第 1 讲　行列式的计算

一、知识要点

1. 行列式的定义

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

一般地，称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

为 n 阶行列式. 其中 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 表示由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 构成的全排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

注　n 阶行列式表示一个数，它是取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，共 $n!$ 项.

2. 行列式的性质

性质 1　行列式的行列互换，其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

等式右边的行列式称为左边行列式 D 的转置，记作 D^{T}. 所以 $D^{\mathrm{T}} = D$.

性质 2　行列式的某两行（列）元素成比例，则行列式为零.

性质 3　如果行列式中有一行（列）的每个元素都是两个数的和，则行列式可拆成两个行列式的和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 4 行列式的两行（列）互换，行列式变号.

性质 5 如果行列式中某行（列）的元素有公因子，则可将公因子提到行列式外. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 行列式中某一行（列）元素的 k 倍加到另一行（列），其值不变.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. 行列式的展开定理

(1) 余子式，代数余子式

在 n 阶行列式中，将元素 a_{ij} 所在的行与列上的元素划去，其余元素按照原来的相对位置构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij} . $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

注 M_{ij} 及 A_{ij} 只与元素所在的位置有关，与元素本身的值无关.

(2) 行列式按行（列）展开定理

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases} \quad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n\ ;$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases} \quad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n\ .$$

即 n 阶行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，n 阶行列式的任一行（列）的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

4. 方阵的行列式的性质

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则有

(1) $\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right| = |\boldsymbol{A}|$（$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置，即 $\boldsymbol{A}$ 的行列互换）;

(2) $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^{n} |\boldsymbol{A}|$（$\lambda$ 为常数）;

(3) $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ (其中 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵);

(4) $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$（其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆）;

(5) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$,

$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = (-1)^{m\times n} |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ (其中 $\boldsymbol{B}$ 为 m 阶方阵);

(6) $\left|\boldsymbol{A}^{*}\right| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$（其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵）;

(7) $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$（其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值）.

5. 几个特殊的行列式

(1) 上（下）三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}\ .$$

(2) n 阶范德蒙德行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j)\ .$$

二、典型例题解析

题型一　求数字型（尤其是含参数）行列式的值

例 1.1　求行列式

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

分析　行列式的每一行（列）元素的和相等，即行列式的行（列）和相等，行和相等的行列式就可以把其余列都加到第 1 列，第 1 列各元素就有公因子，可以提出去，再将其余行都减去第 1 行就可以化为上三角形行列式或降阶，达到简化的目的. 对于列和相等的行列式也可以用类似方法处理.

解
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 3-\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2(3-\lambda).$$

例 1.2　求行列式

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

分析　此行列式的行和与列和均不相等，可把某一行（列）中不含 λ 的两个元素之一化为 0，则此零元素所在行（列）往往会出现公因式，再按行列式性质化零后展开降阶计算即可.

解
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_2} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 1-\lambda \\ -2 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_3} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 4 & 9-\lambda & 0 \\ -2 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

例 1.3　求行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}.$$

分析　行和与列和均不相等，但第 1 行（列）中不含 λ 的两个元素之一为 0，可直接按对角线方法计算.

解 $$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda-1)-4(\lambda-1)-4(\lambda+1) = \lambda(\lambda+3)(\lambda-3).$$

说明　这种类型的行列式计算，在线性代数的考研题中一般不直接出现，但在求方阵的特征值时，需要计算这种行列式（特征多项式），由于需要对求出的行列式求根，所以最好不要直接按对角线展开，这样往往会使分解因式变得困难，在计算时，可根据行列式的特点，利用行列式的性质，先分解出关于 λ 的一次因式，从而使求根变得容易.

例 1.4　设

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix},$$

则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为 (　　).

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

分析　判断方程 $f(x)=0$ 的根的个数，只需判断 $f(x)$ 是几次多项式即可.

不要错误地以为这样的 $f(x)$ 就是 4 次多项式，实际上，在 $f(x)$ 的展开式中，有 x 的 0 到 4 次项的多项式，但合并化简后，$f(x)$ 的次数可能会降低.

由于行列式的每一位置都含有 x，直接展开计算是很复杂的，应当先恒等变形消除一些 x 再计算.

解　用第 2,3,4 列分别减去第 1 列，再用第 4 列加上第 2 列，有

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix},$$

易见 $f(x)$ 是 2 次多项式，所以选（B）.

题型二 *n* 阶行列式的计算

例 1.5 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+t & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2+t & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & \cdots & n+t\end{vmatrix}.$$

解 特征：行和相等. 将第 2 列，…，第n列都加到第 1 列，并提出公因子，再用第$i\ (i=2,\cdots,n)$行减去第 1 行，即可化为上三角行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}\dfrac{n(n+1)}{2}+t & 2 & \cdots & n\\ \dfrac{n(n+1)}{2}+t & 2+t & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{n(n+1)}{2}+t & 2 & \cdots & n+t\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{n(n+1)}{2}+t\right)\begin{vmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 0 & t & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & t\end{vmatrix}=\left(\frac{n(n+1)}{2}+t\right)t^{n-1}.$$

例 1.6 计算$n+1$阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n\\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{vmatrix},a_i\neq 0;i=1,2,\cdots,n.$$

分析 这是一个除第 1 行、第 1 列和主对角线上的元素外，其余元素全为零的行列式，形状像个爪，称为爪形行列式. 用主对角线上的元素（斜爪）断掉横爪或竖爪可化为三角形行列式.

解 将第$i+1\ (i=1,2,\cdots,n)$列的$-\dfrac{c_i}{a_i}$倍加到第 1 列,即可化为上三角行列式：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{b_ic_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n\\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{vmatrix}=a_1\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right).$$

例 1.7　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

分析　由于行列式中某一行（列）的零元素较多，故可按行列式的展开定理降阶计算.

解　按第 1 列展开得

$$\begin{aligned} D_n &= x\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + y(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix} \\ &= x^n+(-1)^{n+1}y^n. \end{aligned}$$

题型三　求抽象矩阵的行列式

抽象行列式计算是线性代数考研题中填空题和选择题的常考题型，主要应用行列式及矩阵运算的行列式性质和行列式与特征值的关系进行计算.

例 1.8　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}} \\ 4\boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 均为 3 维列向量. 若 $|\boldsymbol{A}|=12, |\boldsymbol{B}|=1$，则 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}|=$_______.

解

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}| &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}} \\ 2\boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm{T}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}} \\ 2\boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm{T}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}} \\ 2\boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm{T}} \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm{T}} \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm{T}} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}} \\ 4\boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm{T}} \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm{T}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}|+4|\boldsymbol{B}|=-2. \end{aligned}$$

例 1.9 (2010 年数二、三)　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3, |\boldsymbol{B}|=2, |\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$______.

解法一 $\left|A+B^{-1}\right|=\left|AE+EB^{-1}\right|=\left|ABB^{-1}+AA^{-1}B^{-1}\right|$

$$=\left|A(B+A^{-1})B^{-1}\right|=|A|\left|B+A^{-1}\right|\left|B^{-1}\right|$$

$$=|A|\left|B+A^{-1}\right|\frac{1}{|B|}=3.$$

解法二 因为$|A|\left|B+A^{-1}\right|=|AB+E|=\left|A+B^{-1}\right||B|$，所以$\left|A+B^{-1}\right|=3$.

说明 由于$A+B$的每行元素都是两个数的和，根据行列式的性质，$|A+B|$应拆成2^n个行列式的和，故一般情况下，$|A+B|\neq|A|+|B|$，要将和的行列式转化为乘积的行列式计算.

例 1.10 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为 3 维列向量，且$|A|=5$，设$B=(\alpha_1+2\alpha_2,3\alpha_1+4\alpha_3,5\alpha_2)$，则$|B|=$_____.

解法一 由于

$$B=(\alpha_1+2\alpha_2,3\alpha_1+4\alpha_3,5\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&3&0\\2&0&5\\0&4&0\end{pmatrix},$$

所以

$$|B|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\begin{vmatrix}1&3&0\\2&0&5\\0&4&0\end{vmatrix}=-20|A|=-100.$$

解法二 按行列式的性质计算：

$$|B|=|\alpha_1+2\alpha_2,3\alpha_1+4\alpha_3,5\alpha_2|=5|\alpha_1+2\alpha_2,3\alpha_1+4\alpha_3,\alpha_2|$$
$$=5|\alpha_1,3\alpha_1+4\alpha_3,\alpha_2|=5|\alpha_1,4\alpha_3,\alpha_2|$$
$$=20|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2|=-20|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=-100.$$

例 1.11 设矩阵$B=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$，矩阵$A$满足$2B^{-1}=B^*A+A$，则$|A|=$_____.

解 显然$|B|=2$，等式两边左乘上B得：$2BB^{-1}=BB^*A+BA$.

由于$BB^*=|B|E=2E$，所以有$2E=2A+BA$，即$(B+2E)A=2E$，两边取行列式得：$|A||B+2E|=|2E|=8$，由于$|B+2E|=4$，所以$|A|=2$.

例 1.12（2012 年数二、三） 设A为 3 阶矩阵，且$|A|=3$，A^*为A的伴随矩阵，若交换A的第 1 行与第 2 行得B，则$|BA^*|=$_____.

解法一 显然$|B|=-|A|=-3$，所以$|BA^*|=|B||A^*|=|B||A|^2=-27$.

解法二　令

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$，因此 $|\boldsymbol{BA}^*|=|\boldsymbol{PAA}^*|=\big||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{PE}\big|=|\boldsymbol{A}|^3|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{E}|=-27$.

例 1.13　设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，则 $\left|\boldsymbol{A}^*+\left(-\dfrac{1}{4}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\right|=$______.

解法一　将 $\boldsymbol{A}^*$ 用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 表示：由于 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$，所以

$$\left|\boldsymbol{A}^*+\left(-\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\right|=\big||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}-4\boldsymbol{A}^{-1}\big|=|-\boldsymbol{A}^{-1}|=(-1)^3\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}=-\frac{1}{3}.$$

解法二　将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 用 $\boldsymbol{A}^*$ 表示：由于 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$，$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$，所以

$$\left|\boldsymbol{A}^*+\left(-\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\right|=|\boldsymbol{A}^*-4\boldsymbol{A}^{-1}|=\left|\boldsymbol{A}^*-4\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}\right|=\left|-\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^*\right|=\left(-\frac{1}{3}\right)^3|\boldsymbol{A}|^2=-\frac{1}{3}.$$

例 1.14（2013 年）　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是三阶非零矩阵，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$______.

解　由 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$ 知 $A_{ij}=-a_{ij}$，即 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

由于 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，不妨设 $a_{11}\neq0$，则 $|\boldsymbol{A}|=\sum\limits_{k=1}^{3}a_{1k}A_{1k}=-\sum\limits_{k=1}^{3}a_{1k}{}^2<0$.

又由 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 得 $|\boldsymbol{A}^*|=|-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$，即 $|\boldsymbol{A}|^2=(-1)^3|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=-|\boldsymbol{A}|$，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-1$. 又 $|\boldsymbol{A}|<0$，所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

例 1.15　设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-3,-1,1$，则 $\begin{vmatrix}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^*\end{vmatrix}=$______.

解　由于相似矩阵有相同的行列式，所以 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=(-3)\times(-1)\times1=3$.

$$\begin{vmatrix}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^*\end{vmatrix}=|-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{B}^*|=(-1)^3|\boldsymbol{A}|\times|\boldsymbol{B}|^2=-27.$$

例 1.16　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$，则 $|2\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E}|=$______.

解法一 $\left|2A^{-1}+E\right|=\left|A^{-1}(2E+A)\right|=\left|A^{-1}\right|\left|2E+A\right|=\dfrac{1}{|A|}\left|2E+A\right|=6$.

解法二 由于 A 的特征值为$1,4,6$，所以 A^{-1} 的特征值为$1,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{6}$，$2A^{-1}+E$ 的特征值为$3,\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{3}$，故$\left|2A^{-1}+E\right|=3\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}=6$.

例 1.17 设3阶矩阵 A 与 B 相似，A 的两个特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$|B|=2$，则$|A+2AB|=$________.

解 由于相似矩阵有相同的行列式，所以$|A|=|B|=2$.

设 A 的另一个特征值为 λ_3，由$|A|=\lambda_1\times\lambda_2\times\lambda_3=2$，得 $\lambda_3=-2$.

由于相似矩阵有相同的特征值，因此 B 的特征值为$1,-1,-2$，故$E+2B$的特征值为$3,\ -1,-3$，所以$|E+2B|=9$，而$|A+2AB|=|A(E+2B)|=|A||E+2B|=18$.

练习题

1. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} \lambda-6 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-3 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-6 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$;　　(6) $D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} \\ -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 \end{vmatrix}$;

(7) $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$;　　(8) $D_n=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ n^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$.