第3章

专 题 梳 理

3.1

求距离专题

在空间解析几何中,求距离包含两点间距离、点到平面之间的距离、点到直线间距离、平行于平面的直线到平面间距离、两平行平面之间距离、两平行直线之间的距离、两异面直线之间的距离等.

3.1.1 两点间距离

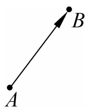

图 3.1.1

如图 3.1.1 所示,两点 $A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$,因

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

得两点间的距离公式

$$d=|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例 3.1.1 求证以 $A(4,3,1)$,$B(7,1,2)$,$C(5,2,3)$为顶点的三角形是等腰三角形.

证明 因为

$$|AB|=\sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{14}$$

$$|BC|=\sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6}$$

$$|AC|=\sqrt{(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6}$$

所以

$$|BC|=|AC|$$

例 3.1.2 已知两点 $A(4,0,5)$和 $B(7,1,3)$,求$\overrightarrow{AB}^0$.

解 $\overrightarrow{AB}^0=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)=\left(\dfrac{3}{\sqrt{14}},\dfrac{1}{\sqrt{14}},-\dfrac{2}{\sqrt{14}}\right)$.

3.1.2 点到平面之间的距离

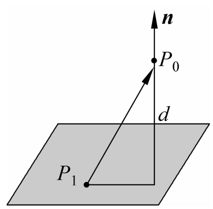

图 3.1.2

如图 3.1.2 所示,设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点,求 P_0 到平面的距离 d.

解 方法一 平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$,在平面上任取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,则点 P_0 到平面的距离为

$$d=|\operatorname{Prj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{P_1P_0}|=\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$$
$$=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

其中：

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\quad（点到平面的距离公式）$$

方法二 经过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，且方向向量为法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 的直线为

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}=t$$

它与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的交点由下列方程组求得：

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}=t\\ Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$$

求出的交点表示为 $Q(x_1,y_1,z_1)$. 两点 P_0 与 Q 之间距离，就是点到平面的距离.

$$d=|P_0Q|=|\boldsymbol{P_0Q}|$$

例 3.1.3 求点(2,−1,0)到平面 $x+2y-3z+1=0$ 的距离.

解 由公式得

$$d=\frac{|1\times2+2\times(-1)-3\times0+1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{14}$$

例 3.1.4 球面 $x^2+y^2+(z-2)^2=4$，平面方程 $x+2y+z-26=0$，求球面到平面的距离.

解 球心坐标为 $Q(0,0,2)$，半径 $r=2$ 则球心到平面的距离为

$$d=\frac{|1\times0+2\times0+1\times2-26|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{24}{\sqrt6}=4\sqrt6$$

球面到平面的(最近)距离为 $d-r=4\sqrt6-2$.

3.1.3 点到直线间距离

思路 1 已知点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，点外一条直线 L：$\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$. 求点到直线的距离.

先过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，以直线方向向量(m,n,p)为法向量，作一个平面 Π，其方程为

$$m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0$$

该平面 Π 与直线 L 的交点 P 由方程组给出：

$$\begin{cases}m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0\\ \dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}\end{cases}$$

求出交点表示为 $P(x_2,y_2,z_2)$. 则点 P_0 与 P 之间距离就是点到直线的距离：

$$d=|P_0P|=\sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2+(z_2-z_0)^2}$$

思路 2 如图 3.1.3 所示，点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 L：$\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ m & n & p\end{matrix}\right\|$$

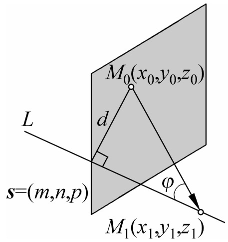

图 3.1.3

例 3.1.5 求点$(4,-1,3)$到直线$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{5}$的距离.

解 由公式可得

$$\begin{aligned}d&=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ m & n & p\end{matrix}\right\|\\&=\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+5^2}}\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3-4 & 0-(-1) & 1-3\\ 2 & 1 & 5\end{matrix}\right\|=\frac{1}{\sqrt{30}}\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 5\end{matrix}\right\|\\&=\frac{1}{\sqrt{30}}|(7,1,-3)|=\frac{1}{\sqrt{30}}\times\sqrt{59}=\sqrt{\frac{59}{30}}\end{aligned}$$

例 3.1.6 求点 $P(3,-1,2)$到直线$\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}$的距离.

解 直线的方向向量由下式求得

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}=(0,-3,-3)$$

经过点 $P(3,-1,2)$，且法向为 $\boldsymbol{s}$ 的平面方程为

$$-3(y+1)-3(z-2)=0$$

即 $y+z-1=0$. 它与已知直线的交点由下式

$$\begin{cases}y+z-1=0\\x+y-z+1=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}$$

求得 $M\left(1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$. 进而求得两点间距离为

$$d=|PM|=\sqrt{(3-1)^2+\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

3.1.4 直线平行于平面，求直线和平面间距离

直线 L：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$与平面 Π：$Ax+By+Cz+D=0$ 平行时满足

$$Am+Bn+Cp=0$$

此时直线到平面的距离就是直线上任意一点(如取点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$)到平面的距离.

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

例 3.1.7 求直线$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1}$与平面 $x+2y+z-5=0$ 间的距离.

解 由于直线方向向量 $\boldsymbol{s}=(3,-2,1)$与平面法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$满足

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=3\times1-2\times2+1\times1=0$$

所以直线与平面平行,故直线到平面的距离为

$$d=\frac{|2+2\times0+1\times(-1)-5|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

3.1.5 两平行平面之间的距离

平面 Π_1:$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$.

平面 Π_2:$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$.

平行:$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=0\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

两平行平面间的距离就是在其一平面上任意一点到另一平面间的距离.

取点技巧:在其一平面上先任取两坐标为零,第三坐标满足该平面方程即可.如在第一平面上取点$\left(0,0,-\frac{D_1}{C_1}\right)$它到另一平面的距离为

$$d=\left|\frac{-C_2\times\frac{D_1}{C_1}+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\right|$$

此距离表达式不唯一.

例 3.1.8 求两平面之间的距离,其中:

$$\Pi_1: 2x-y+3z+5=0$$

$$\Pi_2: 4x-2y+6z-1=0$$

解 显然两平面平行,因为

$$\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}=\frac{3}{6}$$

在 Π_1 平面上取一点$(0,5,0)$,它到平面 Π_2 的距离,由公式得

$$d=\frac{|-2\times5-1|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+6^2}}=\frac{11}{\sqrt{56}}=\frac{11\sqrt{56}}{56}$$

3.1.6 两平行直线之间的距离

设有直线 L_1:$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$, $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$与直线 L_2:$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$,$\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$.

平行：$L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$.

方法：作一平面经过直线 L_1 上一点(x_1, y_1, z_1)且垂直于 L_1 的平面 Π，平面与两已知直线的交点设为 M_1, M_2，则线段 M_1M_2 的长度就是所求两平行直线间的距离.

例 3.1.9 求两平行直线$\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z}{-3}$与$\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-2}{-3}$之间的距离.

解 过第一条直线上的点$(2,4,0)$且法向量为$(2,1,-3)$的平面方程为

$$2(x-2)+(y-4)-3z=0$$

即 $2x+y-3z-8=0$.

它与两直线的交点由式

$$\begin{cases} 2x+y-3z-8=0 \\ \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{-3} \end{cases}$$

求得交点 $M_1(4,-1,-1)$. 由式

$$\begin{cases} 2x+y-3z-8=0 \\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2}{-3} \end{cases}$$

求得交点 $M_2(1,3,-1)$. 于是两平行直线间距离为

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(1-4)^2+(3+1)^2+(-1+1)^2} = 5$$

3.1.7 两异面直线之间的距离

两直线相交其距离为 0，可看做两异面直线的特殊情况. 若两直线不平行，就看做是异面来处理.

下面举例来说明两异面直线间距离的求法.

例 3.1.10 求直线 L_1：$\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z}{-3}$与 L_2：$\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$之间的距离.

解 由于$\dfrac{2}{2} = \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{-3}{-1}$，所以两直线异面(或相交).

两直线的方向向量的叉积为

$$\boldsymbol{s} = (2,1,-3)\times(2,1,-1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2,-4,0)$$

过第一条直线 L_1 上的点$(2,4,0)$且法向量为 $\boldsymbol{s}=(2,-4,0)$的平面方程为

$$2(x-2)-4(y-4)+0=0$$

即

$$x-2y+6=0$$

故 L_2 上的点$(-1,-2,2)$到该平面的距离为

$$d = \frac{|-1-2\times(-2)+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

求两异面直线之间的距离的一般步骤如下.

(1) 由两直线的方向向量求出$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{s}$.

(2) 以 $\boldsymbol{s}$ 为法向量且过直线 L_1 上一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$作一个平面 Π.

(3) 在另一条直线 L_2 上取一点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,则点 M_2 到平面 Π 的距离就是两异面直线间的距离.

3.1.8 综合训练题

1. 一动点与两定点(2,3,1)和(4,5,6)等距离,求这个动点的轨迹方程.

(答案:$4x+4y+10z-63=0$)

2. 试证明以三点 $A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

3. 求点(1,2,1)到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

(答案:1)

4. 求点 $P(3,-1,2)$到直线$\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}$的距离.

$\left(\text{答案:}\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

5. 求两平行平面 $2x-y-5z=1$,$2x-y-5z=3$ 之间的距离.

$\left(\text{答案:}\dfrac{\sqrt{30}}{15}\right)$

6. 求过点(0,2,4)且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程,并求该直线到两已知平面的距离分别是多少.

$\Bigg($答案:直线方程$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$;直线到平行平面距离就是点到两平面的距离,分别是$\dfrac{7}{\sqrt{5}},\dfrac{6\sqrt{10}}{5}\Bigg)$

7. 求两平行直线$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{3}$与$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{3}$之间的距离.

$\left(\text{答案:距离为}\dfrac{\sqrt{2730}}{14}\right)$

8. 求两直线 L_1:$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$与 L_2:$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$的夹角及距离.

$\left(\text{答案:夹角}\dfrac{\pi}{4}\text{,距离为}\dfrac{2}{3}\right)$

3.2 证明专题

高等数学的证明问题是高等数学中一个重要组成部分.通过高等数学证明问题的研究,可以帮助我们弄清高等数学中的概念、定义、定理,命题的条件、结论之间的本质联系,加深对高等数学基本知识的理解;同时有助于培养逻辑思维和抽象思维的能力,从而提高分析问题、解决问题的能力.

高等数学证明问题,往往感到证明困难,缺少证明方法,掌握不好证明的规律.原因是证明问题的方法没有固定的程序,证明技巧灵活多样,和一般计算题相比,难度高,隐藏条件难以捕捉,难以入手.也正因为如此,证明题往往作为专升本考试的压轴题,是拉开考生考试距离的"杠杆".要想得高分,必须在证明题上下一番工夫.平时,由于课时少等原因,我们很少或几乎没有接触过证明题,现在准备参加专升本考试,就更加要在这薄弱环节上多花费时间和精力了.

高等数学证明,也并不是盲目不可捉摸的,它还是有基本的思路和方法的.下面分析归纳出以下几种方法,供大家学习借鉴.

3.2.1 综合法

由已知条件出发,运用定义、定理、性质推导出所要的结论,称为综合法.

综合法是一种"由因导果"的方法.它的关键在于细审题意,洞察紧扣全部已知条件和各种可能运用的(隐藏)条件,按照题目要求,综合运用自己所积累的数学技能和技巧,去寻求探索证题的思路和方法.

一般来说,数学命题是相当精炼的语言,命题中几乎没有一句废话,每一句话都有特定的含义和所指.因此,读者在审题时,要针对每一句话进行字斟句酌,把明显的、隐藏的条件用数学语言,即用等式、不等式、公式等写出来,总可以找到突破口或切入点,从而打开思路.当不止一个开头时,就一一尝试,直到无路可走时再回头走第二条路.

1. 应用零点定理证明方程有根

定理 3.2.1(零点定理) 如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)$与 $f(b)$异号($f(a)f(b)<0$),则至少存在一点,使得 $f(\xi)=0$.

例 3.2.1 证明方程 $x^3-3x^2-x+3=0$ 在区间$(-2,4)$内有三个根.

分析 设 $f(x)=x^3-3x^2-x+3$,先试探 $f(-2)=-15<0$,$f(4)=15>0$,可判定在 $(-2,4)$ 内原方程有一个根.

采用三等分法,把 $(-2,4)$ 分成三个区间 $(-2,0)$,$(0,2)$,$(2,4)$,再分别试探 $f(0)=3>0$,$f(2)=-3<0$,结合 $f(-2)=-15<0$,$f(4)=15>0$,可判定出在 $(-2,0)$,$(0,2)$,$(2,4)$ 内分别有一个根存在.

证明略,请读者自己写出证明过程.

[**训练**]

(1) 证明方程 $x^5-3x=1$ 在 1 和 2 之间至少存在一个实根.

(2) 证明曲线 $y=x^4-3x^2+7x-10$ 在 $x=1$ 与 $x=2$ 之间至少与 x 轴有一个交点.

(3) 设 $f(x)=e^x-2$,求证在区间 $(0,2)$ 内至少有一点 x_0,使 $e^{x_0}-2=0$.

2. 应用罗尔定理证明某点导数值为零

例 3.2.2 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数,且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$,其中,$a<x_1<x_2<x_3<b$,证明:在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ,使得 $f''(\xi)=0$.

证明 由 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数得到,$f(x)$ 在 (a,b) 内具有一阶导数且连续,当然,$f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$,$[x_2,x_3]$ 上连续且可导,又已知 $f(x_1)=f(x_2)$,$f(x_2)=f(x_3)$,所以由罗尔定理,存在 $\xi_1\in(x_1,x_2)$,$\xi_2\in(x_2,x_3)$,使得

$$f'(\xi_1)=0,\quad f'(\xi_2)=0$$

而在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上,函数 $f'(x)$ 又满足罗尔定理,于是至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(x_1,x_3)$,使得 $f''(\xi)=0$.

[**训练**]

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续,在 $(0,3)$ 内可导,且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$,$f(3)=1$. 试证:必存在 $\xi\in(0,3)$,使 $f'(\xi)=0$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=f(1)=0$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. 试证:

① 存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使 $f(\eta)=\eta$;

② 对任意实数 λ,必存在 $\xi\in(0,\eta)$,使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

3. 利用拉格朗日中值定理证明不等式

例 3.2.3 若 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=0$,且当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,证明:当 $x>0$ 时,$f(x)>0$.

证明 对任何 $x>0$,$f(x)$ 在 $[0,x]$ 上连续,在 $(0,x)$ 内可导,由拉格朗日定理,有

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f(x)-0}{x}=\frac{f(x)}{x}=f'(\xi)\quad(0<\xi<x)$$

即

$$f(x)=x\cdot f'(\xi)$$

因为 $\xi>0$,那么 $f'(\xi)>0$,所以当 $x>0$ 时,$f(x)>0$.

例 3.2.4 证明不等式 $|\sin x_2-\sin x_1|\leqslant|x_2-x_1|$.

分析 这类题看似没有条件，其实条件是隐藏起来的. 由初等函数的基本性质不难挖掘出函数 $f(x)=\sin x$. 在 $\mathbf{R}$ 上连续、可导，从而在任意子区间上也连续、可导.

证明 设 $f(x)=\sin x$. 对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$（不妨设 $x_1<x_2$），$f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，在(x_1,x_2)内可导，由拉格朗日定理，有

$$\sin x_2-\sin x_1=f'(\xi)(x_2-x_1)\quad(x_1<\xi<x_2)$$

即
$$\sin x_2-\sin x_1=\cos\xi(x_2-x_1)\quad(x_1<\xi<x_2)$$

由于$|\cos\xi|\leqslant 1$，可得$|\sin x_2-\sin x_1|\leqslant|x_2-x_1|$.

［**训练**］

证明：$|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$.

4. 利用凹凸函数定义证明不等式

定义 3.2.1 设 $f(x)$在区间 I 上连续，如果对 I 上任意两点 x_1,x_2 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

那么称 $f(x)$在 I 上的图形是凹的.

如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

那么称 $f(x)$在 I 上的图形是凸的.

例 3.2.5 证明：$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n(x>0,y>0,x\neq y,n>1)$.

证明 **方法一** 构造幂函数 $f(t)=t^n$，由于

$$f'(t)=nt^{n-1},\quad f''(t)=n(n-1)t^{n-2}$$

当 $t>0,n>1$ 时，$f''(t)>0$，则 $f(t)=t^n$ 是凹的，由凹函数的定义有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

即$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n<\frac{1}{2}(x^n+y^n)$. 证毕.

方法二 利用换元法，设 $x=a+b,y=a-b$，则 $a=\frac{x+y}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x^n+y^n)&=\frac{1}{2}[(a+b)^n+(a-b)^n]\\&=\frac{1}{2}(a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+b^n\\&\quad+a^n-C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+(-1)^kC_n^ka^{n-k}b^k+\cdots-b^n)\\&=\frac{1}{2}(2a^n+2C_n^2a^{n-2}b^2+2C_n^4a^{n-4}b^4+\cdots)>a^n=\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\end{aligned}$$

注意：$a=\frac{x+y}{2}>0,b^{2i}=\left(\frac{x-y}{2}\right)^{2i}>0$.

至此，请读者稍作休息，细细品味一下培根的话："没有一个极美的东西不是在匀称