优映射”.

表 1-1

i	1	2	3
$f(i)$	2	3	1

(1)已知表 1-2 表示的映射 $f:A_4\to A_4$ 是一个“优映射”，请把表 1-2 补充完整(只需填出一个满足条件的映射)：

表 1-2

i	1	2	3	4
$f(i)$		3		

(2)若映射 $f:A_{10}\to A_{10}$ 是“优映射”，且方程 $f(i)=i$ 的解恰有 6 个，则这样的“优映射”的个数是________.

典例二　信息迁移法在平面向量创新题中的应用举例

例 2　给定模长为 1 的平面向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$，它们的夹角为 $120°$. 如图 1-30 所示，点 C 在以 O 为圆心的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上，若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中 $x,y\in\mathbf{R}$，则 $x+y$ 的最大值是________.

【解析】如图 1-31 所示，连接 AB 交 OC 于点 D，由 A,B,D 三点共线，则 $\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$，且 $0<\lambda<1$. 设 $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OD}$，故 $\overrightarrow{OC}=k[\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}]=\lambda k\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)k\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 $x+y=k$，要求 $x+y$ 的最大值，即求 k 的最大值. $k=\dfrac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OD}|}=\dfrac{1}{|\overrightarrow{OD}|}$，当 $OC\perp AB$ 时，$|\overrightarrow{OD}|_{\min}=\dfrac{|\overrightarrow{OA}|}{2}=\dfrac{1}{2}$，故 $k_{\max}=2$，因此 $x+y$ 的最大值为 2.

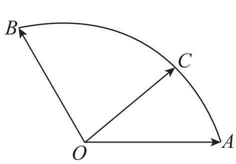


图 1-30

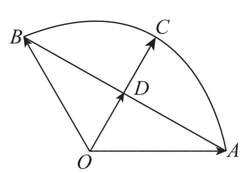


图 1-31

变式 1　已知在扇形 AOB，$\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角是 $60°$，点 C 为弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上一动点，且满足 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中 $x,y\in\mathbf{R}$，如图 1-32 所示，则 $x+3y$ 的取值范围是________.

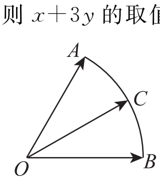


图 1-32

典例三　信息迁移法在函数创新题中的应用举例

例 3　$f(x)$ 与 $g(x)$ 是定义在同一区间 $[a,b]$ 上的两个函数，若对 $x\in[a,b]$，都有 $|f(x)-g(x)|\leqslant 1$，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是“密切函数”，$[a,b]$ 称为“密切区间”，设 $f(x)=x^2-3x+4$ 与 $g(x)=2x-3$ 在 $[a,b]$ 上是“密切函数”，则它的“密切区间”可以是(　　).

A. $[1,4]$　　B. $[2,4]$

C. $[3,4]$　　D. $[2,3]$

【解析】令 $F(x)=f(x)-g(x)=x^2-5x+7$，则抛物线 $y=F(x)$ 的对称轴为 $x=\dfrac{5}{2}$，如图 1-33 所示，易知 $F\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$，$F(1)=3$，$F(2)=1$，$F(3)=1$，$F(4)=3$，结合“密切函数”的定义知选项 D 正确. 故选 D.

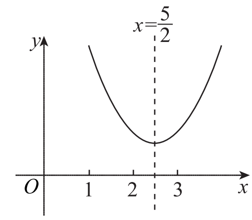


图 1-33

变式 1　若以曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $M(x,y)$ 为切点作切线 l，曲线上总存在异于 M 的点 $N(x_1,y_1)$，以点 N 为切点作切线 l_1，且 $l/\!/l_1$，则称曲线 $y=f(x)$ 具有“可平行性”，下列曲线具有“可平行性”的序号为________.

①$y=x^3-x$；　　②$y=x+\dfrac{1}{x}$；

③$y=\sin x$；　　④$y=(x-2)^2+\ln x$.

典例四　信息迁移法在解析几何创新题中的应用举例

例 4　已知点 $A(0,2)$，$B(2,0)$，若点 C 在函数 $y=x^2$ 的图像上，则使得 $\triangle ABC$ 的面积为 2 的点 C 的个数为(　　).

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

【解析】假设存在符合题意的点 C，过 C 作 AB 的平行线 l，因为 $k_{AB}=-1$，设 $l:y=-x+m$，又 $l_{AB}:y=-x+2$，则 $d=\dfrac{|m-2|}{\sqrt{2}}$，又 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=2$，所以 $d=\sqrt{2}$，故 $|m-2|=2$，解得 $m=0$ 或 $m=4$，如图 1-34 所示，易知 $l:y=-x$ 与 $y=-x+4$ 分别与抛物线 $y=x^2$ 各有两个交点. 综上，$y=x^2$ 上有 4 个点 C 使得 $\triangle ABC$ 的面积为 2. 故选 A.

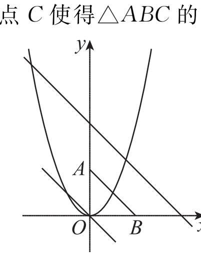


图 1-34

变式 1　已知抛物线 $W:y^2=x$ 及直线 $m:y=x-4$，矩形 $ABCD$ 的顶点 A,B 在 m 上，CD 在 W 上，经过 CD 的直线记为 l，给出下列四个命题：

①$\exists S>0$，使矩形 $ABCD$ 的面积为 S 的直线 l 不存在；

②$\exists S>0$，使矩形 $ABCD$ 的面积为 S 的直线 l 仅有一条；

③$\exists S>0$，使矩形 $ABCD$ 的面积为 S 的直线 l 仅有两条；

④$\exists S>0$，使矩形 $ABCD$ 的面积为 S 的直线 l 仅有三条；

其中所有真命题的序号是(　　).

A. ①②④　　B. ②③

C. ③④　　D. ②③④

例 5　已知直线 $l:y=ax+1-a(a\in\mathbf{R})$，若存在实数 a 使得一条曲线与直线 l 有两个不同的交点且以这两个交点为端点的线段的长度恰好等于 $|a|$，则称此曲线为直线 l

的“绝对曲线”，下面给出的3条曲线方程：

①$y=-2|x-1|$；②$(x-1)^2+(y-1)^2=1$；③$x^2+3y^2=4$. 其中直线 l 的“绝对曲线”有________(写出所有“绝对曲线”的序号).

【解析】因为 $l:y=ax+1-a$，即 $y-1=a(x-1)$，所以直线 l 过定点 $P(1,1)$，斜率为 a，设 l 与曲线 C 相交于点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则由“绝对曲线”的定义可知 $|AB|=|a|$.

对于①，如图1-35(1)所示，则 l 与 $y=-2|x-1|$ 不可能有两个公共点，故①不是 l 的“绝对曲线”；

对于②，如图1-35(2)所示，l 为过圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的圆心的直线，易知 $|AB|=2$，所以当 $a=2$ 或 -2 时，$|AB|=|a|$. 故②是 l 的“绝对曲线”；

对于③，如图1-35(3)所示，易知 P 在椭圆 $x^2+3y^2=4$ 上，易计算当 $a\neq-\frac{1}{3}$ 时，直线 l 与椭圆相交，且弦长 $|AB|$ 有最大值，例如，当 l 从切线逆时针旋转到水平位置时，$|a|$ 从 $\frac{1}{3}$ 减小到0，同时 $|AB|$ 从0增大到2，由实数的连续性知一定存在实数 a 使得 $|AB|=|a|$. 即③是 l 的“绝对曲线”. 综上，②③均为 l 的“绝对曲线”.

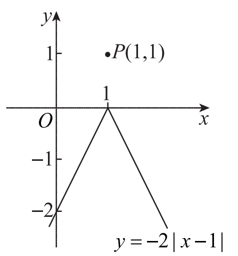


图 1-35(1)

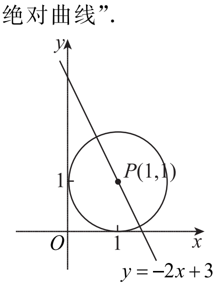


图 1-35(2)

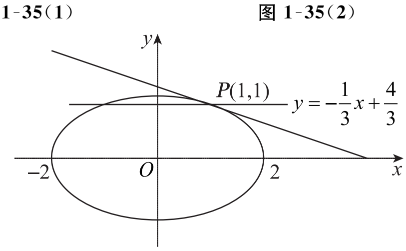


图 1-35(3)

强化训练

1. 如图1-36所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为对角线 BD_1 的三等分点，P 到各顶点的距离的不同取值有(　　).

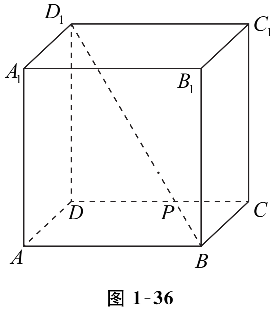


图 1-36

A. 3个　　B. 4个　　C. 5个　　D. 6个

2. 给出下列命题：

①若 $\sin\alpha-\tan\alpha>0$，则 α 是第二或第四象限角；

②平面直角坐标系中有三个点 $A(4,5)$，$B(-2,2)$，$C(2,0)$，则 $\tan\angle ABC=\frac{4}{3}$；

③若 $a>1$，$b>1$ 且 $\lg(a+b)=\lg a+\lg b$，则 $\lg(a-1)+\lg(b-1)$ 的值为1；

④设 $[m]$ 表示不大于 m 的最大整数，若 $x,y\in(0,+\infty)$，那么 $[x+y]\geqslant[x]+[y]$.

其中，所有正确命题的序号是________.

3. 已知定义域为 $(0,+\infty)$ 的函数 $f(x)$ 满足：

(i)对任意 $x\in(0,+\infty)$，恒有 $f(2x)=2f(x)$ 成立；

(ii)当 $x\in(1,2]$ 时，$f(x)=2-x$.

给出如下结论：

①对任意 $m\in\mathbf{Z}$，有 $f(2^m)=0$；

②函数 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$；

③存在 $n\in\mathbf{Z}$，使得 $f(2^n+1)=9$；

④“函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递减”的充要条件是“存在 $k\in\mathbf{Z}$，使得 $(a,b)\subseteq(2^k,2^{k+1})$”.

所有正确结论的序号是________.

4. 设非空集合 $S=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 满足：当 $x\in S$ 时，有 $x^2\in S$. 给出如下命题：

①若 $a=1$，则 $S=\{1\}$；　　②若 $a=-\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{4}\leqslant b\leqslant1$；

③若 $b=\frac{1}{2}$，则 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant0$.

其中正确的命题序号是________.

5. 若两个函数的图像经过若干次平移后能够重合，则称这两个函数为“同形”函数，给出下列三个函数：

①$f_1(x)=\sin x+\cos x$；　　②$f_2(x)=\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}$；

③$f_3(x)=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$.

则其中与函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin x$ 为“同形”函数的是________(填写所有正确结论的序号).

6. 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，若对任意的 $x\in[a,b]$，总有 $\left|1-\frac{g(x)}{f(x)}\right|\leqslant\frac{1}{10}$，则称 $f(x)$ 可被 $g(x)$“置换”. 下列函数中，能置换函数 $f(x)=\sqrt{x}$，$x\in[4,16]$ 的有________.

①$g(x)=\frac{1}{5}(x+6)$，$x\in[4,16]$；

②$g(x)=x^2+6$，$x\in[4,16]$；

③$g(x)=x+6$，$x\in[4,16]$；

④$g(x)=2x+6$，$x\in[4,16]$.

7. 如果对任意一个三角形，只要它的三边长 a,b,c 都在函数 $f(x)$ 的定义域内，就有 $f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 也是某个三角形的三边长，则称 $f(x)$ 为“保三角形函数”. 则下列函数是“保三角形函数”的有________.

①$f(x)=2x$；②$f(x)=\sqrt{x}$；③$f(x)=x^2$；

④$f(x)=\sin x(x\in(0,\pi))$.

8. 记函数 $[x]$ 叫做取整函数(也称高斯函数)，表示不超过 x 的最大整数，例如 $[2]=2$，$[3.3]=3$，$[-2.4]=-3$，设函

数 $f(x)=\frac{2^x}{2^x+1}-\frac{1}{2}$，则函数 $y=[f(x)]+[f(-x)]$ 的值域为________.

9. 给出定义：若 $m-\frac{1}{2}<x\leqslant m+\frac{1}{2}$（其中 m 为整数），则 m 叫做离实数 x 最近的整数，记作 $\{x\}$，即 $\{x\}=m$. 在此基础上给出下列关于函数 $f(x)=|x-\{x\}|$ 的四个命题：

①$y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域是 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$；

②$y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{k}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 对称；

③函数 $y=f(x)$ 是周期函数，最小正周期是 1；

④函数 $y=f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上是增函数.

则其中真命题是________.

10. 当 a_0,a_1,a_2 成等差数列时，有 $a_0-2a_1+a_2=0$；当 a_0,a_1,a_2,a_3 成等差数列时，有________；探索当 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 成等差数列时相应的关系式为________.

11. 在平面直角坐标系中，定义 $d_{(P,Q)}=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ 为两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 之间的"折线距离"，则坐标原点 O 与直线 $2x+y-2\sqrt{5}=0$ 上一点的"折线距离"的最小值是________；圆 $x^2+y^2=1$ 上一点与直线 $2x+y-2\sqrt{5}=0$ 上一点的"折线距离"的最小值是________.

12. 已知函数 $f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$，则 $f(0)+f(1)=$________，若 $S_{k-1}=f\left(\frac{1}{k}\right)+f\left(\frac{2}{k}\right)+\cdots+f\left(\frac{k-1}{k}\right)(k\geqslant 2,k\in\mathbf{Z})$，则 $S_{k-1}=$________.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数，对于 $n=1,2,3,\cdots$，有

$$a_{n+1}=\begin{cases}3a_n+5, & a_n\text{ 为奇数}\\ \frac{a_n}{2^k}, & a_n\text{ 为偶数（}k\text{ 为使 }a_{n+1}\text{ 为奇数的正整数）}\end{cases}.$$

①当 $a_1=11$ 时，$a_{100}=$________；

②若存在 $m\in\mathbf{N}^*$，当 $n>m$ 且 a_n 为奇数时，a_n 恒为常数 p，则 p 的值为________.

14. 若函数 $f(x)=-x\cdot e^x$，则下面命题中正确的是________.

① $\forall a\in\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$，$\exists x\in\mathbf{R}$，$f(x)>a$；

② $\forall a\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$，$\exists x\in\mathbf{R}$，$f(x)>a$；

③ $\forall x\in\mathbf{R}$，$\exists a\in\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$，$f(x)>a$；

④ $\forall x\in\mathbf{R}$，$\exists a\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$，$f(x)>a$.

15. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，$|\overrightarrow{AB}|=16$，$|\overrightarrow{AC}|=10\sqrt{2}$，若 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，且 $32x+25y=25$，则 $|\overrightarrow{AO}|=$______.