

3.1 内容提要及学习要点

本章主要掌握恒定磁场的计算方法,恒定磁场的基本方程、性质及其应用;掌握利用恒定磁场的边界条件分析电磁场问题,掌握位函数、磁场能量、磁场力、电感的计算,理解磁偶极子、磁介质磁化的含义,能够求解磁化电流的分布,了解麦以曼公式。

3.1.1 恒定磁场的基本方程

1. 安培力定律

两个载流元 $I dl'$ 与 $I_1 dl$ 之间的相互作用力为

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\mathbf{l} \times (I dl' \times \mathbf{e}_R)}{R^2} \quad (3-1)$$

通过对式(3-1)的积分可以得到任意载流结构之间的磁场力。由于孤立的电流元并不存在,故它主要用于电流闭合回路安培力的计算。

2. 毕奥-萨伐尔定律

分布电流产生的磁场为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (3-2)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\mathbf{J}_s \times \mathbf{R}}{R^3} dS' \quad (3-3)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV' \quad (3-4)$$

3. 恒定磁场的基本方程

恒定电流不仅产生电场,也产生磁场。它们都不随时间变化,即 $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$,由此可以得到恒定磁场的基本方程。即磁通连续性原理和安培环路定律。

微分形式:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases} \quad (3-5)$$

积分形式:

$$\begin{cases} \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases} \quad (3-6)$$

恒定磁场的性质: 恒流磁场的源是旋度(涡旋)源(恒定电流), 即磁场是有旋场; 恒定磁场没有散度源, 是无源场(无散场); 磁场线成闭合曲线, 它围绕着恒定电流, 两者呈右手螺旋关系。

安培环路定律提供了在对称情况下计算磁场的一种手段。

3.1.2 恒定磁场的位函数

理解标量磁位和矢量磁位, 但一般不同时使用。前者用于无电流区域, 后者用于有电流情况。

1. 标量磁位

在无电流区域, 因为 $\mathbf{J}=0$, 有 $\nabla \times \mathbf{H}=0$, 故可以定义标量位函数, 以简化磁场的计算。标量磁位没有物理意义, 由式(3-7)定义

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m \quad (3-7)$$

同样由 $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ 得

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \nabla \varphi_m = -\nabla^2 \varphi_m = 0$$

可见, 标量磁位满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi_m = 0 \quad (3-8)$$

当区域中存在电流时, 磁场是非保守场, 标量磁位不是一个单值函数。

2. 矢量磁位

矢量磁位既可以用于无电流的区域, 也可以用于有电流的区域。由于 $\nabla \cdot \mathbf{B}=0$, 而 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0$, 由此定义矢量磁位 $\mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3-9)$$

分布电流产生的矢量磁位为

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{\mathbf{I}}{R} d\mathbf{l}' \\ \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{s'} \frac{\mathbf{J}_s}{R} d\mathbf{S}' \\ \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(r')}{R} dV' \end{cases} \quad (3-10)$$

矢量磁位 $\mathbf{A}$ 有旋度源, 即磁场。根据矢量分析, 在分析磁场时, 通常还需要确定其散度源。规范 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 的值可以有不同的选择, 即用于静态场的库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A}=0$ 和用于时变电

磁场的洛伦兹规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ 。

1) 矢量磁位的计算

在静态场中,利用库仑规范得

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (3-11)$$

在直角坐标系,上面的矢量泊松方程可分解为三个标量方程

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu J_z \end{cases} \quad (3-12)$$

2) 结合“位”对“三度”的理解

梯度、散度和旋度的共同特点就是求场的空间变化率,即对空间坐标求偏导。注意,虽然对于某点的位(A, φ)可为零,但它可能是随空间变化的,因此,其导数不一定为零,即该点的场(B, E)不一定为零。

3) 计算磁场的方法

通常计算磁场有如下的三种方法

(1) 直接积分法。 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J}(r') \times \mathbf{R}}{R^3} dV'$, 积分时注意考虑矢量的方向性。

(2) 通过矢量位计算。 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 。

(2) 安培环路定理。 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ 。要求磁场分布具有某种对称性。

3.1.3 磁偶极子与介质的磁化

1. 磁偶极子的矢量磁位

磁偶极子就是一个小载流圆环。定义磁偶极矩为 $\mathbf{m} = I\pi a^2 \mathbf{e}_z$, 磁偶极子的矢量磁位为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} \mathbf{m} \times \mathbf{e}_R = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \mathbf{m} \times \mathbf{R} \quad (3-13)$$

磁介质中的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 可以看作是真空中传导电流产生的磁感应强度 $\mathbf{B}_0$ 与磁化电流产生的磁感应强度 $\mathbf{B}'$ 的叠加,即

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$$

注意,与电介质极化产生的附加电场消弱原电场不同,磁介质磁化后磁化电流产生的磁场既可以消弱原磁场,也可以增强原磁场。

2. 介质的磁化

单位体积中磁偶极矩的统计平均值,即

$$\mathbf{P}_m = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k}{\Delta V} \quad (3-14)$$

磁化电流体密度:

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{P}_m = \nabla \times [(\mu_r - 1)\mathbf{H}] \quad (3-15)$$

磁化电流面密度:

$$\mathbf{J}_{sm} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{e}_n = [(\mu_r - 1)\mathbf{H}] \times \mathbf{e}_n \quad (3-16)$$

介质中的恒定磁场方程:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \\ \oiint_s \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (3-17)$$

$$\begin{cases} \mathbf{P}_m = \chi_m \mathbf{H} \\ \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{P}_m \\ \mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \end{cases} \quad (3-18)$$

3.1.4 恒定磁场的边界条件

介质分界面两侧恒定磁场的边界条件为

$$\begin{cases} \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \\ \mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \end{cases} \quad (3-19)$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2, \quad \varphi_{m1} = \varphi_{m2} \quad (3-20)$$

3.1.5 电感

自感的计算: $L = \frac{\psi}{I}$

互感的计算: $M_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1}$

计算电感的聂以曼公式: $M = \frac{N_1 N_2 \mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_2 d\mathbf{l}_1}{R}$

电感的计算步骤为:

假定 $I \rightarrow$ 计算磁感应强度 $\mathbf{B} \rightarrow$ 在面上对 $\mathbf{B}$ 积分得到磁通 Φ (或者通过对矢量磁位 $\mathbf{A}$ 进行闭合曲线积分) $\rightarrow$ 由 $\psi = N\Phi$ 得到磁链 $\psi \rightarrow$ 计算出互感 $M = \frac{\psi}{I}$ 。

对磁通的计算有两种方法:

$$\begin{cases} \Phi_m = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \Phi_m = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \end{cases} \quad (3-21)$$

3.1.6 恒定磁场的能量和磁场力

磁场的能量及能量密度分别为

$$\begin{cases} W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j \psi_j \\ W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV \\ w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H} \end{cases} \quad (3-22)$$

可以利用虚位移法计算恒定磁场的磁场力

$$\begin{cases} F = \frac{\partial W_m}{\partial l} \big|_{I_j = \text{常量}} \\ F = -\frac{\partial W_m}{\partial l} \big|_{\psi_j = \text{常量}} \end{cases} \quad (3-23)$$

重要公式:

长直载流导线产生的矢量磁位 A_z :

$$A_z \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{L}{r} \right)^2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{L}{r} \right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r} \right)$$

无限长双平行载流直导线产生的矢量磁位 A_z :

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{r_-}{r_+} \right)$$

长度为 l 的导线内自感: $L_i = \frac{\psi_i}{I} = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$

3.2 典型例题解析

【例题 3-1】 (1) 如图 3-1(a) 所示, 在空气中有一载有直流电流 I , 长为 L 的直导线。求空间任一点 P 处的磁场。

(2) 如图 3-1(b) 所示, 求电流 I 在点 P 处所产生的磁场强度。

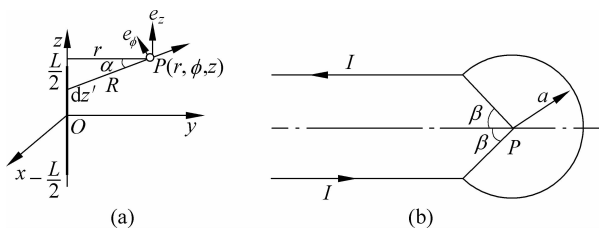


图 3-1 例题 3-1 图

解: (1) 如图 3-1(a) 所示, 取圆柱坐标系, 设带电线段沿 z 轴排列。取电流元为 $Idz'e_z$, 源点和场点分别为 $(0, 0, z')$ 、 $P(r, \phi, z)$ 。应用毕奥-萨伐尔定律, 得到 $Idz'e_z$ 在场点的磁感应强度 B 为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idz'e_z \times R}{R^3}$$

由图可知

$$R = re_r + (z - z')e_z, \quad z' = z - r \tan \alpha, \quad dz' = -r \sec^2 \alpha d\alpha, \quad R = r \sec \alpha$$

并且

$$dz'e_z \times R = dz'e_z \times [re_r + (z - z')e_z] = e_\phi r dz' = -r^2 \sec^2 \alpha d\alpha$$

所以, 长直载流导线在观察点产生的磁场为

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{Idz'e_z \times R}{R^3} dz' = -\frac{\mu_0 I e_\phi}{4\pi r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = e_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$$

$$\text{其中, } \sin\alpha_1 = \frac{z+L/2}{[r^2+(z+L/2)^2]^{1/2}}, \quad \sin\alpha_2 = \frac{z-L/2}{[r^2+(z-L/2)^2]^{1/2}}$$

当长直载流导线区域无穷长时, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{\pi}{2}$, 因此

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathbf{B} = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(2) 如图 3-1(b) 所示, 圆弧的电流在点 P 所产生的磁感应强度为

$$B_1 = \frac{2(\pi - \beta)}{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2a} = \frac{(\pi - \beta)\mu_0 I}{2\pi a}$$

两根半无限长线电流 I 在点 P 所产生的磁场强度为

$$B_2 = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi a \sin\beta} \left[\sin 90^\circ - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \right] = \frac{\mu_0 I(1 - \cos\beta)}{2\pi a \sin\beta}$$

因此, 点 P 的磁场强度为

$$B = B_1 + B_2 = \frac{(\pi - \beta)\mu_0 I}{2\pi a} + \frac{\mu_0 I(1 - \cos\beta)}{2\pi a \sin\beta}$$

【例题 3-2】 真空中有一个半径为 a 的载流线圈, 电流强度为 I , 将线圈沿直径折起来, 并使两个半圆垂直, 求半圆圆心处的磁通密度。

解: 设原线圈位于 xOy 平面, 则折起来后, 一个半圆电流在 xOy 平面, 一个半圆电流在 yOz 平面。在 xOy 平面的半圆, 在圆心产生的磁场方向沿 z 轴, 电流元为 $Idl' = \mathbf{e}_\phi Ia d\phi$,

$\mathbf{R} = -\mathbf{e}_r a$, 并且场点位移矢量与电流垂直。因此, 由 $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl' \times \mathbf{e}_R}{R^2}$ 得

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\pi \frac{Ia^2 d\phi}{a^3} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{4a}$$

同理, 电流在 yOz 平面的半圆, 其在圆心产生的磁场方向沿 x 轴, 即

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_x \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\pi \frac{Ia^2 d\phi}{a^3} = \mathbf{e}_x \frac{\mu_0 I}{4a}$$

所以, 半圆圆心处的磁通密度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4a} (\mathbf{e}_z + \mathbf{e}_x)$$

【例题 3-3】 边长分别为 a 和 b 的载有电流 I 的小矩形回路, 如图 3-2 所示, 求远处一点 P 的矢量磁位。

解: 首先考虑沿 y 方向的两电流边在点 P 产生的矢量磁位。取电流元所在位置的坐标为 $(a, y', 0)$, $(0, y', 0)$, 则

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) Idl'$$

其中, $R_1 = \sqrt{(x-a)^2 + (y-y')^2 + z^2}$, $R_2 = \sqrt{x^2 + (y-y')^2 + z^2}$, 由于 $r \gg a$, 则根据小变量近似

$$\frac{1}{R_1} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{ax}{r^2} + \frac{yy'}{r^2} \right), \quad \frac{1}{R_2} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{yy'}{r^2} \right)$$

因此

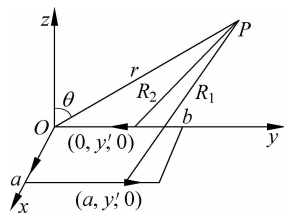


图 3-2 例题 3-3 图

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{e}_y \frac{\mu_0 a x}{4\pi r^3} \int_0^b I dy' = \mathbf{e}_y \frac{\mu_0 a b x}{4\pi r^3} I$$

同理,沿 x 方向的两电流边在点 P 产生的矢量磁位

$$\mathbf{A}_2 = -\mathbf{e}_x \frac{\mu_0 b y}{4\pi r^3} \int_0^a I dx' = -\mathbf{e}_x \frac{\mu_0 a b y}{4\pi r^3} I$$

故矩形回路在远处一点 P 产生的矢量磁位为

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{e}_y \frac{\mu_0 a b x}{4\pi r^3} I - \mathbf{e}_x \frac{\mu_0 a b y}{4\pi r^3} I = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 a b \sin\theta}{4\pi r^2}$$

可见,方形小环与圆形小环产生的场是一致的。

【例题 3-4】 无限长直线电流 I 垂直于磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种磁介质的交界面,如图 3-3 所示,试求两种媒质中的磁通量密度。

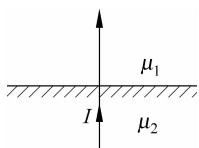


图 3-3 例题 3-4 图

解: 电流 I 产生磁场方向沿 $\mathbf{e}_\phi$, 根据磁场的边界条件,两种磁介质中的磁场强度相等,即 $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = H\mathbf{e}_\phi$; 以 r 为半径作圆,根据安培环路定理 $\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$, 则磁场强度为

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi$$

因此,两种媒质中的磁通量密度分别为

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_1 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_2 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi$$

【例题 3-5】 在均匀磁化的磁导率为 μ 的无限大磁介质中,磁通量密度为 $\mathbf{B}$,如果在媒质中存在如下空腔,求空腔内的磁场强度和磁通量密度。

- (1) 平行于 $\mathbf{B}$ 的针形空腔;
- (2) 底面垂直于 $\mathbf{B}$ 的薄盘形空腔。

解: (1) 对于平行于 $\mathbf{B}$ 的针形空腔,根据磁场强度切向分量的边界条件,得

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}, \quad \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}$$

- (2) 对于底面垂直于 $\mathbf{B}$ 的薄盘形空腔,根据 $\mathbf{B}$ 法向分量的边界条件,得

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{B}_2 / \mu_0 = \mu_r \mathbf{H}$$

【例题 3-6】 一条宽度为 $2a$ 的无限长薄铜带,中心线与 z 轴重合,载有电流 I ,如图 3-4 所示。求空间周围任一点的磁场强度。

解: 薄铜带电流密度为 $\mathbf{J} = \frac{I}{2a} \mathbf{e}_z$

取电流元位于 $(x', 0, 0)$ 处,以源点为中心,以 r 为半径作圆,根据安培环路定理可以求得无限长线电流 $J dx'$ 在 $P(x, y, z)$ 点产生的磁场强度为

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{2\pi r} \frac{I}{2a} dx' \mathbf{e}_\theta$$

在直角坐标系下,对上式积分可得

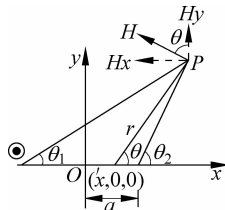


图 3-4 例题 3-6 图

$$\mathbf{H} = -\mathbf{e}_x \frac{I}{4\pi a} \int_{-a}^a \frac{\sin\theta}{r} dx' + \mathbf{e}_y \frac{I}{4\pi a} \int_{-a}^a \frac{\cos\theta}{r} dx'$$

由图可知, $r = \frac{y}{\sin\theta}$, $x - x' = y \cot\theta$, 因此 $dx' = y \csc^2\theta d\theta$, 代入上式可得

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\mathbf{e}_x \frac{I}{4\pi a} \int_{-a}^a \frac{\sin\theta}{r} dx' + \mathbf{e}_y \frac{I}{4\pi a} \int_{-a}^a \frac{\cos\theta}{r} dx' = -\mathbf{e}_x \frac{I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta + \frac{I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta \\ &= \mathbf{e}_x \frac{I}{4\pi a} (\theta_1 - \theta_2) + \mathbf{e}_y \frac{I}{4\pi a} \ln \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \mathbf{e}_x \frac{I}{4\pi a} (\theta_1 - \theta_2) + \mathbf{e}_y \frac{I}{8\pi a} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \end{aligned}$$

其中, $\theta_1 = \arcsin \frac{y}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}$, $\theta_2 = \arcsin \frac{y}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}$ 。

【例题 3-7】 由矢量磁位的表达式 $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV'$, 应用库仑规范。证明: (1) $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$; (2) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ 。

证明: (1) 现考虑 $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{e}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{e}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{e}_z$

由于 $\nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, 并且 $J'_x(x', y', z')$ 不是 (x, y, z) 的函数, 所以

$$\nabla^2 A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \nabla^2 \left(\frac{J'_x}{R} \right) dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V J'_x \nabla^2 \frac{1}{R} dV'$$

即

$$\nabla^2 A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V J'_x(\mathbf{r}') \{-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\} dV' = -\mu_0 J_x(\mathbf{r})$$

同理可得:

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y(\mathbf{r})$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z(\mathbf{r})$$

故有

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

(2) 应用恒等式 $\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, 及库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 考虑到 $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$, 因此

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

【例题 3-8】 两半径为 a , 平行放置的长直圆柱导体, 轴线间的距离为 d ($d < 2a$), 如图 3-5 所示。现将相交部分挖成一空洞, 并且在相交处用绝缘纸隔开。设两导体分别通有面密度为 $\mathbf{J}_1 = J_0 \mathbf{e}_z$ 和 $\mathbf{J}_2 = -J_0 \mathbf{e}_z$ 的电流, 试计算空洞中的磁场强度。

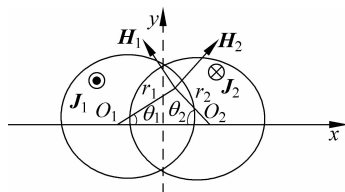


图 3-5 例题 3-8 图

解: 将空洞中的电流视为 $\mathbf{J}_1$ 和 $\mathbf{J}_2$ 的叠加。则空洞中的磁场可视为两个分别载有 $\mathbf{J}_1$ 和 $\mathbf{J}_2$ 的电流的圆柱体在某点产生磁场的叠加。设两个载流圆柱体在周围产生的磁场分别为 H_1 和 H_2 , 利用安培环路定律, 则

$$H_1 = \frac{r_1 J_1}{2} = \frac{r_1 J_0}{2}, \quad H_2 = \frac{r_2 J_2}{2} = \frac{r_2 J_0}{2}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$$

结合图示, 在直角坐标系下分解为

$$H_x = -H_1 \sin\theta_1 + H_2 \sin\theta_2$$

$$H_y = H_1 \cos\theta_1 + H_2 \cos\theta_2$$

由于

$$\sin\theta_1 = \frac{y}{r_1}, \quad \cos\theta_1 = \frac{d/2+x}{r_1}, \quad \sin\theta_2 = \frac{y}{r_2}, \quad \cos\theta_2 = \frac{d/2-x}{r_2}$$

由此可得

$$H_x = -\frac{r_1 J_0}{2} \cdot \frac{y}{r_1} + \frac{r_2 J_0}{2} \cdot \frac{y}{r_2} = 0$$

$$H_y = \frac{r_1 J_0}{2} \cdot \frac{d/2+x}{r_1} + \frac{r_2 J_0}{2} \cdot \frac{d/2-x}{r_2} = \frac{dJ_0}{2}$$

因此,空洞中的磁场强度为

$$\mathbf{H} = H_y \mathbf{e}_y = \frac{dJ_0}{2} \mathbf{e}_y$$

可见,空洞中的磁场是均匀的。

【例题 3-9】 已知有 3 条相互平行的长直导线,通有电流的大小均为 I ,方向如图 3-6 所示。求空间任一点 P 的标量磁位。

解: P 的标量磁位可视为每条电流在该点产生的标量磁位的叠加。取 x 轴为磁屏障 $\varphi_{mx}=0$,第一条电流在 P 点产生的标量磁位为

$$\varphi_{m1} = \int_P^x \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\theta_1}^0 \frac{I}{2\pi r_1} \cdot r_1 d\theta = -\frac{I}{2\pi} \theta_1$$

同理,其他两条电流在 P 点产生的标量磁位分别为

$$\varphi_{m2} = \int_P^x \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\theta_2}^0 \frac{I}{2\pi r_2} \cdot r_2 d\theta = \frac{I}{2\pi} \theta_2$$

$$\varphi_{m3} = \int_P^x \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\theta_3}^0 \frac{I}{2\pi r_3} \cdot r_3 d\theta = \frac{I}{2\pi} \theta_3$$

因此,空间任一点 P 的标量磁位为

$$\varphi_m = \varphi_{m1} + \varphi_{m2} + \varphi_{m3} = \frac{I}{2\pi} (\theta_2 + \theta_3 - \theta_1)$$

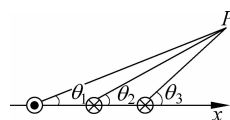


图 3-6 例题 3-9 图

【例题 3-10】 半径为 a 的长直螺线管,单位长度上绕有 N 匝线圈,在螺线管轴线处,有一半径为 b 的单匝小线圈,线圈平面的法线 $\mathbf{e}_n$ 与螺线管的轴线夹角为 θ ,如图 3-7 所示。现忽略边缘效应,求螺线管与小环线圈之间的互感。

解: 设螺线管通有电流 I ,则其内的磁感应强度 B 为

$$\mathbf{B} = \mu_0 N I \mathbf{e}_z$$

因此,穿过小线圈的磁链(磁通)为

$$\Psi_m = \Phi_m = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos\theta = \mu_0 N I \pi b^2 \cos\theta$$

故螺线管与小环线圈之间的互感

$$M = \frac{\Psi_m}{I} = \mu_0 N \pi b^2 \cos\theta$$

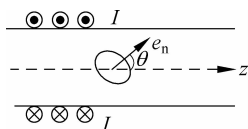


图 3-7 例题 3-10 图

【例题 3-11】 两组双线传输线 1-1' 与 2-2' 彼此平行放置,如图 3-8 所示。导线的半径为 a ,设线间距离分别为 r_{12} 、 $r_{12'}$ 、 $r_{1'2}$ 、 $r_{1'2'}$,都远大于 a 。求双线传输线之间单位长度的互感。

解: 设电流沿 z 方向,平行双线传输线在空间任意点产生的矢量位为

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right)$$

由于线间距离都远大于 a , 因此, 传输线 $1-1'$ 的电流在 $2-2'$ 上的 M 及 N 点产生的矢量位分别为

$$\mathbf{A}_M = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{d_{1'2}}{d_{12}}\right), \quad \mathbf{A}_N = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{d_{1'2'}}{d_{12'}}\right)$$

沿回路 $2-2'$ 单位长度上作一矩形积分回路, 则传输线 $1-1'$ 的电流在 $2-2'$ 单位长度上产生的磁通为

$$\begin{aligned} \Phi_{m12} &= \oint_{l_2} \mathbf{A}_{12} \cdot d\mathbf{l} = A_M - A_N = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{d_{1'2}}{d_{12}}\right) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{d_{1'2'}}{d_{12'}}\right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{d_{1'2}}{d_{12}} \cdot \frac{d_{12'}}{d_{1'2'}}\right) \end{aligned}$$

故互感为

$$M = \frac{\Phi_{m12}}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{d_{1'2}}{d_{12}} \cdot \frac{d_{12'}}{d_{1'2'}}\right)$$

【例题 3-12】 同轴线的内、外导体半径分别为 a 和 b , 外导体的半径厚度可忽略不计。内外导体间分别填充磁导率为 μ_1 和 μ_2 的两种不同介质, 如图 3-9 所示。设同轴线中流过的电流为 I , 试求:

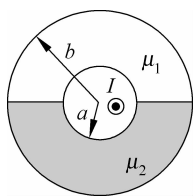


图 3-9 例题 3-12 图

- (1) 同轴线单位长度所存储的磁场能量;
- (2) 单位长度的电感;
- (3) 求同轴线内部磁化电流密度的分布。

解: (1) 由题意可知, 轴向电流产生的磁场沿 ϕ 方向。因此, 在两种媒质的分界面上, 磁场只有法向分量, 根据磁感应强度 B 法向分量的边界条件, $B_1 = B_2 = B$ 。

根据安培环路定理, 当 $r < a$ 时, 有

$$2\pi r H_0 = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 = \frac{I}{a^2} r^2$$

即

$$H_0 = \frac{I}{2\pi a^2} r, \quad r < a$$

当 $a < r < b$ 时, 有

$$\pi r (H_1 + H_2) = I$$

由于 $H_1 = \frac{B_1}{\mu_1} = \frac{B}{\mu_1}$, $H_2 = \frac{B_2}{\mu_2} = \frac{B}{\mu_2}$, 代入上式得

$$B = \frac{\mu_1 \mu_2 I}{\pi (\mu_1 + \mu_2) r}, \quad a < r < b$$

故同轴线中单位长度储存的能量为

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{B_0^2}{\mu_0} 2\pi r dr + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{B^2}{\mu_1} \pi r dr + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{B_0^2}{\mu_2} \pi r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \right)^2 2\pi r dr + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \int_a^b \left(\frac{\mu_1 \mu_2 I}{\pi (\mu_1 + \mu_2) r} \right)^2 \pi r dr \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_1 \mu_2 I^2}{2\pi (\mu_1 + \mu_2)} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

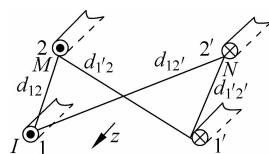


图 3-8 例题 3-11 图

(2) 由 $W_m = \frac{1}{2}LI^2$, 得到单位长度的电感为

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_1\mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \ln \frac{b}{a}$$

(3) 当 $r < a$ 时, 由于 $\chi_m = (\mu_r - 1) = 0$, 故磁化电流密度为零。

$$\text{当 } a < r < b \text{ 时, } H_1 = \frac{B}{\mu_1} = \frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r}, \quad H_2 = \frac{B}{\mu_2} = \frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r}$$

磁化电流体密度:

对于 μ_1 所在的区域, 在圆柱坐标系下:

根据 $\mathbf{P}_m = \chi_m \mathbf{H}_1 = (\mu_{r1} - 1) \mathbf{H}_1 = \mathbf{e}_\phi (\mu_{r1} - 1) \frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r}$, 得

$$\mathbf{J}_{m1} = \nabla \times \mathbf{P}_{m1} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_{mr} & rP_{m\phi} & P_{mz} \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & (\mu_{r1} - 1) \frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

同理, 对于 μ_2 所在的区域, $\mathbf{J}_{m2} = 0$ 。

磁化电流面密度:

对于 μ_1 所在的区域, $r=a$ 处:

$$\mathbf{J}_{sa1} = \mathbf{P}_{m1} \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_\phi (\mu_{r1} - 1) \frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r} \Big|_{r=a} \times (-\mathbf{e}_r) = \mathbf{e}_z (\mu_{r1} - 1) \frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)a}$$

对于 μ_1 所在的区域, $r=b$ 处:

$$\mathbf{J}_{sb1} = \mathbf{P}_{m1} \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_\phi (\mu_{r1} - 1) \frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r} \Big|_{r=b} \times \mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_z (\mu_{r1} - 1) \frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)b}$$

对于 μ_2 所在的区域, $r=a$ 处:

$$\mathbf{J}_{sa2} = \mathbf{P}_{m2} \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_\phi (\mu_{r2} - 1) \frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r} \Big|_{r=a} \times (-\mathbf{e}_r) = \mathbf{e}_z (\mu_{r2} - 1) \frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)a}$$

对于 μ_2 所在的区域, $r=b$ 处

$$\mathbf{J}_{sb2} = \mathbf{P}_{m2} \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_\phi (\mu_{r2} - 1) \frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r} \Big|_{r=b} \times \mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_z (\mu_{r2} - 1) \frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)b}$$

在两种媒质的交界面上, 磁化电流面密度为零。 $\mathbf{J}_{sm} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{e}_n = P_m \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_\phi = 0$

【例题 3-13】 一个带电荷为 q 的质点以角速度 ω 绕半径为 a 的圆周运动, 求它的磁矩。

解: 带电荷质点的圆周运动形成小电流圆环, 半径为 a 。

$$i = \frac{q}{T} = q \frac{\omega}{2\pi}$$

故它的磁矩为

$$\mathbf{P} = \pi a^2 i \mathbf{e}_n = \frac{q}{2} a^2 \omega \mathbf{e}_n$$

其中, $\mathbf{e}_n$ 为单位矢量, 与电流成右手螺旋关系。

【例题 3-14】 下面的函数中, 哪些可能是磁场的矢量? 如是, 求电流分布。

(1) $\mathbf{B} = \mathbf{e}_r Cr$ (圆柱坐标系);

(2) $\mathbf{B} = -\mathbf{e}_x Cy + \mathbf{e}_y Cx$ 。

解: (1) $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{e}_r Cr) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rCr) = 2C \neq 0$, 由于散度不为零, 因而 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_r Cr$ 不可能是磁场的矢量。

(2) $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (-\mathbf{e}_x Cy + \mathbf{e}_y Cx) = \frac{\partial}{\partial x} (-Cy) + \frac{\partial}{\partial y} (Cx) = 0$, 由于散度为零, 故 $\mathbf{B} = -\mathbf{e}_x Cy + \mathbf{e}_y Cx$ 可能是磁场的矢量。

其对应的电流分布为

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -Cy & Cx & 0 \end{vmatrix} = \frac{2C}{\mu} \mathbf{e}_z$$

【例题 3-15】 一个正 n 边形(长边为 a)线圈中通过的电流为 I , 试证明该线圈中心的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi a} \tan \frac{\pi}{n}$$

证明: 对有限长度的直导线在线圈中心产生的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$$

由于 $\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$, 设正 n 边形的外接圆半径是 a , 则 $\frac{r}{a} = \cos \frac{\pi}{n}$, 故线圈中心的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi a} \tan \frac{\pi}{n}$$

【例题 3-16】 已知穿过某一半径为 a 的圆形区域的磁场为一个均匀磁场, 即 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B_0$, B_0 为常数。试求环绕这个圆形区域边缘的矢量磁位 $\mathbf{A}$ 。

解: 取圆柱坐标系。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\phi \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right)$$

$$\text{因此 } \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) = B_0$$

对于环绕圆形区域的矢量磁位即 A_ϕ , 因此

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = B_0$$

对上式积分, 并取积分常数为零, 得

$$A_\phi = \frac{B_0}{2} r$$

故环绕这个圆形区域边缘的矢量磁位

$$A_\phi = \frac{B_0}{2} a$$

【例题 3-17】 有一电流分布为 $\mathbf{J}(r) = \mathbf{e}_z r J_0 / a$ ($r \leq a$), 求矢量磁位和磁感应强度。

解: 由于电流只有 $\mathbf{e}_z$ 分量, 故矢量磁位 $\mathbf{A}(r)$ 也只有 $\mathbf{e}_z$ 分量, 并且仅为 r 的函数。由泊松方程得

$$\nabla^2 A_{z1}(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_{z1}}{\partial r} \right) = -r\mu_0 J_0/a \quad (r \leq a)$$

$$\nabla^2 A_{z2}(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_{z2}}{\partial r} \right) = 0 \quad (r > a)$$

由此解得

$$A_{z1}(r) = -\frac{\mu_0 J_0}{9a} r^3 + C_1 \ln r + D_1$$

$$A_{z2}(r) = C_2 \ln r + D_2$$

考虑到边界条件如下:

(1) $r \rightarrow 0$ 时, $A_{z1}(r)$ 有限, 故 $C_1 = 0$ 。

(2) $r = a$ 时, $A_{z1}(r) = A_{z2}(r)$, $\frac{\partial A_{z1}(r)}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial A_{z2}(r)}{\partial r} \Big|_{r=a}$, 故有

$$-\frac{\mu_0 J_0}{9} a^2 + D_1 = C_2 \ln a + D_2$$

$$-\frac{\mu_0 J_0}{3} a = C_2 \frac{1}{a}$$

求解以上两个方程得

$$C_2 = -\frac{\mu_0 J_0}{3} a^2; \quad D_2 = -\frac{\mu_0 J_0}{3} a^2 \left(\frac{1}{3} - \ln a \right)$$

因此

$$A_{z1}(r) = -\frac{\mu_0 J_0}{9a} r^3 + D_1$$

$$A_{z2}(r) = -\frac{\mu_0 J_0}{3} a^2 \ln r - \frac{\mu_0 J_0}{3} a^2 \left(\frac{1}{3} - \ln a \right)$$

再令 $r=0$ 时, $A_{z1}(r)=0$, 则有 $D_1=0$, 因此空间的矢量磁位为

$$A_{z1}(r) = -\frac{\mu_0 J_0}{9a} r^3$$

$$A_{z2}(r) = -\frac{\mu_0 J_0}{3} a^2 \ln r - \frac{\mu_0 J_0}{3} a^2 \left(\frac{1}{3} - \ln a \right)$$

空间的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_1(r) = \nabla \times \mathbf{A}_1(r) = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 J_0}{3a} r^2 \quad (r \leq a)$$

$$\mathbf{B}_2(r) = \nabla \times \mathbf{A}_2(r) = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 J_0}{3r} a^2 \quad (r > a)$$

【例题 3-18】 如图 3-10 所示, 铁磁体槽内有一线电流 I 。设铁磁体的磁导率 $\mu \rightarrow \infty$, 槽和载流线均可视为无限长, 忽略槽口的边缘效应。试给出槽内矢量磁位 $\mathbf{A}$ 所满足的微分方程及边界条件。

解: 设槽和载流线沿 z 方向无限长, 在槽内除线电流位置外其他区域满足二维拉普拉斯方程。由于电流沿 z 方向, 故矢量磁位 $\mathbf{A}$ 沿 z 方向。即有

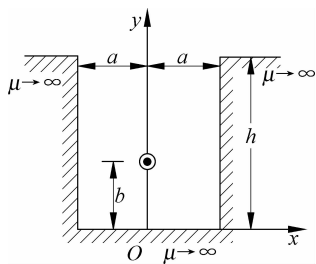


图 3-10 例题 3-18 图

$$\nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = 0$$

由于

$$\mathbf{B} = \nabla \times A_z \mathbf{e}_z = \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{e}_y$$

故有

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

对于磁边界,根据槽体内的边界条件: $x = \pm a, 0 < y < h$ 时, $H_y = 0$, 故有

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = 0$$

而 $y = 0, -a < x < a$ 时, $H_x = 0$, 故有

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = 0$$

在 $y = h, -a < x < a$ 处, 由于忽略边缘效应, 可认为磁感线与 x 轴平行。由于槽内各边的切向磁场为零, 根据安培环路定理, 可知

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I$$

故有

$$H_x = \frac{I}{2a}$$

即

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

【例题 3-19】 如图 3-11 所示, 有一半径为 a 的长直薄导体壳圆柱, 在导体薄层中通有电流密度 $\mathbf{K} = K\mathbf{e}_\phi$ 的电流。求导体薄壳圆柱内外的矢量磁位及磁感应强度。

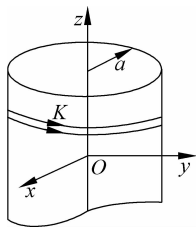


图 3-11 例题 3-19 图

解: 根据电流的方向可知, 矢量磁位沿 $\mathbf{e}_\phi$ 方向。根据轴对称性, A_ϕ 仅与 r 坐标有关, 设 $\mathbf{A} = A_\phi(r)\mathbf{e}_\phi$, 在圆柱坐标系下, 除薄导体壳外(即圆柱内外) $\mathbf{A}$ 所满足的拉普拉斯方程为

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 (A_\phi \mathbf{e}_\phi) = 0$$

由于在圆柱坐标系下 $\mathbf{e}_\phi$ 并非常量, 故利用 $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$, 即

$$\nabla^2 (A_\phi \mathbf{e}_\phi) = \nabla(\nabla \cdot [A_\phi(r)\mathbf{e}_\phi]) - \nabla \times \nabla \times [A_\phi(r)\mathbf{e}_\phi]$$

由于

$$\nabla \cdot [A_\phi(r)\mathbf{e}_\phi] = \frac{\partial A_\phi(r)}{\partial \phi} = 0$$

而

$$\nabla \times \nabla \times [A_\phi(r)\mathbf{e}_\phi] = \nabla \times \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rA_\phi(r) & 0 \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{e}_z \left(\frac{A_\phi}{r} + \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right)$$

$$= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{A_\phi}{r} + \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_\phi \left[\frac{\partial A_\phi}{r \partial r} - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial r^2} \right]$$

所以

$$\nabla^2 [A_\phi \mathbf{e}_\phi] = \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial r} - \frac{A_\phi}{r^2} = 0$$

上式的通解为

$$\begin{aligned} A_{\phi 1} &= \frac{c_1}{2} r + \frac{c_2}{r} \quad (0 < r < a) \\ A_{\phi 1} &= \frac{c_3}{2} r + \frac{c_4}{r} \quad (r > a) \end{aligned} \quad (3-24)$$

设 $r \rightarrow 0$ 时, $A_{\phi 1}(r)$ 有限, 故 $c_2 = 0$ 。

根据 $\mathbf{A}$ 的连续性, 则边界条件为

$$A_{\phi 1} \big|_{r=a} = A_{\phi 2} \big|_{r=a} \quad (3-25)$$

又由于 $\mathbf{B} = \nabla \times (A_\phi \mathbf{e}_\phi) = \mathbf{e}_z \left(\frac{A_\phi}{r} + \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right)$, 而在 $r = a$ 处 $A_{\phi 1} \big|_{r=a} = A_{\phi 2} \big|_{r=a}$, 故根据切向磁场的边界条件得

$$B_{z1} - B_{z2} = \frac{\partial A_{\phi 1}}{\partial r} \bigg|_{r=a} - \frac{\partial A_{\phi 2}}{\partial r} \bigg|_{r=a} = \mu_0 K \quad (3-26)$$

由于 $c_2 = 0$, 根据边界条件式(3-25)、式(3-26), 由通解方程式(3-24)得

$$c_3 = 0, c_1 = \mu_0 K, \quad c_4 = \frac{\mu_0 K a^2}{2}$$

因此, 导体薄壳圆柱内外的矢量磁位为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \frac{\mu_0 K}{2} r \mathbf{e}_\phi \quad (0 < r < a) \\ \mathbf{A}_1 &= \frac{\mu_0 K a^2}{2r} \mathbf{e}_\phi \quad (r > a) \end{aligned}$$

则磁感应强度为

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \nabla \times (A_{\phi 1} \mathbf{e}_\phi) = \mathbf{e}_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_{\phi 1})}{\partial r} \right) = \mu_0 K \mathbf{e}_z \quad (0 < r < a) \\ \mathbf{B}_2 &= \nabla \times (A_{\phi 2} \mathbf{e}_\phi) = \mathbf{e}_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_{\phi 2})}{\partial r} \right) = 0 \quad (r > a) \end{aligned}$$

【例题 3-20】 一长螺旋管, 长度 $l \gg$ 半径 a , 匝数为 N , 通过电流 I , 求轴线上任意点的 $\mathbf{B}$ 。

解: 参见图 3-12。设单位长度匝数为 n , 则 $n = \frac{N}{l}$, 离 O 点 x' 远的 dx' 长度的线圈在 P 点产生的场强 dB 为

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2 n I dx'}{[a^2 + (x - x')^2]^{3/2}}$$

整个螺旋管在点产生的总磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{a^2 n I dx'}{[a^2 + (x - x')^2]^{3/2}} \quad (3-27)$$

由图 3-12 可知

$$r = \sqrt{a^2 + (x - x')^2} = \frac{a}{\sin \beta} \quad (3-28)$$

$$x - x' = r \cos \beta \quad (3-29)$$

由式(3-28)、式(3-29)得

$$\frac{x - x'}{a} = \cot \beta$$

取微分得

$$\frac{dx'}{a} = \frac{d\beta}{\sin^2 \beta} \quad (3-30)$$

将式(3-28)、式(3-30)代入式(3-27),得

$$B = \frac{\mu_0}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} n I \sin \beta d\beta = \frac{\mu_0}{2} n I (\cos \beta_1 - \cos \beta_2)$$

这里

$$\cos \beta_1 = \frac{x + \frac{l}{2}}{[a^2 + (x + \frac{l}{2})^2]^{1/2}}$$

$$\cos \beta_2 = \frac{x - \frac{l}{2}}{[a^2 + (x - \frac{l}{2})^2]^{1/2}}$$

在两种特殊情况下:

(1) $l \rightarrow \infty, \beta_1 = 0, \beta_2 = \pi$

则

$$B = \mu_0 n I = \frac{\mu_0 N}{l} I$$

(2) 在半无限长螺旋管口处, $\beta_1 = 0, \beta_2 = \frac{\pi}{2}$; 或 $\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \beta_2 = \pi$, 都有 $B = \frac{\mu_0 N}{2l} I$

【例题 3-21】 设空心长直导线外半径为 b , 空心部分半径为 a , 如图 3-13 所示, 试求其单位长度的内自感。

解: 设空心长直导线流过的电流为 I , 均匀分布在导体内, 则根据轴对称性, 利用安培环路定理得

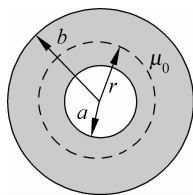


图 3-13 例题 3-21 图

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} I$$

因此, 半径为 r 的圆周上, 磁场强度为

$$H = \frac{r^2 - a^2}{2\pi r(b^2 - a^2)} I \quad (a \leq r \leq b)$$

则磁感应强度为

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0(r^2 - a^2)I}{2\pi r(b^2 - a^2)} \quad (a \leq r \leq b)$$

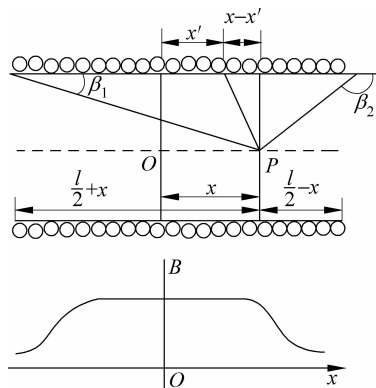


图 3-12 例题 3-20 图

通过 dr 处单位长度的磁通为

$$d\Phi_m = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0(r^2 - a^2)I}{2\pi r(b^2 - a^2)} dr$$

由于该磁通只与电流 $I' = \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}I$ 铰链,其相当的匝数为

$$N = \frac{I'}{I} = \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

故总的磁链为

$$\begin{aligned}\Psi_m &= \int N d\Phi_m = \int_a^b \frac{\mu_0(r^2 - a^2)^2 I}{2\pi r(b^2 - a^2)^2} dr \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2 - a^2)^2} \left[\frac{1}{4}(b^4 - a^4) - a^2(b^2 - a^2) + a^4 \ln \frac{b}{a} \right]\end{aligned}$$

所以,空心长直导线单位长度的内自感为

$$L = \frac{\Psi_m}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi(b^2 - a^2)^2} \left[\frac{1}{4}(b^4 - a^4) - a^2(b^2 - a^2) + a^4 \ln \frac{b}{a} \right]$$

【例题 3-22】 半径为 a 的长直实心圆柱导体通有均匀分布的电流 I , 另有一半径为 b 的长直薄导电圆柱, 其筒壁厚度可以忽略, 筒壁也均匀分布电流 I , 电流的流向均沿轴线方向。如果要求两种情况下, 单位长度存储的能量相等, 试求这两个圆柱体的半径之比。

解: 利用安培环路定理 $\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$, 长直实心圆柱导体周围的磁场为

$$\mathbf{H}_1 = \begin{cases} \frac{Ir}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\phi & (0 \leq r \leq a) \\ \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi & (r > a) \end{cases}$$

长直薄导电圆柱周围的磁场为

$$\mathbf{H}_2 = \begin{cases} 0 & (0 \leq r \leq a) \\ \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi & (r > a) \end{cases}$$

根据磁场能量的计算公式 $W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \frac{\mu_0}{2} \int_V H^2 dV$, 单位长度实心圆柱导体存储的能量为

$$W_{m1} = \frac{\mu_0}{2} \int_V H_1^2 dV = \int_0^a \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4} 2\pi r dr + \int_a^{r_\infty} \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{r_\infty}{a}$$

单位长度薄导电圆柱存储的能量为

$$W_{m2} = \frac{\mu_0}{2} \int_V H_2^2 dV = \int_b^{r_\infty} \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{r_\infty}{b}$$

如果 $W_{m1} = W_{m2}$,

则

$$\frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{r_\infty}{a} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{r_\infty}{b}$$

因此

$$\ln \frac{a}{b} = 1/4$$

即

$$\frac{a}{b} = 1.284$$

【例题 3-23】 一内外半径分别为 a, b , 长为 $l (l \gg a, b)$ 的同轴空气填充电容器, 内外导体间加恒定电流源, 电流为 I 。现将此空气电容器垂直地部分浸入到磁导率为 μ , 比重为 ρ_m 的液体中。设电容器外面溶液的高度为 h_1 (h_1 也即从外面看电容器插入溶液的深度) 不变, 试求液体在电容器内上升的高度 h 。

解: 因为 $l \gg a, b$, 根据安培环路定理, 电容器内外导体间的磁场为

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi \quad (a < r < b)$$

同轴电容器分为空气填充段与溶液填充段两部分, 其长度分别为 $l - h - h_1$ 及 $h_1 + h$ 。由此得到同轴电容器储存的磁场能量为

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \frac{\mu_0}{2} \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 2\pi r (l - h - h_1) dr + \frac{\mu}{2} \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 2\pi r (h_1 + h) dr \\ &= \frac{\mu_0 I^2 (l - h - h_1)}{4\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu I^2 (h_1 + h)}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

由于电流 I 恒定, 故由虚位移法求得液体受到的磁场力为

$$F_1 = \frac{\partial W_m}{\partial h} \Big|_{I=\text{const}} = \frac{(\mu - \mu_0) I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

当电容器内液面达到平衡时, 液体的重力 F_g 应与 F_1 大小相等。 F_g 为

$$F_g = \pi(b^2 - a^2)h\rho_m g$$

故有

$$\frac{(\mu - \mu_0) I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} = \pi(b^2 - a^2)h\rho_m g$$

因此, 液体在电容器内上升的高度 h 为

$$h = \frac{(\mu - \mu_0) I^2}{4\pi^2 (b^2 - a^2) \rho_m g} \ln \frac{b}{a}$$

【例题 3-24】 证明, 在均匀磁介质内部, 在稳定情况下磁化电流密度总是等于传导电流密度的 $\mu/\mu_0 - 1$ 倍。

证明: 对于各项同性、线性的均匀磁介质, 传导电流密度为

$$\mathbf{J}_c = \nabla \times \mathbf{H}$$

而磁化电流为

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{P}_m = \nabla \times \chi_m \mathbf{H} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \nabla \times \mathbf{H}$$

因此, 磁化电流密度与传导电流密度的比值为

$$\frac{\mathbf{J}_m}{\mathbf{J}_c} = \frac{\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \nabla \times \mathbf{H}}{\nabla \times \mathbf{H}} = \frac{\mu}{\mu_0} - 1$$

得证。

【例题 3-25】 欲在一半径为 a 的球上绕线圈, 使在球内产生均匀场, 问线圈应如何绕法 (即求绕线密度)。

解: 如图 3-14 所示, 设球内外的磁场 $\mathbf{H}$ 分别为

$$\mathbf{H}_1 = e_z C$$

$$\mathbf{H}_2 = 0$$

则球面上所需的面电流 $\mathbf{J}_s$ 为

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = -\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}_1 = -C \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z = e_\phi C \sin \theta$$

在绕线圈时, 面电流 $\mathbf{J}_s$ 相当于“每米的安匝数”。故应有: 每米的匝数正比于 $\sin \theta$ 。

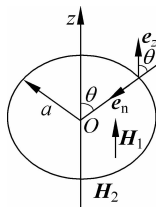


图 3-14 例题 3-25 图

3.3 主教材习题解答

【3-1】 设点电荷的运动速度为 v , 证明磁感应强度 $\mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E}$, 其中 $\mathbf{E}$ 为点电荷产生的电场强度。

证明: 以速度 v 运动的点电荷 q , 可以看成一电流元, 则

$$Idl = \mathbf{J} dV = \rho v dV = qv$$

故电流元的磁场为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times \mathbf{R}}{R^2} = \mu_0 v \times \frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{R}}{R^2} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E}$$

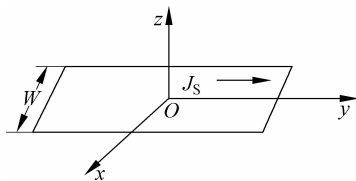


图 3-15 习题 3-2 图

【3-2】 在 xOy 平面有一宽度为 W 的无限长导电板, 其上电流密度为 $\mathbf{J}_s = J_0 \mathbf{e}_y$, 求 xOz 平面任一点的磁感应强度, 如图 3-15 所示。

解: 在空间取场点 (x, z) , 在导电平板上 x' 位置取宽度为 dx' 的细长电流, 该细电流在场点产生的磁场为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi \rho^2} \mathbf{e}_y \times \boldsymbol{\rho} = \frac{\mu_0 J_0 dx'}{2\pi [(x-x')^2 + z^2]} \mathbf{e}_y \times [((x-x')\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z)]$$

导电平板上的电流产生的总场为

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2\pi} \int_{-W/2}^{W/2} \frac{(-x+x')\mathbf{e}_z + z\mathbf{e}_x}{(x-x')^2 + z^2} dx' \\ &= \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} \left\{ \mathbf{e}_z \ln \frac{(x-W/2)^2 + z^2}{(x+W/2)^2 + z^2} + 2\mathbf{e}_x \left(\arctan \frac{x+W/2}{z} - \arctan \frac{x-W/2}{z} \right) \right\} \end{aligned}$$

【3-3】 在真空中, 电流分布如下, 求磁感应强度。

$$\mathbf{J} = 0 \quad (0 \leq \rho \leq a)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\rho}{b} \mathbf{e}_z \quad (a < \rho < b)$$

$$\mathbf{J}_s = J_0 \mathbf{e}_z \quad (\rho = b)$$

$$\mathbf{J} = 0 \quad (\rho > b)$$

解: 由题意, 电流具有轴对称分布, 磁场也具有轴对称分布, 因此磁场可用安培环路定律计算。围绕 z 轴线做一半径为 ρ 的圆环, 利用安培环路定律

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

等式左边

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_{\phi} 2\pi\rho$$

等式右边

$$I = \begin{cases} 0, & 0 \leq \rho \leq a \\ \int_a^{\rho} \frac{\rho}{b} \cdot 2\pi\rho d\rho = \frac{2\pi(\rho^3 - a^3)}{3b}, & a < \rho < b \\ \int_a^b \frac{\rho}{b} \cdot 2\pi\rho d\rho + J_0 \cdot 2\pi b = \frac{2\pi(b^3 - a^3)}{3b} + 2\pi b J_0, & \rho > b \end{cases}$$

因此有

$$B_{\phi} = \begin{cases} 0 & (0 < \rho < a) \\ \frac{\mu_0(\rho^3 - a^3)}{3b\rho} & (a < \rho < b) \\ \mu_0\left(\frac{b^3 - a^3}{3b} + bJ_0\right)/\rho & (\rho > b) \end{cases}$$

【3-4】 一个半径为 a 的导体球带电量为 q , 当球体以均匀角速度 ω 绕直径 (z 轴) 旋转时, 试求球心处的磁感应强度。

解: 由题意知, 导体球的电荷面密度 $\rho_s = q/(4\pi a^2)$, 在球面上任取一点 P , OP 与 z 轴之间的夹角为 θ , 则在 P 点的线速度 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega a \sin\theta \mathbf{e}_{\phi}$, 所以

$$\mathbf{J}_s = \rho_s \mathbf{v} = \frac{q}{4\pi a^2} \omega a \sin\theta \mathbf{e}_{\phi} = \frac{q\omega \sin\theta}{4\pi a} \mathbf{e}_{\phi}$$

把球面划分为无限小宽度的细圆环 $d\mathbf{l} = a d\theta$, 则每个小细圆环在球心处产生的磁感应强度为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 a^2 \sin^2\theta J_s d\mathbf{l}}{2(a^2 \sin^2\theta + a^2 \cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 q \omega \sin^3\theta}{8\pi a} d\theta \mathbf{e}_z$$

所以,

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q \omega}{8\pi a} \mathbf{e}_z \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \frac{\mu_0 q \omega}{6\pi a} \mathbf{e}_z$$

【3-5】 已知无限长导体圆柱半径为 a , 其内部有一半径为 b 的圆柱形空腔, 导体圆柱的轴线与圆柱形空腔的轴线相距为 c , 如图 3-16 所示。若导体中均匀分布的电流密度为 $\mathbf{J} = J_0 \mathbf{e}_z$, 试求空腔中的磁感应强度。

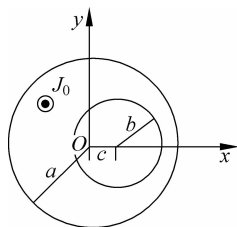


图 3-16 习题 3-5 图

解: 利用叠加原理, 空腔中的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$

其中 $\mathbf{B}_1$ 为电流均匀分布的实圆柱的磁感应强度; $\mathbf{B}_2$ 为与此圆柱形空腔互补而电流密度与实圆柱的电流密度相反的载流圆柱的磁感应强度。利用安培环路定律:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 J_0}{2} \rho_1 \mathbf{e}_{\phi 1} = \frac{\mu_0 J_0}{2} \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\rho}_1$$

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 J_0}{2} \rho_2 \mathbf{e}_{\phi 2} = -\frac{\mu_0 J_0}{2} \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\rho}_2$$

式中 $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2$ 分别为从圆柱中心轴和圆柱空腔中心轴指向场点的矢量。因此

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2} \mathbf{e}_z \times (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2) = \frac{\mu_0 J_0}{2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{c}$$

其中 $\mathbf{c}$ 为从圆柱中心轴指向圆柱空腔中心轴的矢量。

【3-6】 两个平行无限长直导线的距离为 a , 分别载有同向的电流 I_1, I_2 , 求单位长度所受到的力。

解: 设两个导线的电流方向相同, 导线 1 与 z 轴重合, 根据安培环路定律, 其在导线 2 处产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \mathbf{e}_\phi$$

导线 2 上的电流元 $I_2 dl_2$ 在导线 1 的磁场受力为

$$d\mathbf{F} = I_2 dl_2 \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl_2}{2\pi a} = -\mathbf{e}_\rho \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl_2}{2\pi a}$$

导线 2 单位长度受力为

$$\mathbf{F} = -\mathbf{e}_\rho \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

【3-7】 在圆柱坐标系中, 已知电流密度为 $\mathbf{J} = kr^2 \mathbf{e}_z (r \leq a)$ 。(1) 求磁感应强度; (2) 证明 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ 。

解: (1) 求磁感应强度 $\mathbf{B}$

方法一: 利用安培环路定律求 $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \oint H_\phi dl = 2\pi r H_\phi \\ I &= \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int J_z dS = \int kr^2 2\pi r dr = k\pi r^4 / 2 \end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{B}_\phi = \mathbf{e}_\phi \mu_0 H_\phi = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 k r^3}{4}$$

方法二: 由 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ 求解 $\mathbf{B}$

由于圆柱对称性, 可知 H_ϕ 仅为 r 的函数; 或者说, 由于仅有 z 方向的 $\mathbf{J}$, 则 $\nabla \times \mathbf{H}$ 仅有旋度的 z 分量, 而磁场仅有 $\mathbf{e}_\phi$ 分量, 所以

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) \right] = \mathbf{e}_z k r^2$$

得

$$\frac{1}{r} H_\phi + \frac{\partial H_\phi}{\partial r} = k r^2$$

解此微分方程可得

$$\mathbf{B}_\phi = \mu_0 H_\phi \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 k r^3}{4}$$

(2) 证明 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$

在圆柱坐标系中, 由于磁场仅有 $\mathbf{e}_\phi$ 分量, 所以

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_r \frac{\mu_0}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) \right] - \mathbf{e}_r \mu_0 \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = \mathbf{e}_z \mu_0 k r^2$$

故

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

【3-8】 一个沿 z 方向分布的电流为 $J_z = r^2 + 4r, (r \leq a)$, 求磁感应强度。

解: 用安培环路定律求解。在 $r \leq a$ 处的磁场为

$$2\pi r B_\phi = \mu_0 I' = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}' = \mu_0 \int_0^r (r'^2 + 4r') 2\pi r' dr' = \mu_0 2\pi \left(\frac{r^4}{4} + \frac{4r^3}{3} \right)$$

所以

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_\phi \mu_0 \left(\frac{r^3}{4} + \frac{4r^2}{3} \right)$$

在 $r \geq a$ 处的磁场为

$$2\pi r B_\phi = \mu_0 I = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_0^a (r^2 + 4r) 2\pi r dr = \mu_0 2\pi \left(\frac{a^4}{4} + \frac{4a^3}{3} \right)$$

所以

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_\phi \mu_0 \left(\frac{a^4}{4} + \frac{4a^3}{3} \right) / r$$

【3-9】 空心长直导体管的内半径为 R_0 , 管壁厚度为 d , 管中电流为 I 。试求空间 ($0 \leq r < \infty$) 中的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 和磁场强度 $\mathbf{H}$, 并验证分别满足的边界条件。

解: 用安培环路定律求解, 设电流 I 流出纸面

(1) $r < R_0$ 时, $\mathbf{B}_1 = 0, \mathbf{H}_1 = 0$ 。

(2) $R_0 \leq r < R_0 + d$ 时, 半径为 r 的圆内的电流 I' 为

$$I' = \frac{I}{[\pi(R_0 + d)^2 - \pi R_0^2]} (\pi r^2 - \pi R_0^2)$$

则

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_2$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{e}_\phi \frac{I(r^2 - R_0^2)}{2\pi r[(R_0 + d)^2 - R_0^2]}$$

当 $r \geq R_0 + d$ 时, $\mathbf{B}_3 = \mu_0 \mathbf{H}_3$

$$\mathbf{H}_3 = \mathbf{e}_\phi \frac{I}{2\pi r}$$

验证边界条件:

在 $r = R_0$ 界面上, 有 $H_{1\phi} = H_{2\phi} = 0$, 故满足的 $H_{1t} = H_{2t}$ 的边界条件。

在 $r = R_0 + d$ 界面上,

$$H_{2\phi} = \frac{I}{2\pi(R_0 + d)} = H_{3\phi}$$

可见, $H_{2t} = H_{3t}$

【3-10】 无限长直电流 I 垂直于磁导率分别为 $\mu_1 (z > 0$ 空间)、 $\mu_2 (z < 0$ 空间) 的两种磁介质的分界面 ($z = 0$), 试求两种媒质中的磁感应强度 $\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{B}_2$ 。

解: 由安培环路定律, 有

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi H_\phi = \mathbf{e}_\phi \frac{I}{2\pi r}$$

利用边界条件 $H_{1t} = H_{2t}$, 即 $H_{1t} = H_{2t} = H_\phi$,

有

$$z > 0: \mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1 = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_1 I}{2\pi r};$$

$$z < 0: \mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2 = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_2 I}{2\pi r}$$

【3-11】 间距为 d 的相互平行的无限大金属板, 分别流过大小相同、方向相反的均匀电流密度 $\mathbf{J}_s$ 。设电流沿 z 轴方向, 试求空间各处的磁场强度 $\mathbf{H}$ 。

解: 由于两块板都很大, 因此, 其电流密度 $\mathbf{J}_s$ 都分布于两板的内侧, 依据边界条件 $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s = \mathbf{e}_z J_s$, 例如对于下板, 则有

$$\mathbf{e}_y \times \mathbf{H} = -\mathbf{e}_z J_s$$

所以

$$H_x = J_s$$

由于板很大, 板间磁场均匀分布, 所以两板间磁场为

$$H_x = J_s$$

两板之外 $\mathbf{H} = 0$ 。

【3-12】 在 $x < 0$ 的半空间中充满磁导率为 μ 的均匀介质, $x > 0$ 的半空间为真空, 如图 3-17 所示。今有一电流沿 z 轴流动, 求磁场强度 $\mathbf{H}$ 。

解: 利用安培环路定律, 有

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \pi r H_{\phi 1} + \pi r H_{\phi 2} = I$$

且

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1 (x > 0), \quad \mathbf{B}_2 = \mu \mathbf{H}_2 (x < 0)$$

利用边界条件 $B_{1n} = B_{2n}$, 有

$$B_{\phi 1} = \mu_0 H_{\phi 1} = \mu H_{\phi 2} = B_{\phi 2}$$

故

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{\pi(\mu_0 + \mu)r}, & (x < 0) \\ \mathbf{e}_\phi \frac{\mu I}{\pi(\mu_0 + \mu)r}, & (x > 0) \end{cases}$$

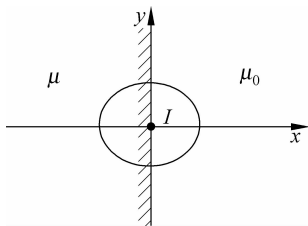


图 3-17 习题 3-12 图

【3-13】 已知圆柱坐标系中磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的分布为 $\mathbf{B} = 0 (0 < r < a)$, $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi (r > b)$,

$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} [(r^2 - a^2)/(b^2 - a^2)] \mathbf{e}_\phi (a < r < b)$ 。求空间各处的电流密度。

解: (1) 求 $0 < r < a$ 处的 $\mathbf{J}$ 。

由于在 $0 < r < a$ 区域 $\mathbf{B} = 0$, 所以

$$\mathbf{J} = 0 \quad 0 < r < a$$

(2) 求 $a < r < b$ 处的 $\mathbf{J}$ 。

由于在 $a < r < b$ 区域

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi r} \left[\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right] = F(r)$$

所以

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) = \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{I}{2\pi} \cdot \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right] = \mathbf{e}_z \frac{I}{\pi} \cdot \frac{1}{b^2 - a^2} = \mathbf{e}_z J_z$$

故

$$\mathbf{J} = e_z J_z = e_z \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}, \quad a < r < b$$

(3) 求 $r > b$ 处的 $\mathbf{J}$ 。

由于在 $r > b$ 区域: $H_\phi = \frac{I}{2\pi r}$

所以

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

故

$$\mathbf{J} = 0 \quad r > b$$

【3-14】 证明在两种媒质界面上的磁化电流面密度为 $\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{e}_n \times (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)$ 。其中, $\mathbf{e}_n$ 的方向为从媒质 2 指向媒质 1 的单位法向矢量, $\mathbf{M}_1$ 、 $\mathbf{M}_2$ 分别为两种媒质的磁化强度。

证明: 考察两种不同导磁媒质的分界面, 在媒质分界面上任意一点 P 处, 取一矩形回路 $abcd$, ab 和 cd 两边平行于分界面, 长度 Δl_1 足够小, 使得磁化强度在各处可视为相同。

令 $\Delta l_2 \rightarrow 0$, 根据 $\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = I_m$, 当分界面上存在面磁化电流(磁化电流面密度 $\mathbf{J}_{ms}$)时, 则有

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = M_{t1} \cdot \Delta l_1 - M_{t2} \cdot \Delta l_2 = I_m,$$

$$M_{t1} - M_{t2} = \frac{I_m}{\Delta l_1} = J_m$$

写成矢量型式为

$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{e}_n \times (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)$$

【3-15】 由两层电导率不同的导体构成无限长同轴导电圆柱体, 其中内层半径为 R_1 , 外层半径为 R_2 , 内外导体的电导率分别为 σ_1 、 σ_2 , 如图 3-18 所示。导体中总的轴向电流为 I , 求导体圆柱内外的磁场分布。

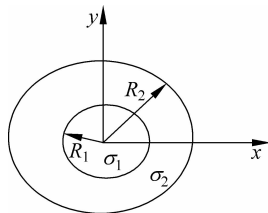


图 3-18 习题 3-15 图

解: 由于有两层电导率不同的导体, 应先确定导体柱内的电流分布, 然后求 $\mathbf{B}$ 。在导体内电场只有 z 分量, 根据边界条件 $E_{1z} = E_{2z}$, 所以两层导体中电场相同, 设为 E_z 。于是两层导体中的电流密度为

$$\mathbf{J}_1 = \sigma_1 E_z \mathbf{e}_z \quad (r < R_1)$$

$$\mathbf{J}_2 = \sigma_2 E_z \mathbf{e}_z \quad (R_1 < r < R_2)$$

由 $I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \int \mathbf{J}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 = [\pi R_1^2 \sigma_1 + \pi(R_2^2 - R_1^2) \sigma_2] E_z$, 得

$$E_z = \frac{I}{\pi R_1^2 \sigma_1 + \pi(R_2^2 - R_1^2) \sigma_2} \text{ V/m}$$

由此得到电流分布:

$$\mathbf{J}_1 = \sigma_1 E_z \mathbf{e}_z = \frac{\sigma_1 I}{\pi R_1^2 \sigma_1 + \pi(R_2^2 - R_1^2) \sigma_2} \mathbf{e}_z \quad \text{A/m}^2$$

$$\mathbf{J}_2 = \sigma_2 E_z \mathbf{e}_z = \frac{\sigma_2 I}{\pi R_1^2 \sigma_1 + \pi(R_2^2 - R_1^2) \sigma_2} \mathbf{e}_z \quad \text{A/m}^2$$

利用安培环路定律,可求出圆柱内外的 $\mathbf{B}$ 。

当 $r < R_1$ 时, $\oint \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B_1 = \mu_0 \int \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 = \mu_0 J_1 \pi r^2$, 于是得

$$\mathbf{B}_1 = e_\phi \frac{1}{2} \mu_0 J_1 r = e_\phi \frac{\mu_0 r \sigma_1 I}{2[\pi R_1^2 \sigma_1 + \pi(R_2^2 - R_1^2) \sigma_2]} \text{T}$$

当 $R_1 < r < R_2$ 时, $\oint \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B_2 = \mu_0 J_1 \pi R_1^2 + \mu_0 J_2 \pi(r^2 - R_1^2)$, 于是得

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2 &= e_\phi \left\{ \frac{\mu_0 R_1^2 (\sigma_2 - \sigma_1) I}{2r[\pi R_1^2 \sigma_1 + \pi(R_2^2 - R_1^2) \sigma_2]} + \frac{\mu_0 r \sigma_2 I}{2[\pi R_1^2 \sigma_1 + \pi(R_2^2 - R_1^2) \sigma_2]} \right\} \\ &= e_\phi \frac{\mu_0 R_1^2 (\sigma_2 - \sigma_1) I + \mu_0 r^2 \sigma_2 I}{2r[\pi R_1^2 \sigma_1 + \pi(R_2^2 - R_1^2) \sigma_2]} \text{T} \end{aligned}$$

当 $r > R_2$ 时, 有 $\oint \mathbf{B}_3 \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B_3 = \mu_0 I$, 于是得

$$\mathbf{B}_3 = e_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{T}$$

【3-16】 一根很细的圆铁杆和一个很薄的圆铁盘样品放在磁场 $\mathbf{B}_0$ 中,并使它们的轴与 $\mathbf{B}_0$ 平行(铁的磁导率为 μ)。求两样品的 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$ 和磁化强度 $\mathbf{M}$ 。

解: 对于很细的圆铁杆样品,根据边界条件 $H_{1t} = H_{2t}$, 有

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \frac{\mu \mathbf{B}_0}{\mu_0}$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{B}_0$$

对于很薄的圆铁盘样品,根据边界条件 $B_{1n} = B_{2n}$, 有

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu}$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \mathbf{B}_0$$

【3-17】 设双传输线的半径为 a , 长度为 l , 间距为 D , 试求两线传输线的自感。

解: 根据安培环路定理和叠加原理,可求出双导线之间的平面上任意一点的磁感应强度为

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right) \mathbf{e}_y$$

穿过两导线之间轴线方向的外磁链为

$$\Psi_0 = \int_a^{D-a} \mathbf{B}(x) \cdot \mathbf{e}_y l dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^{D-a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right) dx = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{D-a}{a}$$

由此得到平行双线传输线的外自感为

$$L_0 = \frac{\Psi_0}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D-a}{a}$$

而两根导线的内自感为

$$L_i = 2 \times \frac{\mu_0 l}{8\pi} = \frac{\mu_0 l}{4\pi}$$

故得平行双线传输线的自感为

$$L = L_i + L_0 = \frac{\mu_0 l}{4\pi} + \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D-a}{a}$$

【3-18】 如图 3-19 所示,两个互相平行且共轴的圆线圈,半径分别为 a_1, a_2 , 中心相距为 d 。设 $a_1 \ll d$, 或者 $a_2 \ll d$ 。求两线圈之间的互感。

解: $d\mathbf{l}_1$ 与 $d\mathbf{l}_2$ 之间的夹角 $\theta = \phi_2 - \phi_1$, $d\mathbf{l}_1 = a_1 d\phi_1$, $d\mathbf{l}_2 = a_2 d\phi_2$, 以及

$$R = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = [d^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos(\phi_2 - \phi_1)]^{1/2}$$

由纽曼公式得

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_2 d\mathbf{l}_1 \cos\theta}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a_1 a_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) d\phi_2 d\phi_1}{[d^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos(\phi_2 - \phi_1)]^{1/2}} \\ &= \frac{\mu_0 a_1 a_2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{[d^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos\theta]^{1/2}} \end{aligned}$$

根据已知条件 $d \gg a_1$, 可进行近似

$$\begin{aligned} [d^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos\theta]^{-1/2} &\approx [d^2 + a_2^2]^{-1/2} \left[1 - \frac{2a_1a_2\cos\theta}{d^2 + a_2^2} \right]^{-1/2} \\ &\approx [d^2 + a_2^2]^{-1/2} \left[1 + \frac{a_1a_2\cos\theta}{d^2 + a_2^2} \right] \end{aligned}$$

于是

$$M \approx \frac{\mu_0 a_1 a_2}{2 \sqrt{d^2 + a_2^2}} \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{a_1a_2\cos\theta}{d^2 + a_2^2} \right] \cos\theta d\theta = \frac{\mu_0 \pi a_1^2 a_2^2}{2 [d^2 + a_2^2]^{3/2}}$$

【3-19】 利用磁场储存能量, 确定具有内导体半径 a 和一层很薄的外导体内半径 b 的空气同轴传输线的单位长度电感。

解: 用磁场能量储存, 确定具有坚实的内导体半径 a 和一层很薄的外导体内半径 b 的空气同轴传输线的单位管长电感。

假设电流在内导体流动并在外导体返回, 磁场能量储存在每单位长度导体内

$$W'_{m1} = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^b B_{\phi 1}^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a^4} \int_0^a r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \quad \text{J/m}$$

单位管长磁性能量储存在内外部导体之间的区域,

$$W'_{m2} = \frac{1}{2\mu_0} \int_a^b B_{\phi 2}^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \text{J/m}$$

因此有

$$L' = \frac{2}{I^2} (W'_{m1} + W'_{m2}) = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \text{H/m}$$

【3-20】 一铁磁芯环, 内半径为 30 cm, 外半径为 40 cm, 截面为矩形, 高为 5 cm, 相对磁导率为 500, 均匀绕线圈 500 匝, 电流强度为 1 A。分别计算磁芯中的最大和最小磁感应强度, 以及穿过磁芯截面的磁通量。

解: 在铁磁芯环中取半径为 R 的同心圆环, 对于该圆环回路利用安培环路定律, 得

$$2\pi R H_{\phi} = NI$$

$$H_{\phi} = \frac{NI}{2\pi R}$$

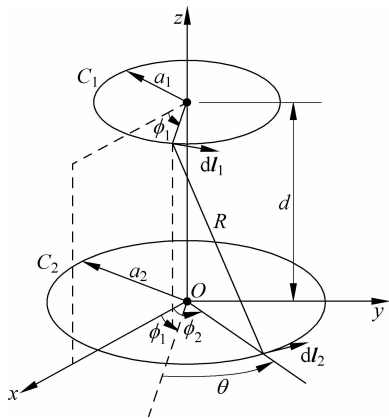


图 3-19 习题 3-18 图

$$B = e_{\phi} \mu \frac{NI}{2\pi R}$$

当 $R=30\text{cm}$, 磁感应强度最大, 为

$$B = e_{\phi} \mu \frac{NI}{2\pi R} = e_{\phi} \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 500 \times 500 \times 1}{2\pi \times 30 \times 10^{-2}} = 0.1667\text{T}$$

当 $R=40\text{cm}$, 磁感应强度最小, 为

$$B = e_{\phi} \mu \frac{NI}{2\pi R} = e_{\phi} \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 500 \times 500 \times 1}{2\pi \times 40 \times 10^{-2}} = 0.125\text{T}$$

穿过磁芯截面的磁通量为

$$\begin{aligned}\Phi^m &= \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{0.3}^{0.4} \frac{\mu NI h}{2\pi R} dR = \frac{\mu NI}{2\pi} \ln \frac{4}{3} \\ &= 2 \times 10^{-7} \times 500 \times 500 \times 0.05 \times 0.2877 \\ &= 7.2 \times 10^{-4} \text{Wb}\end{aligned}$$

【3-21】 在截面为正方形 $a \times a$, 半径为 $R(R \gg a)$ 的磁环上, 密绕了两个线圈, 一个线圈为 m 匝, 另一个为 n 匝。磁芯的磁导率为 μ 。试分别近似计算两个线圈的自感及互感。

解: 近似认为密绕在磁环上的线圈无漏磁及磁环中磁场相等。

根据安培环路定律

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$$

式中 N 为线圈匝数。取闭合回路沿磁环中心线, 则磁环中

$$H = \frac{NI}{2\pi R}, B = \frac{\mu NI}{2\pi R}$$

由于 $R \gg a$, 穿过磁环截面的磁通近似为

$$\Phi^m = BS = Ba^2 = \frac{\mu a^2 NI}{2\pi R}$$

因此

$$\begin{aligned}\Psi_{11}^m &= m\Phi_1^m = \frac{\mu a^2 m^2 I_1}{2\pi R}, \quad L_1 = \frac{\Psi_{11}^m}{I_1} = \frac{\mu a^2 m^2}{2\pi R} \\ \Psi_{22}^m &= n\Phi_2^m = \frac{\mu a^2 n^2 I_2}{2\pi R}, \quad L_2 = \frac{\Psi_{22}^m}{I_2} = \frac{\mu a^2 n^2}{2\pi R} \\ \Psi_{21}^m &= n\Phi_1^m = \frac{\mu a^2 mn I_1}{2\pi R}, \quad M = \frac{\Psi_{21}^m}{I_1} = \frac{\mu a^2 mn}{2\pi R}\end{aligned}$$

【3-22】 两个长的矩形线圈, 放置于同一平面上, 长度分别为 l_1 和 l_2 , 宽度分别为 w_1 和 w_2 , 两个线圈最近的边之间的距离为 S , 如图 3-20 所示。设 $l_1 \gg l_2, l_1 \gg S$ 。

证明: 两线圈的互感为

$$M = \frac{\mu_0 l_2}{2\pi} \ln \frac{S + w_2}{S \left[1 + \frac{w_2}{S + w_1} \right]}$$

证明: 设上边回路内的电流为 I_1 , 它在下边回路内的 r 处产生的磁感应强度可以近似表示为

$$B = \frac{I_1 \mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + w_1} \right)$$

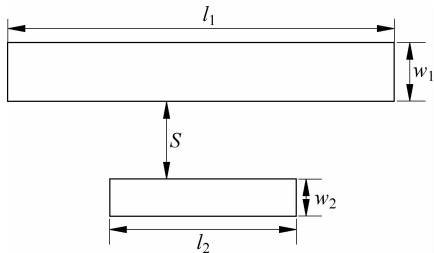


图 3-20 习题 3-22 图

与回路 2 相交链的磁链 Ψ_{12} 为

$$\begin{aligned}\Psi_{12} &= \frac{\mu_0 I_1 l_2}{2\pi} \int_S^{S+w_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+w_1} \right) dr = \frac{\mu_0 I_1 l_2}{2\pi} \left[\ln \frac{S+w_2}{S} - \ln \frac{S+w_2+w_1}{S+w_1} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I_1 l_2}{2\pi} \ln \frac{(S+w_2)(S+w_1)}{S(S+w_2+w_1)} = \frac{\mu_0 I_1 l_2}{2\pi} \ln \frac{S+w_2}{S \left(1 + \frac{w_2}{S+w_1} \right)}\end{aligned}$$

则

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 l_2}{2\pi} \ln \frac{S+w_2}{S \left(1 + \frac{w_2}{S+w_1} \right)}$$

同样,可以对上边回路求出下边回路相同的值,即

$$M = M_{12} = M_{21}$$

【3-23】 已知两个相互平行,间隔为 d 的共轴线圈,其中一个线圈的半径为 a ($a \ll d$),另一个线圈的半径为 b ,如图 3-21 所示。求两线圈的互感。

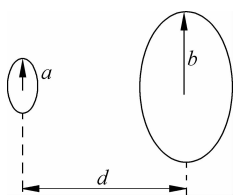


图 3-21 习题 3-23 图

解: 设线圈 C_1 半径为 b ,其中的电流为 I_1 ,在轴线上 d 处产生的磁场为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1 b^2}{2(b^2 + d^2)^{3/2}}$$

因 $d \gg a$,可认为 B_1 在 C_2 (半径为 a) 包围的面积上是均匀的,所以 Ψ 的近似值为

$$\Psi_{12} = B_1 S_2 = \frac{\mu_0 I_1 b^2}{2(b^2 + d^2)^{3/2}} \pi a^2$$

根据互感系数的定义,得

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(b^2 + d^2)^{3/2}}$$

【3-24】 一无限长直导线与一半径为 a 的圆环共面,圆环圆心到直导线的距离为 d ($a \ll d$),如图 3-22 所示。求直导线与圆环之间的互感。(提示:用圆环产生的矢量位在直导线回路的磁通计算更为方便)

解: 因为满足 $d \gg a$ 的条件,此题以半径为 a 的小圆环作为磁偶极子,用磁偶极子的矢量磁位 $\mathbf{A}$ 求互磁通,再求互感。设小圆环中的电流为 I ,已知磁偶极子的矢量磁位为(选用球坐标系,原点在 O 点)

$$A_\phi = \frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^2} \sin\theta$$

式中 $P_m = \pi I a^2$ 为磁偶极矩, $\sin\theta = \sin 90^\circ = 1$ (因为圆环和直导线共面,所以 $\theta = 90^\circ$); $r^2 = d^2 + z^2$ 。

所以

$$A_\phi = \frac{\mu_0 I a^2}{4(d^2 + z^2)}$$

小圆环与长直导线间的互磁通 Φ_{12} 为

$$\Phi_{12} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{-\infty}^{+\infty} A_z dz = \int_{-\infty}^{+\infty} A_\phi \cos\phi dz = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\mu_0 I a^2}{4(d^2 + z^2)} \frac{d}{\sqrt{d^2 + z^2}} dz = \frac{\mu_0 I a^2}{2d}$$

则互感 M_{12} 为

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I} = \frac{\mu_0 a^2}{2d}$$

【3-25】 在上题中,假设长直导线的电流为 I_1 ,线圈的电流为 I_2 ,试证明:两电流间的相互作用力为 $F_m = \mu_0 I_1 I_2 (\sec\alpha - 1)$ 。 α 是圆环对直线最接近圆环的点所张的角,如图 3-22 所示。

解: 用安培力公式 $d\mathbf{F} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1$ 计算。将圆环置于 xOz 平面,取 $d\mathbf{l}_2 = a d\phi' \mathbf{e}_\phi$ 在 $d\mathbf{l}_2$ 处,由直导线电流 I_1 产生的磁感应强度 $\mathbf{B}_1$ 为

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d + a \cos\phi')} \mathbf{e}_y$$

元电流 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 受力为

$$d\mathbf{F} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a d\phi'}{2\pi(d + a \cos\phi')} \mathbf{e}_r$$

其中, $a = d \sin\alpha$, $d\mathbf{F}$ 在 x 轴上的分量 dF_x 为

$$\begin{aligned} dF_x &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 a \cos\phi' d\phi'}{2\pi(d + a \cos\phi')} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left(1 - \frac{d}{d + d \sin\alpha \cos\phi'} \right) d\phi' \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{1 + \sin\alpha \cos\phi'} \right) d\phi' \end{aligned}$$

$$\text{则 } F_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_0^\pi 2 \left(1 - \frac{1}{1 + \sin\alpha \cos\phi'} \right) d\phi'$$

据查积分表,可得上式积分为

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \left[\phi' - \frac{2}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} \tan \frac{\phi'}{2} \right) \right]_0^\pi \\ &= \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{1}{\cos\alpha} \right) = \mu_0 I_1 I_2 (1 - \sec\alpha) \end{aligned}$$

由于有 $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, $\sec\alpha \geq 1$, $1 - \sec\alpha \leq 0$, 即若 I_1 方向向上, I_2 方向顺时针旋转, 则 F_x 为 $-\mathbf{e}_x$ 方向, 是吸力; 若 I_2 方向相反, 则 F_x 为 $\mathbf{e}_x$ 方向, 是斥力。但其总大小。 $F_x = \mu_0 I_1 I_2 (\sec\alpha - 1)$

$d\mathbf{F}$ 在 y 轴上的分量 dF_y 为

$$dF_y = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a \sin\phi' d\phi'}{2\pi(d + a \cos\phi')}$$

则

$$F_y = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \sin\phi'}{d + a \cos\phi'} d\phi' = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} [\ln(d + a \cos\phi')]_0^{2\pi} = 0$$

即圆环所受的合力为 $\mathbf{F} = \mathbf{e}_x F_x$, 也即直导线与圆环相互作用力 $\mathbf{F}$ 的大小为

$$F_x = \mu_0 I_1 I_2 (\sec\alpha - 1)$$

【3-26】 设一无限长直细导线与一矩形回路共面, 其尺寸及电流方向如图 3-23 所示, 其中电流单位为安, D 、 b 、 a 单位均为米。试利用虚位移法计算直导线和矩形回路之间的力。

解: 设向下为沿 x 向, 长直细导线与一矩形回路之间的互感为

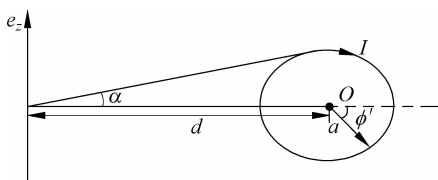


图 3-22 习题 3-24 和习题 3-25 图

$$M_{21} = \frac{1}{I_1} \int_D^{b+D} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} a dx = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{b+D}{D}$$

由于 $M_{12} = M_{21}$, 则系统的互感能量为

$$W_{21} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} M_{21} I_1 I_2 \right) = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{b+D}{D} I_1 I_2$$

由于自感能量不变, 所以, 利用虚位移法磁场对矩形回路的作用力为

$$F_x = I_1 I_2 \frac{dW_{21}}{dD} \bigg|_{I=\text{const.}} = - \frac{\mu_0 ab I_1 I_2}{2\pi D(b+D)} \quad \text{N}$$

此力为沿 $-e_x$ 方向, 即两回路表现为引力。

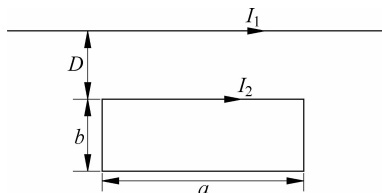


图 3-23 习题 3-26 图

3.4 典型考研试题解析

【考研题 3-1】 (北京交通大学 2000 年) 半径为 R 的小球面上有沿 e_ϕ 方向流动的均匀面电流, 其密度为 J_s , 求球心处的磁感应强度矢量 B 。

解: 根据毕奥-萨伐尔定律, 面分布电流产生的磁场为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \times \mathbf{e}_R}{R^2} dS'$$

在球坐标系下, $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') = J_s \mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{e}_R = -\mathbf{e}_r$, $dS' = r^2 \sin\theta d\phi d\theta$, 故

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{J_s \mathbf{e}_\phi \times (-\mathbf{e}_r)}{r^2} r^2 \sin\theta d\phi d\theta = - \frac{J_s \mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{e}_\theta \sin\theta d\theta d\phi$$

将积分转换到直角坐标系下得

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= - \frac{J_s \mu_0}{4\pi} \left\{ \mathbf{e}_x \int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{e}_\theta \sin\theta \cos\theta d\theta \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{e}_y \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{e}_\theta \sin\theta \cos\theta d\theta - \mathbf{e}_z \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{e}_\theta \sin^2\theta d\theta \right\} \\ &= \mathbf{e}_z \frac{J_s \mu_0}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \mathbf{e}_z \frac{J_s \mu_0 \pi}{4} \end{aligned}$$

【考研题 3-2】 (北京邮电大学 1999 年) 试用两种方法计算同轴电缆传输线单位长度的电感。假设内导体的外直径为 $2a$, 外导体的内直径为 $2b$, 外导体的厚度可以忽略, 同轴线由理想介质和理想导体构成。

解: 假设同轴线通过的电流为 I , 理想介质的磁导率为 μ 。根据安培环路定理, 磁场的分布为

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{Ir}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\phi, & r < a \\ \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi, & a < r < b \end{cases}$$

方法一: 单位长度同轴线的磁场能量为

$$W_m = \iiint_V \frac{1}{2} \mu H^2 dV = \frac{1}{2} \mu_0 \int_0^a \left(\frac{Ir}{2\pi a^2} \right)^2 2\pi r dr + \frac{1}{2} \mu \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

根据 $W_m = \frac{1}{2} L I^2$, 得

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

方法二：穿过同轴线单位长度的磁通为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} dr, & r < a \\ \frac{\mu I}{2\pi r} dr, & a < r < b \end{cases}$$

在 $r \leq a$ 区域, 铰链的电流为 $I' = \frac{r^2 I}{a^2}$, 在 r 处穿过单位长度的磁链积分元为

$$d\Psi = \frac{\mu_0 I r^3}{2\pi a^4} dr$$

穿过单位长度的磁链

$$\Psi_0 = \int_0^a \frac{\mu_0 I r^3}{2\pi a^4} dr = \frac{\mu_0 I}{8\pi}$$

在 $r > a$ 区域, 铰链的电流为 I , 故单位长度的磁链为

$$\Psi_1 = \int_a^b \frac{\mu I}{2\pi r} dr = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

根据 $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 = LI$ 得

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

【考研题 3-3】 (电子科技大学 2007 年) 两个自感分别为 L_1 和 L_2 的单匝长方形线圈放在同一平面内, 线圈的长度分别为 l_1 和 l_2 ($l_1 \gg l_2$), 宽度分别为 w_1 和 w_2 , 两个线圈中分别通有电流分别为 I_1 和 I_2 。两线圈的距离 $d \ll l_1$, 如图 3-24 所示。

求: (1) 两线圈间的互感;

(2) 系统的磁场能量。

解: (1) 由于两线圈的距离很近, 并且 $l_1 \gg l_2$, 故线圈 2 处的磁场可以看作是两根相距为 w_1 , 电流方向相反的无限长直导线(线圈 1)产生的磁场, 即

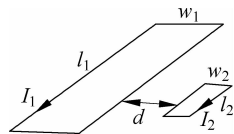


图 3-24 考研题 3-3 图

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left(\frac{1}{r - w_1} - \frac{1}{r} \right) \mathbf{e}_\phi$$

因此, 两线圈的互感为

$$\begin{aligned} M &= \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{1}{I_1} \int_{d+w_1}^{d+w_1+w_2} B l_2 dr = \frac{\mu_0 l_2}{2\pi} \int_{d+w_1}^{d+w_1+w_2} \left(\frac{1}{r - w_1} - \frac{1}{r} \right) dr \\ &= \frac{\mu_0 l_2}{2\pi} \ln \frac{(d + w_1)(d + w_2)}{d(d + w_1 + w_2)} \end{aligned}$$

(2) 系统的磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

【考研题 3-4】 (电子科技大学 2005 年) 无限长直导线附近有一共面的矩形线框, 尺寸为 $a \times b$, 与直导线相距为 c 。试求:

(1) 直导线与线框之间的互感;

(2) 若线框平面绕直导线旋转 θ 角度, 试说明直导线与线框之间的互感有无变化?

(3) 若线框平面绕自身的中心轴旋转 θ 角度, 试说明直导线与线框之间的互感有无变化?

解: (1) 设直导线中的电流为 I , 则有

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \mathbf{e}_\phi$$

$$\Psi = \frac{\mu_0 b I}{2\pi} \ln \frac{a+c}{c}$$

故长直导线与线框之间的互感为

$$M = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{a+c}{c}$$

(2) 当线框平面绕直导线旋转 θ 角度时, 穿过线框的磁通没有发生变化, 因此, 直导线与线框之间的互感无变化。

(3) 当线框平面绕自身的中心轴旋转 θ 角度时, 穿过线框的磁通发生变化, 故直导线与线框之间的互感有变化。

【考研题 3-5】 (电子科技大学 2006 年) 磁介质在外磁场作用下产生磁化的物理机制是什么? 磁化介质一般具有什么样的宏观性质?

解: 磁介质在外磁场作用下产生磁化的物理机制是: 在外磁场的作用下, 磁介质中的分子磁矩按一定方向有序排列, 并产生附加磁场。磁介质受到磁化后会出现宏观电流, 即磁化电流。

【考研题 3-6】 (北京邮电大学 2002 年) 有一半径为 a 的圆盘, 带电荷 Q 。绕其中心以角速度 ω 旋转。求其中心处的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。

解: 根据题意, 电荷密度为 $\rho_s = \frac{Q}{\pi a^2}$, $I = \frac{dq}{dt} = \frac{\rho_s dS}{dt} = \frac{\rho_s r dr d\phi}{dt} = \rho_s r \omega dr$ 。

如图 3-25 所示, $d\mathbf{l} = r d\phi \mathbf{e}_\phi$, 根据毕奥-萨伐尔定律, 电流在圆盘中心处产生的磁场为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{I d\mathbf{l} \times (-\mathbf{e}_r)}{r^2}$$

$$= \mathbf{e}_z \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho_s \omega d\phi dr$$

$$= \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 a}{2} \rho_s \omega = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi a}$$

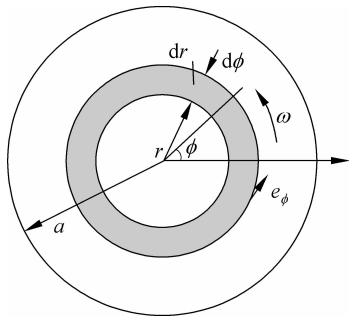


图 3-25 考研题 3-6 图

【考研题 3-7】 (北京理工大学 2004 年) 半径为 R 的无限长圆柱体内有一半径为 r 的平行圆柱形空洞, 两圆柱的轴线相距为 a , 如图 3-26 所示, 今有电流 I 沿轴线方向流动并在横截面上均匀分布。试求:

- (1) 圆柱轴线上的磁感应强度 $\mathbf{B}_1$;
- (2) 空洞轴线上的磁感应强度 $\mathbf{B}_2$;
- (3) 证明空腔内是均匀场。

解: 将半径为 r 的小圆柱体视为同时具有体电流密度分别为 $\pm \frac{I}{\pi(R^2 - r^2)}$ 的电流分布, 则可以利用叠加原理求解两轴线上的磁场。

(1) 设半径为 R 的无限长大圆柱体上的电流密度为 $J_{S1} = \frac{I}{\pi(R^2 - r^2)}$, 根据安培环路定理, 则其在大圆柱轴线上产生的磁场为零。半径为 r 的无限长空洞圆柱体上的电流密度为 $J_{S2} = -\frac{I}{\pi(R^2 - r^2)}$, 则其上电流为 $I' = -\frac{Ir^2}{(R^2 - r^2)}$ 。根据安培环路定理, 它在大圆柱轴线上产生的磁场为

$$\mathbf{H}_1 = \frac{I'}{2\pi a} \mathbf{e}_\phi = -\frac{Ir^2}{2\pi a(R^2 - r^2)} \mathbf{e}_\phi$$

圆柱轴线上的磁感应强度 $\mathbf{B}_1$ 为

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu I r^2}{2\pi a(R^2 - r^2)} \mathbf{e}_\phi$$

(2) 设半径为 r 的无限长空洞圆柱体上的电流密度为 $-\frac{I}{\pi(R^2 - r^2)}$, 其在空洞轴线处产生的磁场为零。半径为 R 的无限长大圆柱体上的电流密度为 $\frac{I}{\pi(R^2 - r^2)}$, 根据安培环路定理, 它在空洞轴线处产生的磁场为

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I''}{2\pi a} \mathbf{e}_{\phi'} = \frac{1}{2\pi a} \frac{I\pi a^2}{\pi(R^2 - r^2)} \mathbf{e}_{\phi'} = \frac{Ia}{2\pi(R^2 - r^2)} \mathbf{e}_{\phi'}$$

则空洞轴线上的磁感应强度 $\mathbf{B}_2$ 为

$$\mathbf{B}_2 = \frac{I\mu_0 a}{2\pi(R^2 - r^2)} \mathbf{e}_{\phi'}$$

(3) 设空洞内一点到无限长大圆柱体轴线的距离为 ρ , 则到空洞轴线的距离为 ρ' 。则根据叠加原理

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{2\pi\rho} J_{S1} \pi \rho^2 \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{2\pi\rho'} J_{S2} \pi \rho'^2 \mathbf{e}_{\phi'} = \frac{I\rho}{2\pi(R^2 - r^2)} \mathbf{e}_\phi - \frac{I\rho'}{2\pi(R^2 - r^2)} \mathbf{e}_{\phi'} \\ &= \frac{I(\rho \mathbf{e}_\phi - \rho' \mathbf{e}_{\phi'})}{2\pi(R^2 - r^2)} = \frac{I \mathbf{e}_z \times \mathbf{a}}{2\pi(R^2 - r^2)} \end{aligned}$$

因此空洞轴线上的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I \mathbf{e}_z \times \mathbf{a}}{2\pi(R^2 - r^2)}$$

$\mathbf{a}$ 为从大圆柱轴心指向空洞轴线的距离矢量。显然, 该磁场为常数, 因此空洞内为均匀磁场。

【考研题 3-8】 (北京邮电大学 2002 年)

(1) 已知静电场的 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 3yz + \mathbf{e}_y (3xz - 6y^2) + 3xy \mathbf{e}_z$, 求其电位;

(2) 已知圆柱(半径为 a)中沿轴向的电流密度为 $\mathbf{J} = kr^2 \mathbf{e}_z (r \leq a)$ 。试用两种方法求出圆柱内的磁场强度。

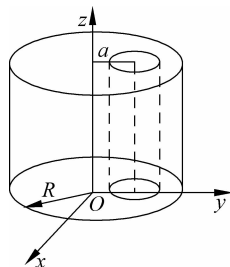


图 3-26 考研题 3-7 图

$$\text{解: (1) } \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times [\mathbf{e}_x 3yz + \mathbf{e}_y (3xz - 6y^2) + 3xy\mathbf{e}_z] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3yz & 3xz - 6y^2 & 3xy \end{vmatrix} = 0$$

因此,该场是保守场,积分与路径无关。设点(0,0,0)为零电位参考点,则电位为

$$\varphi(x, y, z) = \int_{(x, y, z)}^{(0, 0, 0)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{(x, y, z)}^{(0, 0, 0)} [3yz dx + (3xz - 6y^2) dy + 3xy dz] = -9xyz + 2y^3$$

因为 $\nabla \cdot \mathbf{E} = -12y = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\rho = -12y\epsilon_0$, 又 $\nabla^2 \phi = 12y = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\rho = -12y\epsilon_0$, 因此电位得到验证。

(2) 方法一: 利用安培环路定理求解。设电流沿 z 轴, 取半径为 r 的圆环, 则

$$\text{由 } \oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \text{ 得}$$

$$\oint_c H \mathbf{e}_\phi \cdot r d\phi \mathbf{e}_\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^r k r^2 \mathbf{e}_z r d\phi dr$$

即

$$2\pi r H = \frac{2\pi}{4} k r^4$$

所以

$$H = \frac{1}{4} k r^3 \mathbf{e}_\phi$$

方法二: 利用矢量磁位求解。

$$\text{由于 } \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} = \begin{cases} -\mu_0 k r^2 \mathbf{e}_z, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

在圆柱坐标系下, 对上式分解得

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} A_z \right] = -\mu_0 k r^2$$

求其特解得

$$A(r) = \frac{\mu_0 k}{16} (a^4 - r^4)$$

$A(r)$ 沿 $\mathbf{e}_z$ 方向, 因此

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times A_z \mathbf{e}_z = \frac{1}{\mu_0} \nabla A_z \times \mathbf{e}_z = -\frac{1}{4r^3} k \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z = \frac{1}{4} k r^3 \mathbf{e}_\phi$$

【考研题 3-9】 (南京航空航天大学 2008 年) 铁质的无限长圆管中通过电流 I , 圆管内外半径为 a 和 b , 已知铁的导磁率为 μ , 试求:

(1) $r < a, a \leq r \leq b, r > b$ 三个区域内的磁场强度;

(2) $r = a, r = b$ 处的磁化面电流密度(束缚电流密度)。

解: (1) 根据安培环路定理, $r < a$ 时, $I_1 = 0, H_1 = 0$ 。

当 $a \leq r \leq b$ 时, 由 $\oint_c \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ 得

$$\oint_c H_2 \mathbf{e}_\phi \cdot d\mathbf{l} = \int_S J \mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{S}$$

即

$$2\pi r H_2 = \frac{I\pi(r^2 - a^2)}{\pi(b^2 - a^2)}, \quad \mathbf{H}_2 = \frac{I(r^2 - a^2)}{2\pi r(b^2 - a^2)} \mathbf{e}_\phi$$

当 $r > b$ 时, $I_3 = 0$, $\mathbf{H}_3 = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi$

$$(2) \text{ 磁化强度: } \mathbf{P}_m = \chi_m \mathbf{H}_2 = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{H}_2 = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I(r^2 - a^2)}{2\pi r(b^2 - a^2)} \mathbf{e}_\phi$$

当 $r = a$ 时: $\mathbf{J}_{sa} = \mathbf{P}_m \times (-\mathbf{e}_r) = 0$

$$\text{当 } r = b \text{ 时: } \mathbf{J}_{sb} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{e}_r = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi b} \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_z \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi b}$$

【考研题 3-10】 (北京邮电大学 2009 年) 无限长真空螺线管, 每单位长度上紧密 n 匝 (螺线管外磁场可忽略不计), 匝半径为 a , 求该螺线管单位长度上的自感。

解: 设螺线管通有电流 I , 根据安培环路定理 $\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$, 由于螺线管外磁场可忽略不计, 管内磁场可视为均匀并沿螺线管轴向, 则对于螺线管单位长度有

$$H = nI$$

所以磁链为 $\psi_m = nBS = \mu_0 n^2 I \pi a^2$

因此, 螺线管单位长度上的自感为

$$L = \frac{\psi_m}{I} = \mu_0 n^2 \pi a^2$$

【考研题 3-11】 (北京邮电大学 2010 年) 空气中 4 根半径为 a 的无限长导线 1, 2, 3, 4, 其轴线分别与 x 轴上的 $x=0, x=b, x=2b, x=3b$ 点垂直相交, 如图 3-27 所示。导线 1, 2 形成回路 1, 导线 3, 4 形成回路 2, 求两平行双线回路单位长度的互感。

解: 设电流 I 沿 z 方向, 如图 3-27 所示, 平行双线传输线在空间任意点产生的矢量磁位为

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{r_-}{r_+} \right)$$

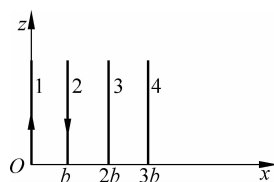


图 3-27 考研题 3-11 图

设线间距离都远大于 a , 因此, 回路 1 的电流在回路 2 上的 3 线及 4 线上的点产生的矢量磁位分别为

$$\mathbf{A}_M = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{2b} \right) = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\mathbf{A}_N = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{2b}{3b} \right) = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{2}{3} \right)$$

沿回路 2 单位长度上作一矩形积分回路, 则回路 1 的电流在回路 2 单位长度上产生的磁通为

$$\Phi_{m12} = \oint_{l_2} \mathbf{A}_{12} \cdot d\mathbf{l} = A_M - A_N = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{3}{4}$$

故互感为

$$M = \frac{\Phi_{m12}}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{3}{4}$$

【考研题 3-12】 (清华大学 2003 年) 标量磁位是在什么条件下引入的?

解: 在 $\mathbf{J} = 0$, 即不存在传导电流的区域, 根据安培环路定理得 $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ 。可见, 此时磁

场无旋,根据矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \varphi = 0$,因此可以引入 $\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m$,其中 φ_m 称为标量磁位。通过标量磁位可以计算不存在传导电流区域的磁场。

【考研题 3-13】 (北京理工大学 2006 年)如图 3-28 所示,无限长直导线上有直流电流 I_0 ,附近有一共面的矩形导线回路。求:

- (1) 矩形回路通过的磁通量;
- (2) 长直导线与矩形回路的互感;
- (3) 若将电流改成 $I = I_0 \sin \omega t$,且已知矩形导线回路的电阻为 R ,求矩形回路上的感应电流。

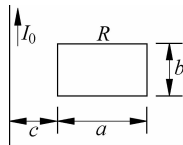


图 3-28 考研题 3-13 图

解: (1) 根据安培环路定理 $\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_0 = 2\pi r H_\phi$, 得

$$H_\phi = \frac{I_0}{2\pi r}$$

故矩形回路的磁通量为

$$\Phi_m = \int_c^{a+c} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \int_c^{a+c} \frac{1}{r} \cdot b dr = \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} \ln \frac{a+c}{c}$$

- (2) 长直导线与矩形回路的互感为

$$M = \frac{\Phi_m}{I_0} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{a+c}{c}$$

- (3) 若将电流改成 $I = I_0 \sin \omega t$,且已知矩形导线回路的电阻为 R ,矩形回路的感应电动势为

$$U = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} \ln \frac{a+c}{c} \frac{d(\sin \omega t)}{dt} = -\frac{\omega \mu_0 I_0 b}{2\pi} \ln \frac{a+c}{c} \cos \omega t$$

故矩形回路上的感应电流为

$$I = \frac{U}{R} = -\frac{\omega \mu_0 I_0 b}{2\pi R} \ln \frac{a+c}{c} \cos \omega t$$

【考研题 3-14】 (武汉理工大学 2007 年)有一个磁场为

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_x(-y) + \mathbf{e}_y(x)$$

求磁力(磁感)线方程。

解: 磁场的方向即磁力(磁感)线的切线方向,于是

$$\mathbf{B} \times d\mathbf{l} = 0$$

$$\text{即 } [\mathbf{e}_x(-y) + \mathbf{e}_y(x)] \times [\mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz] = 0$$

所以

$$-y dy - x dx = 0$$

积分得

$$y^2 = -x^2 + C$$

【考研题 3-15】 (北京邮电大学 2007 年)同轴电缆的内外导体半径分别为 a 、 b ,传输 TEM 波,内外导体间填充的介质参量为 ϵ 、 σ 、 μ ,试求该同轴电缆:

- (1) 单位长度的电容;
- (2) 单位长度的电感;
- (3) 单位长度的漏电导。

解: 考察单位长度, 设漏电流为 I , 则媒质中电场 $\mathbf{E}$ 的方向沿径向, 利用微分形式的欧姆定律,

$$E = \frac{J_r}{\sigma} = \frac{I}{2\pi r\sigma}$$

则内外导体的电压为

$$U_0 = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{I}{2\pi r\sigma} dr = \frac{I}{2\pi\sigma} \ln \frac{b}{a}$$

故单位长度的漏电导为

$$G = \frac{I}{U_0} = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{b}{a}}$$

利用静电比拟, 单位长度的电容为

$$C = \frac{Q}{U_0} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}$$

假设轴线电流为 I_0 , 则根据安培环路定理

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_0 = 2\pi r H_\phi$$

$$H_\phi = \frac{I_0}{2\pi r}$$

故单位长度内外导体间的磁通量为

$$\Phi_m = \int_a^b \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu I_0}{2\pi} \int_a^b \frac{1}{r} \cdot dr = \frac{\mu I_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

因此, 单位长度的外自感为

$$M = \frac{\Phi_m}{I_0} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

考虑到单位长度导线的内自感为: $L_i = \frac{\mu}{8\pi}$

故同轴电缆单位长度的总电感为

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu}{8\pi}$$

【考研题 3-16】 (北京理工大学 2006 年) 一直流场源的远区矢量磁位为

$$\mathbf{A} = e_\phi \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin\theta$$

其中 r, θ 为球面坐标。

- (1) 判断此场源的形式(即名称);
- (2) 求远区磁场 $\mathbf{B}$;
- (3) 证明 $\mathbf{A}$ 满足库仑规范(即 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$)。

解: (1) 该场源为磁偶极子。

- (2) 在球坐标系下

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & 0 & \sin^2\theta \frac{\mu_0 m}{4\pi r} \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\mathbf{e}_r \frac{\mu_0 m}{4\pi r} \sin 2\theta + \mathbf{e}_\theta \sin^2 \theta \frac{\mu_0 m}{4\pi r} \right) \\ &= \mathbf{e}_r \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \end{aligned}$$

(3) 在球坐标系下

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin \theta \right) = 0$$

所以 $\mathbf{A}$ 满足库仑规范。

【考研题 3-17】 (北京邮电大学 2001 年) 对于同轴线(内外导体半径分别为 a, b , 填充空气介质), 除利用 $\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 求磁通, 然后求其单位长度的电感 L_0 之外, 请用另外两种方法求出 L_0 表达式。

解: 方法一, 在填充空气介质的情况下, 同轴线的特性阻抗为

$$Z_C = \frac{\eta_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

其中 $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$, 又根据无耗传输线理论, 传输线的特性阻抗为

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

而行波的速度(光速)为 $c = 1/\sqrt{L_0 C_0} = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, 因此

$$L_0 = Z_C / c = \frac{\eta_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

方法二, 根据长直载流导线产生的矢量磁位 $\mathbf{A}$ 的表达式

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r} \right)$$

可以将同轴线的电流集中在轴线上, 故对于单位长度的同轴线有

$$\Phi_m = \oint_{l_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{r_0}{a} \right) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{r_0}{b} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

所以单位长度的电感 L_0 为

$$L_0 = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

【考研题 3-18】 (北京邮电大学 2012 年) 一根无限长直导线与半径为 a 的圆环共面, 圆环圆心到直导线的距离为 $d (d \gg a)$, 如图 3-29 所示。求直导线与圆环之间的互感。

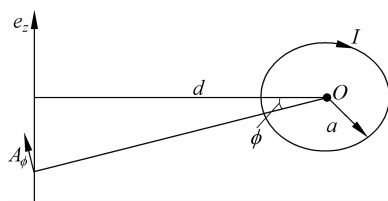


图 3-29 考研题 3-18 图

解: 由于 $d \gg a$, 因此半径为 a 的载流小圆环可以等效为磁偶极子。选取球坐标系, O 为原点, 设小环中的电流为 I , 则磁偶极子的矢量磁位为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \mathbf{m} \times \mathbf{e}_r = \frac{\mu_0 I a^2 \sin \theta}{4r^2} \mathbf{e}_\phi$$

因为长直导线与圆环共面, 因此 $\theta = 90^\circ$ 。又因为 $r^2 = d^2 + z^2$, 所以

$$A_{\phi} = \frac{\mu_0 I a^2}{4(d^2 + z^2)}$$

则圆环的矢量磁位在长直导线回路产生的磁通为

$$\begin{aligned}\Phi_{12} &= \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{-\infty}^{\infty} A_z dz = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\phi} \cos\phi dz \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\mu_0 I a^2}{4(d^2 + z^2)} \frac{d}{\sqrt{d^2 + z^2}} dz = \frac{\mu_0 I a^2}{2d}\end{aligned}$$

所以,直导线与圆环之间的互感为

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I} = \frac{\mu_0 a^2}{2d}$$

【考研题 3-19】 (北京邮电大学 2013 年)如图 3-30 所示,在 r_0 处有一沿 z 轴方向流动的无限长均匀电流丝,求该电流丝产生的磁矢位与电磁场。

解: 设电流丝的电流沿 z 方向,大小为 I 。由图可知,观察点到电流丝的垂直距离为

$$r' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$$

取圆柱坐标系,选取源点 (r_0, z') 和场点 (r, z) 如图所示,则

$$\begin{aligned}A_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz'}{[r'^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \ln \left\{ \frac{[r'^2 + (L/2 - z)^2]^{1/2} + (L/2 - z)}{[r'^2 + (L/2 + z)^2]^{1/2} - (z + L/2)} \right\}\end{aligned}$$

因此,对于无限长的均匀电流丝 $L \rightarrow \infty$,其产生的磁矢位为

$$\mathbf{A} = A_z \mathbf{e}_z \approx \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{L}{r'} \right)^2 = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{L}{r'} \right)$$

即

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{l_0}{r'} \right) = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{l_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right)$$

其中,其中 l_0 为矢量磁位 $\mathbf{A}$ 的零点参考距离。

根据安培环路定律,或者 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$,无限长的均匀电流丝产生的磁场为

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r'} = \mathbf{e}_{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

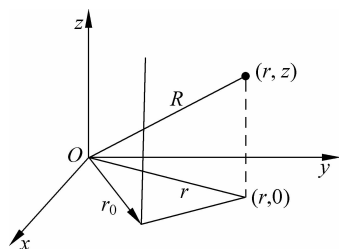


图 3-30 考研题 3-19 图