



要点提示

线性定常系统的时域分析是经典控制理论的基础,它包括分析系统的稳定性、稳态特性和动态特性。

3.1 控制系统的稳定性分析

平衡状态: 用 $c(t)$ 表示系统的输出, 如果 $\dot{c}(t) = \ddot{c}(t) = \dots = 0$, 则称系统处于平衡状态, 总可以通过坐标系统的平移, 使在平衡状态时 $c(0) = 0$ 。

系统在平衡状态受到扰动, 使被输出量 $c(t)$ 偏离平衡状态; 扰动消失后, 如果经过一段时间, 系统又回到原先的平衡状态, 则称系统是渐近稳定, 也称是稳定的。

线性定常系统稳定的充分必要条件是: 系统特征方程所有根都具有负实部, 即系统的所有极点都位于 s 平面的左半平面 (即不包含虚轴的左半平面)。

劳斯 (Routh) 稳定性判据

劳斯判据是一种根据系统特征方程的系数来判别系统稳定性的代数判据。

(1) 构建劳斯表将给定的特征方程式系数按规则要求排在劳斯表前两行, 计算劳斯表其他各行系数。劳斯稳定性判据: 系统稳定的充分必要条件是劳斯表首列系数非零且不改变符号。

(2) 如果劳斯表中第一列元素皆非零, 则元素符号变化的次数等于特征方程具有正实部根的数目。

(3) 如果劳斯表中某行第一列元素为零, 此行其余项不全为零。此时可用一个任意小的正数 ϵ 代替零, 然后按规则继续完成劳斯表中其他系数的计算。如果 ϵ 上面元素符号与下面元素符号相反, 表明有一个符号变化。

(4) 在劳斯表元素计算过程中, 如果出现某一行元素全为零, 说明特征方程在 s 平面上存在关于 s 平面原点对称的根, 即 $a + jb$ 和 $-a - jb$ 同时为根。此时, 可用全零行上面一行的元素构造一个辅助方程, 利用辅助方

程对 s 求导后得到的方程系数代替全零行的元素,然后再按规则完成劳斯表的计算。所有那些关于原点对称的根都可由辅助方程求得。

3.2 控制系统的稳态特性——稳态误差分析

3.2.1 稳态误差定义

控制系统的误差有两种定义方法:

从输出端定义 系统输出量的希望值与实际值之差,但在实际中此差值信号常常无法测量,一般只有数学意义。

从输入端定义 系统的输入信号与主反馈信号之差,此信号在实际中可测量,所以具有一定的物理意义。

3.2.2 稳态误差系数和稳态误差计算

系统稳态误差与稳态误差系数、系统开环增益、系统类型及输入信号之间的关系如表 3-1 所示。根据此表可以计算不同类型的系统在一些输入信号之下的终值稳态误差。

表 3-1 稳态误差与系统结构参数、输入信号特性之间关系一览表

类型	稳态误差系数			阶跃输入 $r(t) = R \cdot 1(t)$	速度输入 $r(t) = Rt$	加速度输入 $r(t) = \frac{1}{2}Rt^2$
ν	K_p	K_v	K_a	位置误差 $e_{ss} = \frac{R}{1+K_p}$	速度误差 $e_{ss} = \frac{R}{K_v}$	加速度误差 $e_{ss} = \frac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{R}{1+K}$	∞	∞
1	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
2	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$

3.2.3 几点结论

(1) 系统的稳态误差只有对稳定的系统才有意义。

(2) 系统的稳态误差与系统的结构参数和输入信号的特征有关。这里系统的结构是指开环系统中积分器(即零极点)的数量,并据此将系统分为 0 型、I 型、II 型系统;系统的参数是指系统的开环增益;输入信号的特征主要指输入信号拉氏变换式中包含的积分器数量,分别以单位阶跃信号、速度信号和加速度信号作为典型的输入信号。还需指出,开环增益和输入信号的幅值只影响稳态误差的大小,而不决定

稳态误差的存在与否。

(3) 只有对输入端定义的误差才能利用稳态误差系统来求取稳态误差,否则要用拉普拉斯终值定理来求取。

3.3 控制系统的动态特性——动态响应分析

3.3.1 控制系统动态响应指标

系统的动态性能指标是根据系统的单位阶次响应曲线定义的。由图 3-1 所示响应曲线可以定义如下动态性能指标:

- (1) 最大超调量 M_p $M_p = \frac{c_{\max} - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$ 。
- (2) 峰值时间 t_p $c(t_p) = c_{\max}(t)$ 。
- (3) 调整时间 t_s 对于给定的 Δ , (通常取 $\Delta = 2\%, 5\%$) 当 $t > t_s$ 时 $|c(t) - c(\infty)| < \Delta$ 。
- (4) 上升时间 t_r $\min\{t; c(t) = c(\infty)\}$ 。
- (5) 延迟时间 t_d $\min\left\{t; c(t) = \frac{1}{2}c(\infty)\right\}$ 。

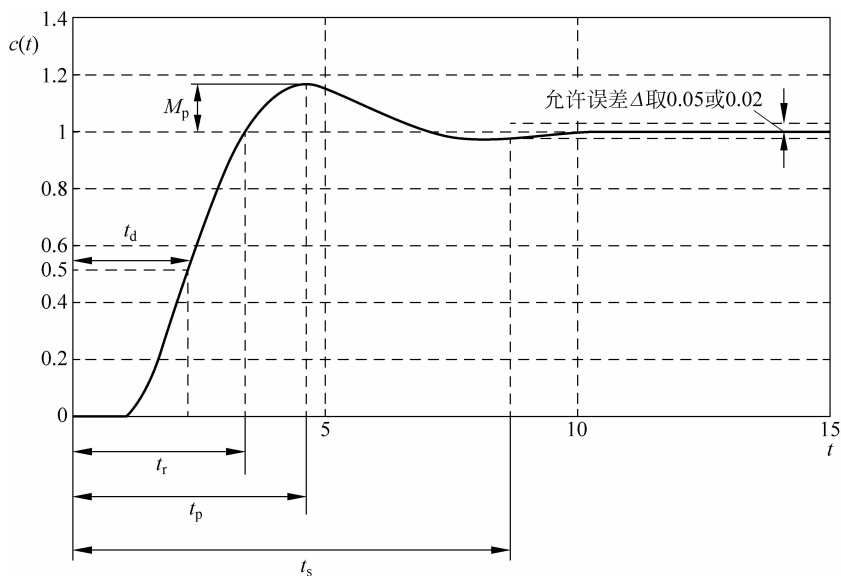


图 3-1 系统典型的动态响应曲线

3.3.2 一阶系统的单位阶跃响应

一阶系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T_s + 1}$$

系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - e^{-t/T} \quad t \geq 0$$

当允许误差 Δ 取成 5% 时, 调整时间 t_s 取成 $3T$; 当允许误差 Δ 取成 2% 时, 调整时间 t_s 取成 $4T$ 。

3.3.3 二阶系统的单位阶跃响应

系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

式中, ζ 是系统的阻尼比, $\omega_n = \frac{1}{T}$ 为无阻尼振荡角频率(或/自然振荡角频率)。

(1) 欠阻尼情况($0 < \zeta < 1$) 系统的两个极点(特征根)是一对共轭复数, 这时称 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 为阻尼振荡角频率。

(2) 临界阻尼情况($\zeta = 1$) 系统有一对相等的、位于负实轴上的实极点。

(3) 过阻尼情况($\zeta > 1$) 系统有两个不等的位于负实轴上的实极点。

(4) 无阻尼情况($\zeta = 0$) 系统具有一对位于虚轴上的共轭极点。

欠阻尼系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

式中 $\theta = \arccos \zeta = \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$, 称做阻尼角。

3.3.4 欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应主要指标

(1) 最大超调量 $M_p = e^{-\pi\zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}} \times 100\%$;

(2) 峰值时间 $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$;

(3) 当允许误差 Δ 取成 5% 时, 调整时间 $t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$; 当允许误差 Δ 取成 2% 时, 调整时间 $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$;

(4) 上升时间 $t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$ 。

3.3.5 高阶系统的动态响应

一般将 3 阶以上的系统称为高阶系统, 严格地说, 实际的控制系统大多是高阶的。

若系统是稳定的,则高阶系统单位阶跃响应的稳态响应是 $c(\infty) = K$, 动态响应是一些指数函数和衰减的正弦函数的线性组合。

3.3.6 主导极点、偶极子和附加零极点

1. 主导极点

指对系统响应起主导作用的极点。

高阶系统距虚轴最近的极点比其他极点距虚轴的距离小 5 倍以上,而且这个(对)极点附近没有零点,那么距虚轴最近的极点对系统响应将起主导作用,这一个(对)极点叫做系统的主导极点。主导极点通常是一对共轭复极点。

2. 偶极子

如果一个极点和一个零点相对贴近,则称它们为一对偶极子。如果极点和零点之间距离小于它们与主导极点之间距离的 $1/10$,也可当作偶极子处理。

习题解答

A 基本题

A3-1 如图 3-2 系统,用劳斯判据判别系统的稳定性。若不稳定,确定有几个根在右半 s 平面。

$$(1) G(s) = \frac{10}{s(s-1)(2s+3)}, H(s) = 1;$$

$$(2) G(s) = \frac{1}{(s-1)}, H(s) = \frac{s-1}{s+1};$$

$$(3) G(s) = \frac{12}{s(s+1)}, H(s) = \frac{1}{s+3}。$$

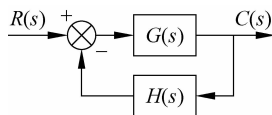


图 3-2 题 A3-1 的系统方块图

解 (1) 已知 $G(s) = \frac{10}{s(s-1)(2s+3)}, H(s) = 1$ 。系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{2s^3 + s^2 - 3s + 10}$$

系统的闭环特征方程为

$$2s^3 + s^2 - 3s + 10 = 0$$

系统的劳斯表为

s^3	2	-3
s^2	1	10
s^1	-23	
s^0	10	

从劳斯表上可以看出首列元素变号两次,所以闭环系统不稳定,有两个根在 s 右

半平面。

(2) 已知 $G(s) = \frac{1}{(s-1)}$, $H(s) = \frac{s-1}{s+1}$ 。系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+s-2}$$

系统的闭环特征方程

$$s^2 + s - 2 = 0$$

系统的劳斯表为

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & -2 \\ s^1 & 1 & 0 \\ s^0 & -2 & \end{array}$$

从劳斯表上可以看出首列元素变号一次,所以闭环系统不稳定,有一个根在 s 右半平面。

(3) 已知 $G(s) = \frac{12}{s(s+1)}$, $H(s) = \frac{1}{s+3}$ 。系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{12s+3}{s^3+4s^2+3s+12}$$

系统的闭环特征方程

$$s^3 + 4s^2 + 3s + 12 = 0$$

系统的劳斯表就是

$$\begin{array}{cccc} s^3 & 1 & 3 & \\ s^2 & 4 & 12 & \longrightarrow 4s^2 + 12 = 0 \\ s^1 & 0 & & \\ & 8 & & \\ s^0 & 12 & & \end{array}$$

从劳斯表上可以看出有全零行存在,但是首列元素不变号,所以系统有两个根在虚轴上,没有根位于 s 右半平面,闭环系统是临界稳定的。

A3-2 确定使下列系统稳定的 K 值范围:

(1) $s^4 + 22s^3 + 10s^2 + 2s + K = 0$;

(2) $0.1s^3 + s^2 + s + K = 0$ 。

解 (1) 已知系统的特征方程是

$$s^4 + 22s^3 + 10s^2 + 2s + K = 0$$

系统的劳斯表就是

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 10 & K \\ s^3 & 22 & 2 & 0 \\ s^2 & \frac{109}{11} & K & \\ s^1 & \frac{\left(\frac{218}{11} - 22K\right)}{109/11} & & \\ s^0 & K & & \end{array}$$

如果系统是稳定的,则在劳斯表中首列不变号,且没有全零行。所以

$$\begin{cases} \frac{218}{11} - 22K > 0 \\ K > 0 \end{cases}$$

即使闭环稳定的 K 取值范围是 $\frac{109}{121} > K > 0$ 。

(2) 已知系统的特征方程是

$$0.1s^3 + s^2 + s + K = 0$$

系统的劳斯表为

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 0.1 & 1 \\ s^2 & 1 & K \\ s^1 & 1 - 0.1K & \\ s^0 & K & \end{array}$$

如果系统是稳定的,则在劳斯表中首列不变号,且没有全零行。所以

$$\begin{cases} 1 - 0.1K > 0 \\ K > 0 \end{cases}$$

即使闭环稳定的 K 的取值范围是 $10 > K > 0$ 。

A3-3 试确定下列单位反馈系统的位置误差系数 K_p , 速度误差系数 K_v 和加速度误差系数 K_a ($G(s)$ 为开环传递函数)。

$$(1) G(s) = \frac{50}{(1+0.1s)(s+2)}$$

$$(2) G(s) = \frac{K}{s(s^2+4s+200)}$$

$$(3) G(s) = \frac{K(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+2s+10)}$$

$$(4) G(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+2)}$$

解 (1) $G(s) = \frac{50}{(1+0.1s)(s+2)}$

直接验证闭环系统是稳定的。系统为 0 型, 位置误差系数 $K_p = 25$, 速度误差系数 $K_v = 0$, 加速度误差系数 $K_a = 0$ 。

$$(2) G(s) = \frac{K}{s(s^2+4s+200)}$$

当 $0 < K < 800$ 时, 闭环系统稳定。系统为 I 型, 稳定时, 系统的位置误差系数 $K_p = \infty$, 速度误差系数 $K_v = \frac{K}{200}$, 加速度误差系数 $K_a = 0$ 。

$$(3) G(s) = \frac{K(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+2s+10)}$$

当 $K > 0$ 时闭环系统稳定, 系统为 II 型, 稳定时, 位置误差系数 $K_p = \infty$, 速度误

差系数 $K_v = \infty$, 加速度误差系数 $K_a = \frac{K}{10}$ 。

$$(4) G(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+2)}$$

系统临界稳定。系统为 I 型, 位置误差系数 $K_p = \infty$, 速度误差系数 $K_v = 3$, 加速度误差系数 $K_a = 0$ 。这些误差系数只是形式上的定义, 不能用于求稳态误差。

A3-4 试画出满足下列要求的共轭复极点在 s 平面上的分布范围。

(1) $\zeta \geq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$

(2) $0 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$

(3) $0.5 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$

解 (1) 当 $\zeta \geq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$ 时, 极点在 s 平面上的分布范围如下图中阴影部分所示。

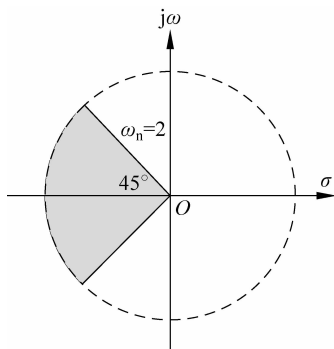


图 3-3(a) 当 $\zeta \geq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$ 时, 极点在 s 平面上的分布范围

(2) $0 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$ 时, 共轭复极点在 s 平面上的分布范围如下图所示。

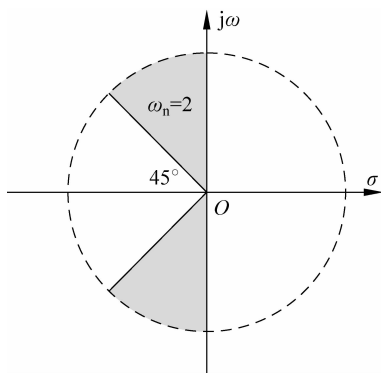


图 3-3(b) 当 $0 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$ 时, 极点在 s 平面上的分布范围

(3) $0.5 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$ 时, 共轭复极点在 s 平面上的分布范围如下图所示。

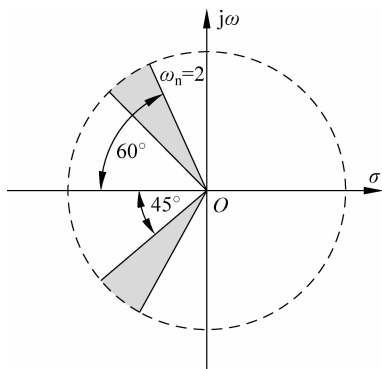


图 3-3(c) 当 $0.5 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$ 时, 极点在 s 平面上的分布范围

A3-5 用劳斯判据判定题 D2-1 系统的稳定性, 并判断在右半 s 平面上的根数。将结果与题 D2-1 的结果进行比较。

解 经如图 3-4 所示方框图运算, 系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{5s^5 + 10s^4 + 10s^3 + 40s^2 + 80s + 80}{s^{10} + 4s^9 - 30s^8 - 132s^7 - 340s^6 - 1022s^5 - 2239s^4 - 3694s^3 - 6252s^2 - 8956s - 5756}$$

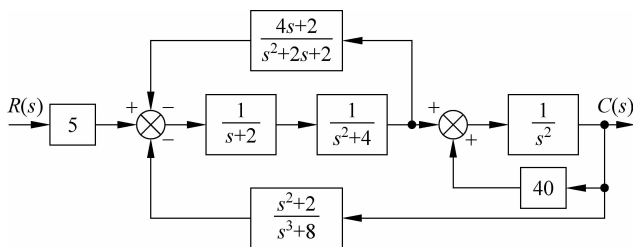


图 3-4 题 D2-1 方框图

系统的劳斯表可以表示为

s^{10}	1	-30	-340	-2239	-6252	-5756
s^9	4	-132	-1022	-3694	-8956	
s^8	3	-84.5	-1315.5	-4013	-5756	
s^7	-19.33	732	1656.67	-1281.33		
s^6	29.1	-1058.4	-4211.9	-5756		
s^5	28.95	-1141.1	-5104.8			
s^4	88.6	919.35	-5756			
s^3	-1441.5	-3224				
s^2	721.2	-5756				
s	-14728.8					
s^0	-5756					

注意到系统的劳斯表的首列变号 5 次,所以系统是不稳定的,系统有 5 个根位于右半 s 平面,与题 D2-1 的结果吻合。

A3-6 某闭环系统如图 3-5 所示。

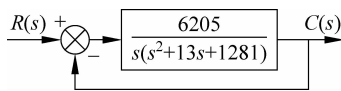


图 3-5 题 A3-6 闭环系统

(1) 求系统的传递函数 $C(s)/R(s)$;

(2) 计算系统的稳态误差系数;

(3) 求闭环系统的零、极点;

(4) 用 MATLAB 求系统的单位阶跃响应曲线;

(5) 讨论闭环极点对系统动态响应的影响,哪些极点起主导作用,哪些极点有重要影响。

解 系统中开环传递函数 $G(s) = \frac{6205}{s(s^2 + 13s + 1281)}$, 反馈传递函数 $H(s) = 1$ 。

(1) 系统的闭环传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{6205}{s^3 + 13s^2 + 1281s + 6205}$ 。

(2) 直接验证闭环系统是稳定的。系统的稳态误差系数: 位置误差系数 $K_p = \infty$, 速度误差系数 $K_v = 4.84$, 加速度误差系数 $K_a = 0$ 。

(3) 由系统的闭环传递函数 $M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{6205}{s^3 + 13s^2 + 1281s + 6205}$ 。

闭环系统不存在零点, 极点为 $s_1 = -5$, $s_2 = -4 + 35j$, $s_3 = -4 - 35j$ 。

(4) 系统的阶跃响应曲线如图 3-6 所示。

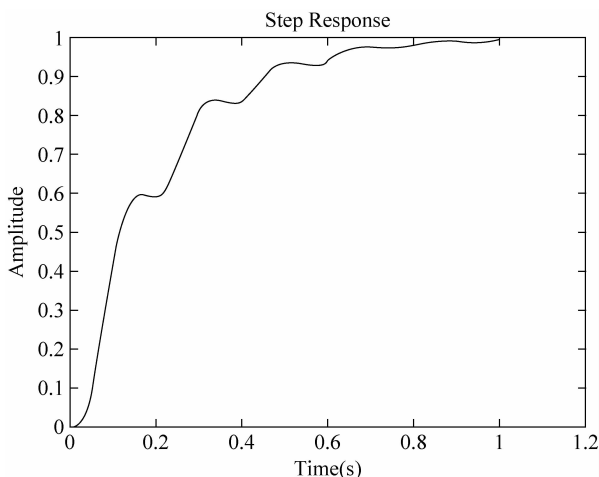


图 3-6 系统的阶跃响应曲线

(5) 系统的闭环极点对于系统的阶跃响应的分析系统的三个极点 $s_1 = -5$, $s_2 = -4 + 35j$, $s_3 = -4 - 35j$ 比较接近, 没有主导极点, 因此阶跃响应与典型二阶系统有较大的区别。

A3-7 某反馈系统如图 3-7 所示。

(1) 选择 K_1, K_2 , 使系统的 $\zeta = 0.707, \omega_n = 2 \text{ rad/s}$;

(2) 选择 K_1, K_2 , 使系统有两个相等的实根 $s = -10$;

(3) 分别求(1)、(2)两种情况下, 系统的超调量 M_p , 调整时间 t_s 和上升时间 t_r 。

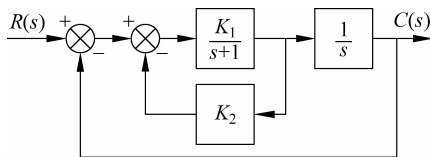


图 3-7 题 A3-7 系统图

解 视系统为单位反馈,其等效开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_1}{s(s+1+K_1K_2)}$, 闭环传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{K_1}{s^2 + (1+K_1K_2)s + K_1}$ 。

(1) 若系统的 $\zeta=0.707, \omega_n=2\text{rad/s}$, 则期望的系统的闭环特征方程就是

$$f^*(s) = s^2 + 2\sqrt{2}s + 4$$

系统的闭环特征方程是

$$f(s) = s^2 + (1+K_1K_2)s + K_1$$

比较对应项的系数得出参数 $K_1=4; K_2=(2\sqrt{2}-1)/4=0.457$ 。

(2) 若系统有两个相等的实根 $s=-10$, 则期望的系统的闭环特征方程就是

$$f^*(s) = s^2 + 20s + 100$$

系统的闭环特征方程是

$$f(s) = s^2 + (1+K_1K_2)s + K_1$$

根据对应项的系数相同的关系得出参数 $K_1=100; K_2=0.19$ 。

(3) 在情况(1)下, 最大超调量

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 4.3\%$$

上升时间

$$t_r = \frac{\pi - \arccos^{-1}\xi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 1.667\text{s}$$

调整时间

$$t_s \approx \frac{3}{\xi\omega_n} = 2.12\text{s} \quad (\Delta = 5\%)$$

在情况(2)下, 系统的 $\xi=1$, 最大超调量

$$M_p = 0$$

上升时间

$$1 - e^{-\omega_n t_1} (1 + \omega_n t_1) = 0.1$$

为超越方程, 无法解, 要用 MATLAB 解。

$$1 - e^{-\omega_n t_2} (1 + \omega_n t_2) = 0.9$$

$$t_r = t_2 - t_1 = 0.39 - 0.055 = 0.335\text{s}$$

调整时间

$$e^{-\omega_n t_s} (1 + \omega_n t_s) = 0.05$$

$$t_s \approx 0.48\text{s} \quad (\Delta = 5\%)$$

A3-8 某单位反馈系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_1(s + \omega_1)}{s^3 + \omega_2 s^2 + k_1 s + k_1 \omega_1}$$

试求输入为 $r(t) = t^2 u(t)$ 时, 系统的稳态输出函数表达式。

解

(1) 先判定稳定性。由系统特征方程 $s^3 + \omega_2 s^2 + k_1 s + k_1 \omega_1 = 0$, 可列写劳斯表如下

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & k_1 \\ s^2 & \omega_2 & k_1 \omega_1 \\ s^1 & \frac{k_1(\omega_2 - \omega_1)}{\omega_2} & \\ s^0 & k_1 \omega_1 & \end{array}$$

由劳斯稳定判据, 可得系统的稳定条件为

$$\begin{cases} \omega_2 > 0 \\ k_1(\omega_2 - \omega_1) > 0 \\ k_1 \omega_1 > 0 \end{cases} \quad \text{即 } k_1 > 0 \quad \omega_2 > \omega_1 > 0$$

(2) 因为该单位反馈闭环系统传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_1(s + \omega_1)}{s^3 + \omega_2 s^2 + k_1 s + k_1 \omega_1} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

其中 $H(s) = 1$, 所以系统开环传递函数 $G(s)H(s) = \frac{k_1(s + \omega_1)}{s^2(s + \omega_2)}$ 为 II 型系统, 得稳态加速度误差系数

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_1 \omega_1}{s + \omega_2} = \frac{k_1 \omega_1}{\omega_2}$$

所以对于输入 $r(t) = t^2 u(t)$, 系统稳态误差为

$$e_{\text{ssn}}(\infty) = \frac{2}{K_a} = \frac{2\omega_2}{K_1 \omega_1}$$

所以系统在满足条件(1)时的稳态输出为 $c(t) = t^2 u(t) - \frac{2\omega_2}{k_1 \omega_1}$ 。

A3-9 求满足下列各项指标的共轭复极点在 s 平面上配置的区域

$$\zeta = 0.5, \quad \omega_n \leq 3 \text{ rad/s}, \quad t_r \leq 1 \text{ s}$$

解 系统的性能指标 $\zeta = 0.5, \omega_n \leq 3, t_r \leq 1 \text{ s}$

$$t_r = \frac{\pi - \arccos \zeta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \leq 1$$

即是

$$\frac{\pi - \arccos 0.5}{\omega_n \sqrt{1 - 0.5^2}} \leq 1$$

得到

$$\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \leq \omega_n \leq 3$$

所以系统的极点在 s 平面上配置的区域如图 3-8 所示。

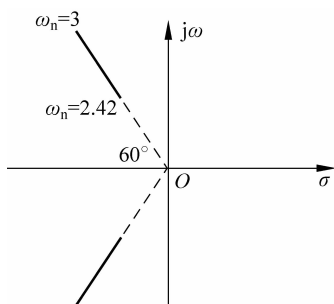


图 3-8 极点在 s 平面上的配置区域

A3-10 某系统有一对共轭主导复极点。根据下列指标要求,分别画出主导复极点在 s 平面上的分布区域:

- (1) $0.5 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \geq 10 \text{ rad/s}$;
- (2) $\zeta \leq 0.707, 5 \text{ rad/s} \leq \omega_n \leq 10 \text{ rad/s}$;
- (3) $0.8 \geq \zeta \geq 0.707, \omega_n \geq 10 \text{ rad/s}$;
- (4) $\zeta \geq 0.6, \omega_n \leq 6 \text{ rad/s}$;
- (5) $\zeta \geq 0.9, \omega_n \leq 0.1 \text{ rad/s}$ 。

并计算满足各指标时,系统的超调量 M_p 和按 2% 准则的调整时间 t_s 。

解 (1) 系统的性能指标 $0.5 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \geq 10$ 。主导复极点在 s 平面上的分布区域如图 3-9 所示。

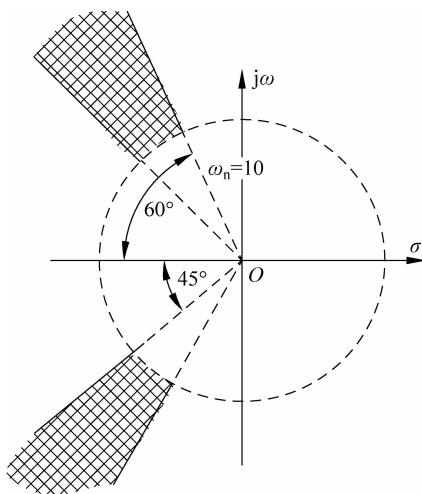


图 3-9 主导复极点在 s 平面上的分布区域

最大超调量

$$M_p = e^{-\pi\zeta / \sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%$$

$$16.3\% \geq M_p \geq 4.3\%$$

调整时间

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} \leq 0.8 \quad (\Delta = 2\%)$$

(2) 系统的性能指标 $\zeta \leq 0.707, 5 \leq \omega_n \leq 10$ 。主导复极点在 s 平面上的分布区域如图 3-10 所示。

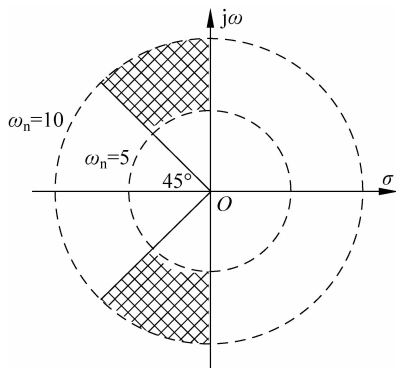


图 3-10 主导复极点在 s 平面上的分布区域

最大超调量

$$M_p = e^{-\pi\zeta / \sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% \geq 4.3\%$$

调整时间

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} \geq 0.57 \quad (\Delta = 2\%)$$

(3) 系统的性能指标 $0.8 \geq \zeta \geq 0.707, \omega_n \geq 10$ 。主导复极点在 s 平面上的分布区域如图 3-11 所示。

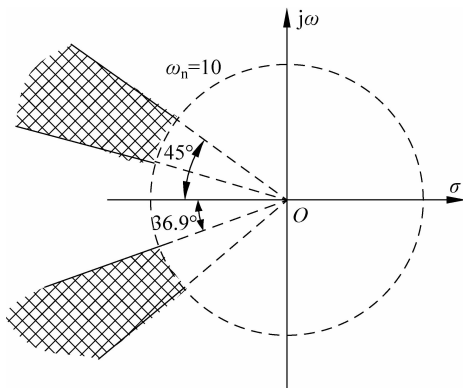
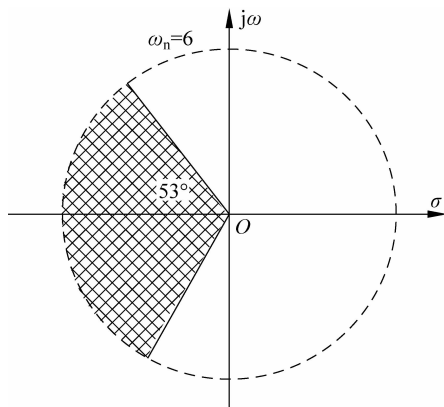


图 3-11 主导复极点在 s 平面上的分布区域

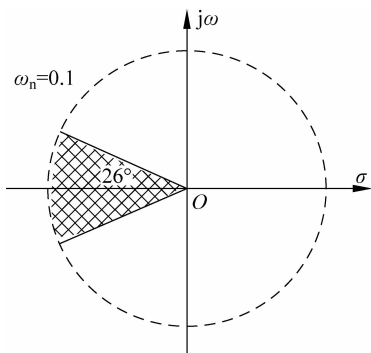
$$4.3\% > M_p > 1.52\%; \quad t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} \leq 0.57, (\Delta = 2\%).$$

(4) 系统的性能指标 $\zeta \geq 0.6, \omega_n \leq 6$ 。主导复极点在 s 平面上的分布区域如图 3-12 所示。

图 3-12 主导复极点在 s 平面上的分布区域

$9.5\% \geq M_p$; 无法确定调节时间范围。

(5) 系统的性能指标 $\zeta \geq 0.9, \omega_n \leq 0.1$ 。主导复极点在 s 平面上的分布区域如图 3-13 所示。

图 3-13 主导复极点在 s 平面上的分布区域

$0.15\% \geq M_p$; 无法确定调节时间范围。

B 深入题

B3-1 试证明在一阶系统动态响应曲线上任意点起,以该点的上升速度上升,达到 $c(\infty)$ 所需的时间都是 T 。如图 3-14 所示,自原点 $0, a$ 点, b 点起,保持各点的上升速度 $\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0}, \left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_a}, \left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_b}$, 上升到 $c(\infty)$ 所需的时间都是 T 。

解 一阶系统的传递函数为 $M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts+1}$, 其单位阶跃响应为

$$C(s) = M(s)R(s) = \frac{K}{Ts+1} \times \frac{1}{s}$$

用拉氏反变换,得

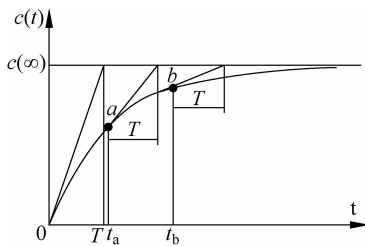


图 3-14 一阶系统动态响应曲线

$$c(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad t \geq 0$$

$c(\infty) = K$ 。又在任意时刻 t_0 , $c(t_0) = K(1 - e^{-\frac{t_0}{T}})$, 上升速度

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{K}{T} e^{-\frac{t_0}{T}}$$

于是在系统的响应曲线上, 从 t_0 以该点的上升速度上升到 $C(\infty) = K$ 的时间 Δt 为

$$\Delta t = \frac{c(\infty) - c(t_0)}{\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_0}} = \frac{K - K(1 - e^{-\frac{t_0}{T}})}{\frac{K}{T} e^{-\frac{t_0}{T}}} = T$$

这就证明了命题。

B3-2 某系统的传递函数未知, 对系统施加输入信号 $r(t) = t(t \geq 0)$, 当系统的初始条件为零时, 系统的输出响应为 $c(t) = 1 + \sin t + 2e^{-2t}, t \geq 0$ 。试确定系统的传递函数。

解 已知系统的输入信号 $r(t) = t(t \geq 0)$, 初始条件为零时的输出响应为 $c(t) = 1 + \sin t + 2e^{-2t}, t \geq 0$ 。对系统的输入与输出函数进行拉氏变换得

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{2}{s + 2}$$

所以系统的传递函数就是

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{2}{s + 2}}{\frac{1}{s^2}} = 3s - 3 + \frac{8s^2 - s + 6}{s^3 + 2s^2 + s + 2}$$

B3-3 试证明图 3-15 系统, 由扰动 $N(s)$ 引起的系统稳态误差为

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s E_N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} N(s) \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

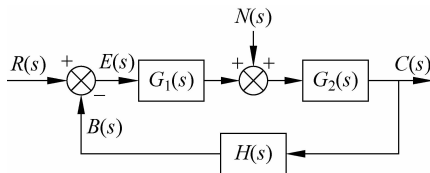


图 3-15 题 B3-2 系统方块图

解 考虑扰动 $N(s)$ 产生的误差 $E(s)$, 令 $R(s)=0$ 。

系统误差与扰动输入之间的传递函数为

$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$E_N(s) = \frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

所以当系统稳定时,用终值定理,由扰动 $N(s)$ 引起的系统稳态误差为

$$e_{\text{ssn}} = \lim_{s \rightarrow 0} s E_N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s N(s) \frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

命题获证。

B3-4 某系统的方块图如图 3-16 所示。

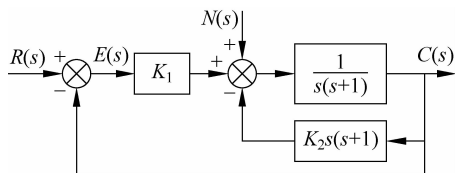


图 3-16 题 B3-4 系统方块图

试求:

- (1) 系统的稳态误差系数: K_p 、 K_v 、 K_a ;
- (2) 由单位阶跃扰动引起的稳态误差 e_{ssn} ;
- (3) 系统的阻尼比 ζ 与无阻尼振荡角频率 ω_n ;
- (4) 选择 $K_1 K_2$, 使系统单位阶跃响应的超调量 $M_p \leq 5\%$ 。

解

系统的方块图可以简化为图 3-17。

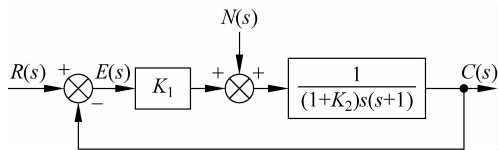


图 3-17 简化的系统方块图

- (1) 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_1}{(K_2 + 1)s(s + 1)}$$

系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K_1}{(K_2 + 1)s^2 + (K_2 + 1)s + K_1}$$

劳斯表如下

s^2	$K_2 + 1$	K_1
s^1	$K_2 + 1$	
s^0	K_1	

由劳斯判据易知

$$\begin{cases} K_2 + 1 > 0 \\ K_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2 > -1 \\ K_1 > 0 \end{cases}$$

系统为 I 型系统, 则

$$K_p = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{K_1}{K_2 + 1}$$

$$K_a = 0$$

(2) 求稳态误差先判定系统稳定。原系统方块图化为如图 3-18 所示。

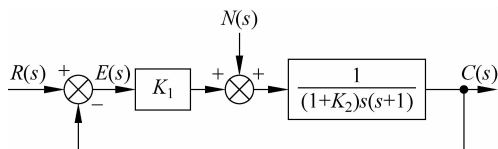


图 3-18 简化的系统方块图

令 $R(s)=0$, 得

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{\frac{1}{(1+K_2)s(s+1)}}{1 + \frac{K_1}{(1+K_2)s(s+1)}} = \frac{1}{(1+K_2)s^2 + (1+K_2)s + K_1}$$

由系统特征方程可排出劳斯表如下

$$\begin{array}{ccc} S^2 & K_2 + 1 & K_1 \\ S^1 & K_2 + 1 & \\ S^0 & K_1 & \end{array}$$

稳定条件为:

$$\begin{cases} K_2 + 1 > 0 \\ K_1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} K_1 > 0 \\ K_2 > -1 \end{cases}$$

在满足上述稳定条件下, 单位阶跃扰动引起的误差为

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{E_N(s)}{N(s)} \cdot N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{-\frac{1}{(1+K_2)s(s+1)}}{1 + \frac{K_1}{(1+K_2)s(s+1)}} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{1}{K_1}$$

所以系统稳定条件下单位阶跃扰动引起的稳态误差 e_{ssn} 为 $-\frac{1}{K_1}$ 。

(3) 由闭环传递函数可知

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = 1 \\ \omega_n^2 = \frac{K_1}{K_2 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K_1}{K_2 + 1}} \\ \zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_2 + 1}{K_1}} \end{cases}$$

(4) 令 $N(s)=0$, 系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_1}{(1+K_2)s(s+1)}}{1 + \frac{K_1}{(1+K_2)s(s+1)}} = \frac{\frac{K_1}{1+K_2}}{s^2 + s + \frac{K_1}{1+K_2}}$$

对此二阶系统传递函数标准形式 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = 1 \\ \omega_n^2 = \frac{K_1}{1+K_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K_1}{1+K_2}} \\ \zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+K_2}{K_1}} \end{cases}$$

二阶系统单位阶跃响应超调量 $M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$, 要使系统超调量 $M_p \leq 5\%$, 即

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \leq 5\% \Rightarrow \zeta \geq \frac{\ln 20}{\sqrt{\pi^2 + (\ln 20)^2}}$$

即

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+K_2}{K_1}} \geq \frac{\ln 20}{\sqrt{\pi^2 + (\ln 20)^2}} \Rightarrow \frac{1+K_2}{K_1} \geq \frac{4(\ln 20)^2}{\pi^2 + (\ln 20)^2} \quad (1)$$

另外, 系统必须满足稳定条件由特征方程 $s^2 + s + \frac{K_1}{1+K_2} = 0$ 得

$$\frac{K_1}{1+K_2} > 0 \quad (2)$$

由①、②知, K_1, K_2 必须满足

$$\frac{1+K_2}{K_1} \geq \frac{4(\ln 20)^2}{\pi^2 + (\ln 20)^2}$$

B3-5 太空望远镜指向系统的简化方块图如图 3-19 所示。

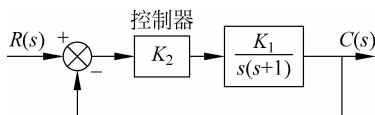


图 3-19 太空望远镜指向控制系统

(1) 选择 K_1 和 K_2 , 使系统单位阶跃响应的超调量 $M_p \leq 5\%$;

(2) 计算该系统单位阶跃响应和单位速度响应的稳态误差。

解 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_1 K_2}{s(s+1)}$$

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{K_1 K_2}{s^2 + s + K_1 K_2}$$

若期望系统的单位阶跃响应的超调量 $M_p \leq 5\%$, 即

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% \leq 5\%$$

得到 $\zeta \geq 0.7$, 所以 $K_1 K_2 = 0.5$, 满足此条件的 K 值都满足超调量要求。

由于系统是Ⅰ型系统,所以系统单位阶跃响应的稳态误差为零,单位速度响应的稳态误差为 $\frac{1}{K_1 K_2}$

C 实践题

C3-1 电枢控制直流电动机可以看成是速度控制系统,反电势是系统的反馈信号。

(1) 按照第2章给出的电枢控制电动机的方程式(2-78)~式(2-81),画出系统的方块图;

(2) 假定 R_a, L_a, J, b, K_t 和 K_e 皆等于1,当以阶跃指令改变电枢电压 u_a 来改变电机的转速后,计算系统的稳态误差;

(3) 为使系统阶跃响应的超调量 $M_p \leq 10\%$,系统的反馈增益 K_e 应当多大?

解 (1) 系统的方块图如图3-20所示。

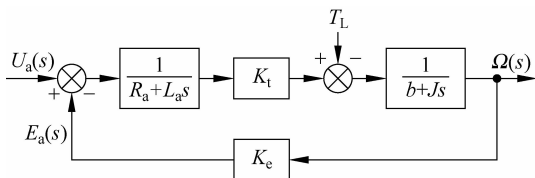


图 3-20 系统的方块图

(2) 假定 L_a, J, b, K_t, K_e 皆等于1,则系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

系统的稳态位置误差系数为

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = 1$$

系统的单位阶跃响应的稳态误差为

$$e_{\text{ssp}} = \frac{1}{1 + K_p} = 0.5$$

(3) 系统的闭环传递函数为

$$M(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + K_e + 1}$$

系统阶跃响应的超调量 $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% \leq 10\%$,计算得到

$$\zeta \geq 0.59$$

所以 $K_e \leq 1.87$ 。

C3-2 图3-21中的三个RC网络分别是相位超前校正网络(a)、相位滞后校正网络(b)和相位超前-滞后校正网络(c),它们在控制系统的设计中是十分有用的。

(1) 分别推导它们的传递函数;

(2) 假定 $R_1 = R_2 = 1\text{k}\Omega, C = C_1 = C_2 = 1\mu\text{F}$,分别画出它们的零、极点在 s 平面上的位置;

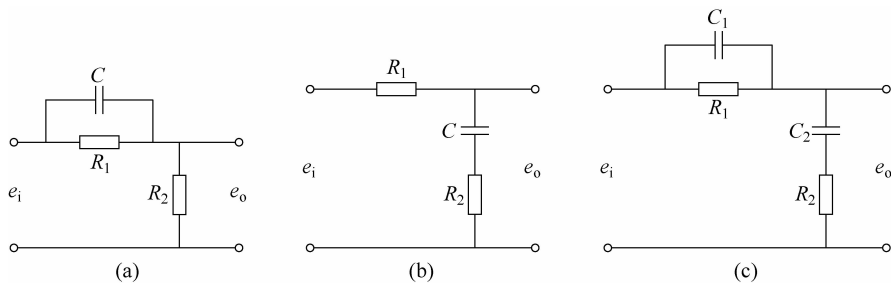


图 3-21 三种校正 RC 网络

(3) 分别求输入 $E_i(s) = \frac{1}{s}$ 时, 网络的输出响应 $e_o(t)$ 曲线。

解 (1) 系统(a)的传递函数为

$$G_a(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{R_1 Cs}} = \frac{R_1 R_2 Cs + R_2}{R_1 R_2 Cs + R_2 + R_1}$$

系统(b)的传递函数为

$$G_b(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{R_2 Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1}$$

系统(c)的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{\frac{R_1 \frac{1}{C_1 s}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}} + R_2 + \frac{1}{C_2 s}} = \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{1 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}$$

(2) 若系统参数为 $R_1 = R_2 = 1\text{k}\Omega$, $C = C_1 = C_2 = 1\mu\text{F}$, 则

$$G_a(s) = \frac{R_1 R_2 Cs + R_2}{R_1 R_2 Cs + R_2 + R_1} = \frac{s + 1000}{s + 2000}$$

可得系统零点为 $z = -1000$, 极点为 $p = -2000$ 。系统的极点与零点分布图如图 3-22 所示。

$$G_b(s) = \frac{R_2 Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1} = \frac{0.001s + 1}{0.002s + 1}$$

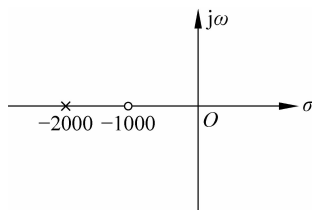


图 3-22 零点、极点分布图

则系统的零点为 $z = -1000$, 极点为 $p = -500$ 。系统的极点与零点分布图如图 3-23 所示。

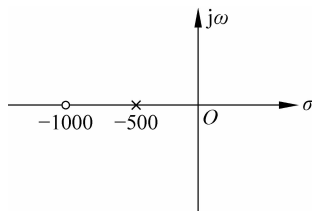


图 3-23 系统的零点、极点分布图

$$G_c(s) = \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{1 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + R_1 C_1 R_2 C_2 s^2} = \frac{(s + 1000)^2}{s^2 + 3000s + 1000000}$$

则系统的零点为 $z_1 = -1000, z_2 = -1000$, 极点为 $p_1 = -2618, p_2 = -382$ 。系统的极点与零点分布图如图 3-24 所示。

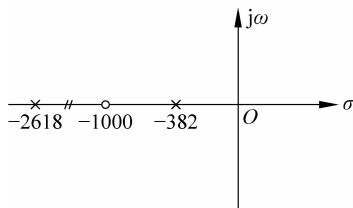


图 3-24 系统的零点、极点分布图

(3) 求输入 $E_i(s) = \frac{1}{s}$ 时, 各个系统的输出响应曲线。

$$G_a(s) = \frac{s + 1000}{s + 2000}$$

响应曲线如图 3-25 所示。

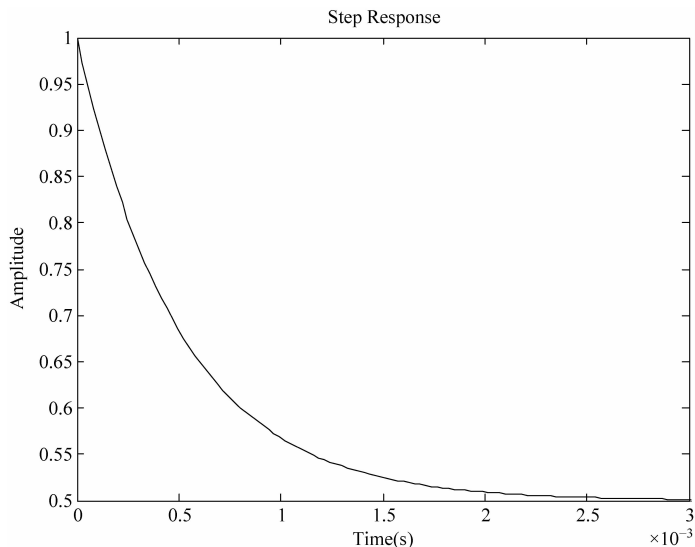


图 3-25 响应曲线图

$$G_b(s) = \frac{0.001s + 1}{0.002s + 1}$$

响应曲线如图 3-26 所示。

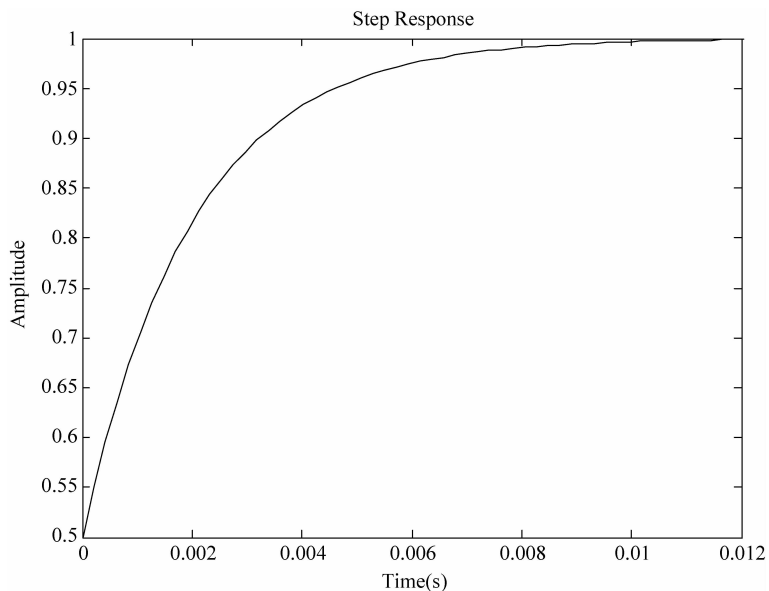


图 3-26 响应曲线图

$$G_c(s) = \frac{(s + 1000)^2}{s^2 + 3000s + 1000000}$$

响应曲线如图 3-27 所示。

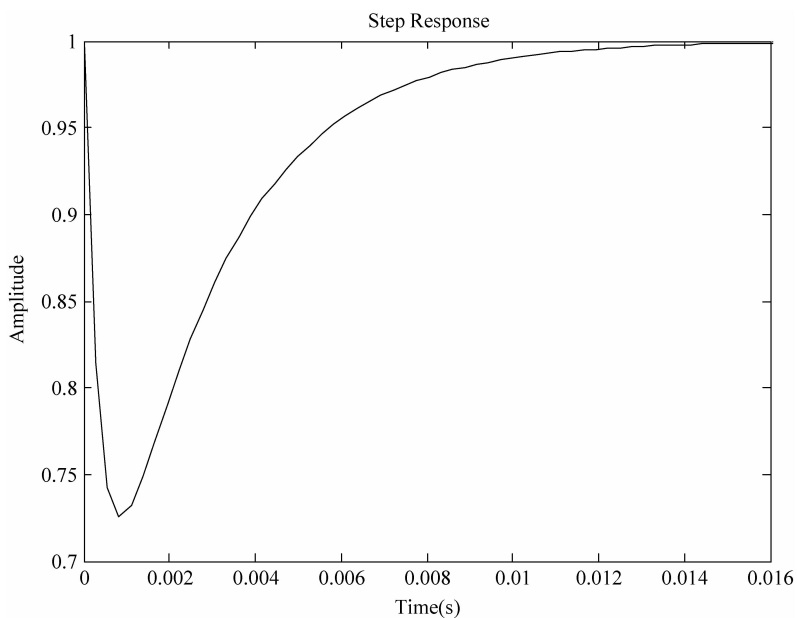


图 3-27 响应曲线图

D MATLAB 题

D3-1 设系统的传递函数为:

$$(1) G(s) = \frac{50}{(1+0.1s)(s+2)}$$

$$(2) G(s) = \frac{K}{s(s^2+4s+200)}$$

$$(3) G(s) = \frac{K(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+2s+10)}$$

$$(4) G(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+2)}$$

试分别求:

(1) 确定系统在单位阶跃输入下的稳态误差;

(2) 如果将共轭极点视为主导极点, 计算系统的超调量 M_p 和按 2% 准则的调整时间 t_s ;

(3) 用 MATLAB 求取系统的单位阶跃响应曲线, 与以上计算结果进行比较。并讨论产生差异的原因。

解 (1) 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{50}{(1+0.1s)(s+2)}$$

闭环传递函数为

$$M(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{500}{s^2+12s+520}$$

系统为 0 型系统, 位置误差系数 $K_p=25$, 单位阶跃输入的稳态误差为

$$e_{ssp} = \frac{1}{1+K_p} = 0.038$$

系统的 $\xi=0.26$, 则最大超调量

$$M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% = 43\%$$

调整时间为

$$t_s \approx \frac{4}{\xi\omega_n} = 0.667s \quad (2\% \text{ 整定})$$

系统的阶跃响应曲线如图 3-28 所示。

实际值与计算值基本一致。

(2) 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2+4s+200)}$$

设 $K=1$, 则闭环传递函数为

$$M(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1}{s^3+4s^2+200s+1}$$

系统的极点为

$$s_1 = -2 + 14j; \quad s_2 = -2 - 14j; \quad s_3 = -0.005$$

系统为 1 型系统, 单位阶跃输入的稳态误差为 0, 系统的阶跃响应曲线如图 3-29 所示。

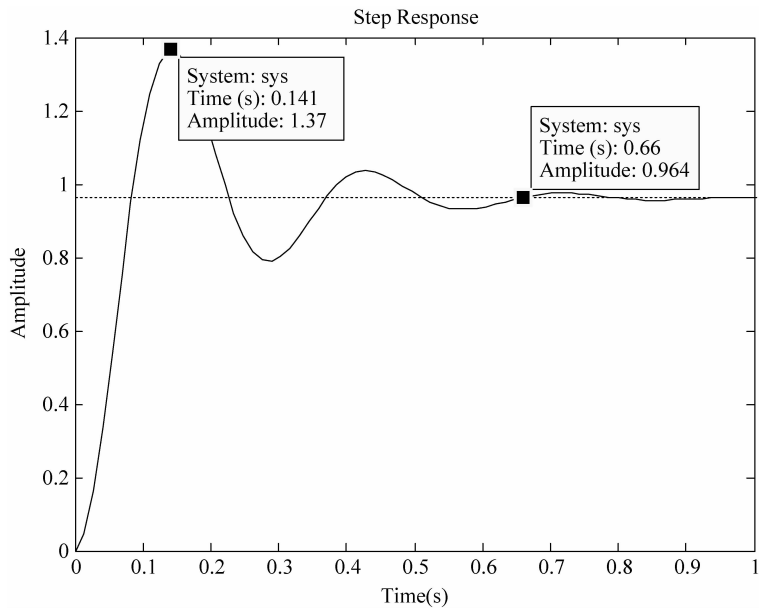


图 3-28 系统的阶跃响应曲线图

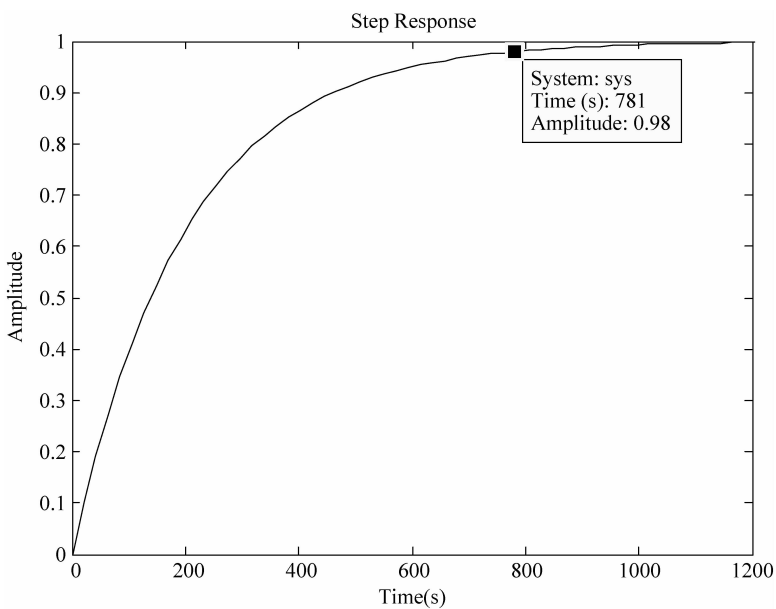


图 3-29 系统的阶跃响应曲线图

可见，系统的阶跃响应是单调的，没有超调。当 $\Delta=2\%$ 时，调整时间为 781。

(3) 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+2s+10)}, \quad \text{设 } K = 10$$

闭环传递函数为

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{80s^2 + 60s + 10}{s^4 + 2s^3 + 90s^2 + 60s + 10}$$

系统的极点为

$$s_1 = -0.6637 + 9.4103j; \quad s_2 = -0.6637 - 9.4103j; \quad s_3 = -0.3628; \quad s_4 = -0.3097$$

系统为 2 型系统, 单位阶跃输入的稳态误差为 0。系统的阶跃响应曲线如图 3-30 所示。

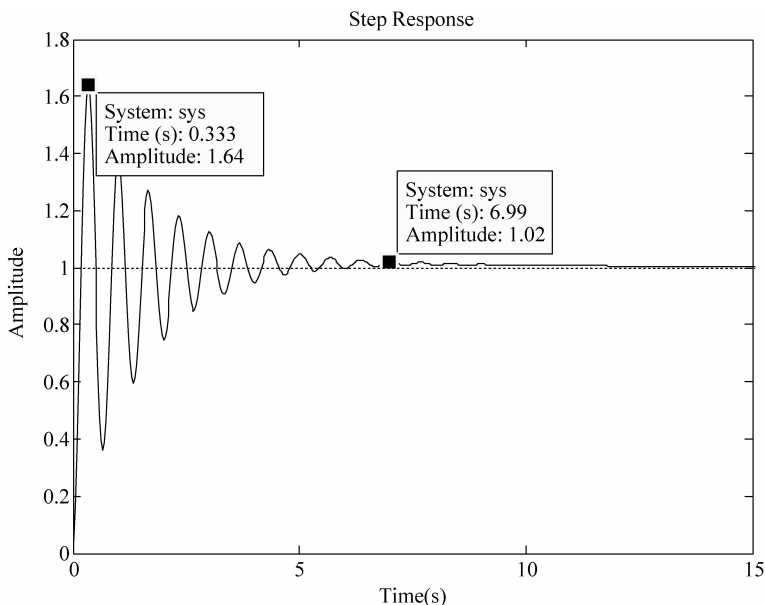


图 3-30 系统的单位阶跃响应曲线

可见, 超调为 64%, 当 $\Delta=2\%$ 时, 调整时间为 8.99。

(4) 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+2)}$$

闭环传递函数为

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{6}{s^3 + 3s^2 + 2s + 6}$$

系统的极点为

$$s_1 = j/\sqrt{2}, s_2 = -j/\sqrt{2}; s_3 = -3$$

系统为 1 型系统, 但是系统临界稳定, 阶跃响应出现等幅振荡(图 3-31), 不稳态不能用终值定理。

D3-2 某控制系统如图 3-32 所示。控制器是 PI 调节器, 它的零点可改变系统的稳态和动态特性, 零点可通过调节器的参数来改变。

(1) PI 调节器对系统稳态误差的影响: 计算 $a=0$ 和 $a>0$ 时, 系统单位阶跃响应的稳态误差;

(2) 计算 $a=0, a=10$ 和 $a=100$ 时, 系统的单位阶跃响应曲线, 分析 a 对动态响应的影响;

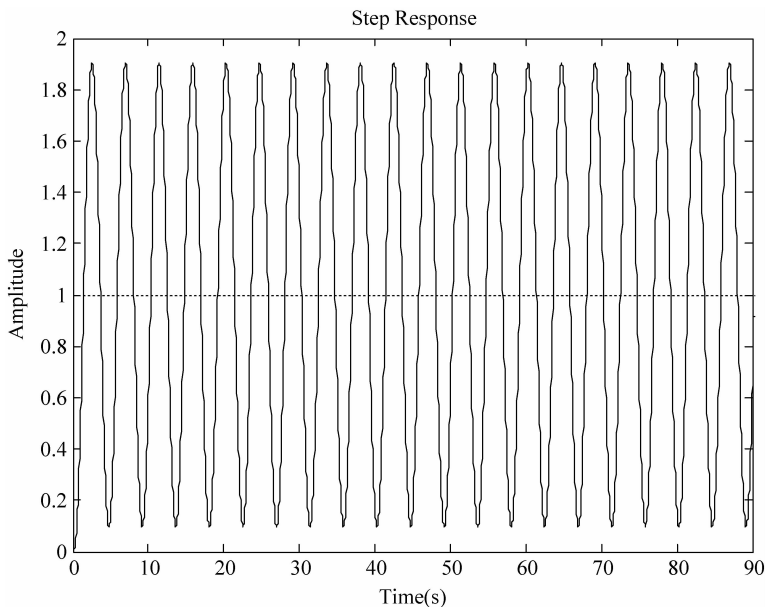


图 3-31 系统的阶跃响应曲线图

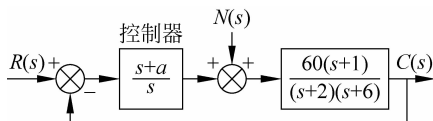


图 3-32 含 PI 调节器的控制系统

(3) 计算 $a=0$, $a=10$ 和 $a=100$ 时, 系统对单位阶跃扰动 ($N(s)=1/s$) 的响应曲线, 分析 a 对系统抗干扰性能的影响。

(4) 你能解释上述计算结果的物理意义吗?

解 系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{(s+a)}{s} \frac{60(s+1)}{(s+2)(s+6)}$ 。

(1) 当 $a=0$ 时, $G(s) = \frac{60(s+1)}{(s+2)(s+6)}$, 系统为 0 型系统, 位置误差系数 $K_p=5$, 单位阶跃输入的稳态误差为

$$e_{\text{ssp}} = \frac{1}{1+K_p} = 0.167$$

当 $a>0$ 时, $G(s) = \frac{(s+a)}{s} \frac{60(s+1)}{(s+2)(s+6)}$, 系统为 I 型系统, 位置误差系数 $K_p=\infty$, 单位阶跃输入的稳态误差为

$$e_{\text{ssp}} = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

可见 PI 调节器可以改善系统的稳态性能。

(2) 当 $a=0$ 时

$$G(s) = \frac{60(s+1)}{(s+2)(s+6)}$$

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{60(s+1)}{s^2+68s+72}$$

系统的单位阶跃响应曲线如图 3-33 所示。

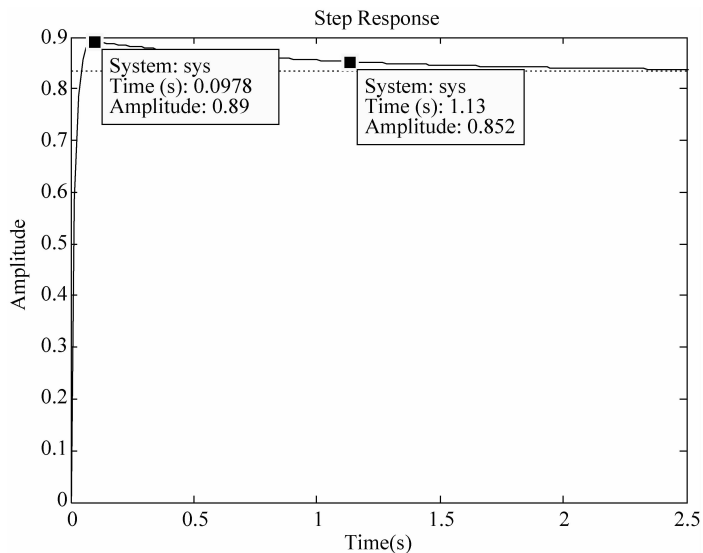


图 3-33 单位阶跃响应

当 $a=10$ 时

$$G(s) = \frac{60(s+1)(s+10)}{s(s+2)(s+6)}$$

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{60s^2+660s+600}{s^3+68s^2+672s+600}$$

系统的单位阶跃响应曲线如图 3-34 所示。

当 $a=100$ 时

$$G(s) = \frac{60(s+1)(s+100)}{s(s+2)(s+6)}$$

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{60s^2+6060s+6000}{s^3+68s^2+6072s+6000}$$

系统的单位阶跃响应曲线如图 3-35 所示。

可见,随着 a 值的增大,系统的稳定性变差,调整时间变长。

(3) 系统扰动的传递函数

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} = \frac{\frac{60(s+1)}{(s+2)(s+6)}}{1+\frac{(s+a)}{s} \frac{60(s+1)}{(s+2)(s+6)}}$$

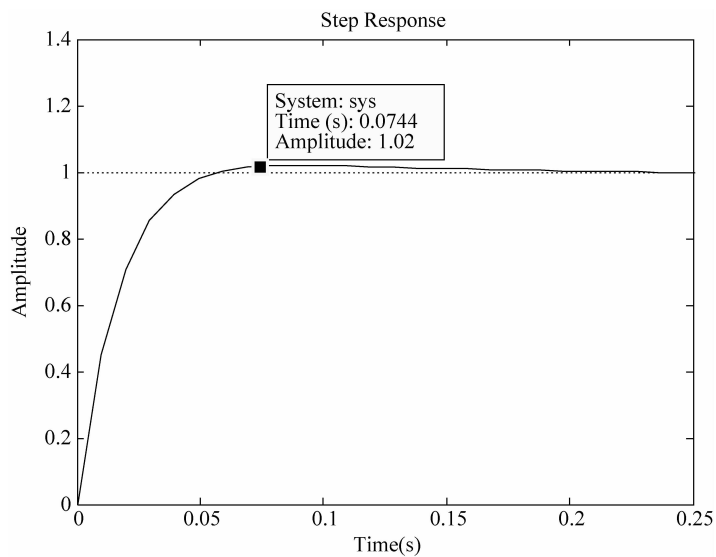


图 3-34 单位阶跃响应

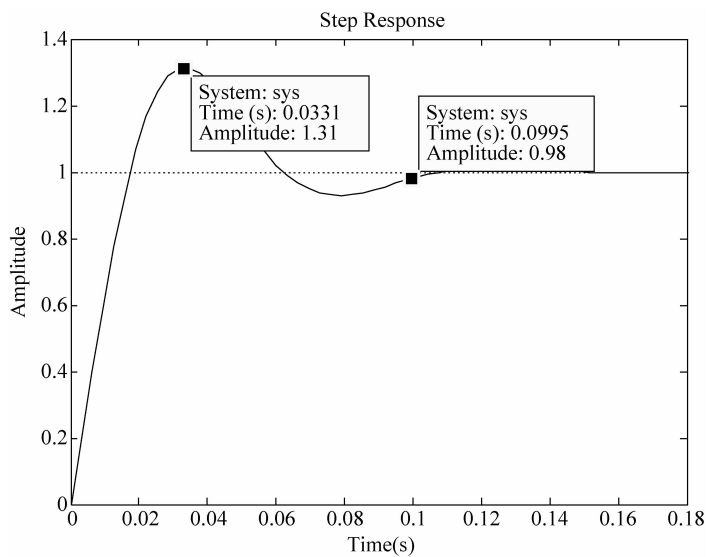


图 3-35 单位阶跃响应

当 $a=0$ 时

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{60(s+1)}{s^2 + 68s + 72}$$

单位阶跃扰动($N(s)=1/s$)的响应曲线如图 3-36 所示。

当 $a=10$ 时

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{60s(s+1)}{s^3 + 68s^2 + 672s + 600}$$

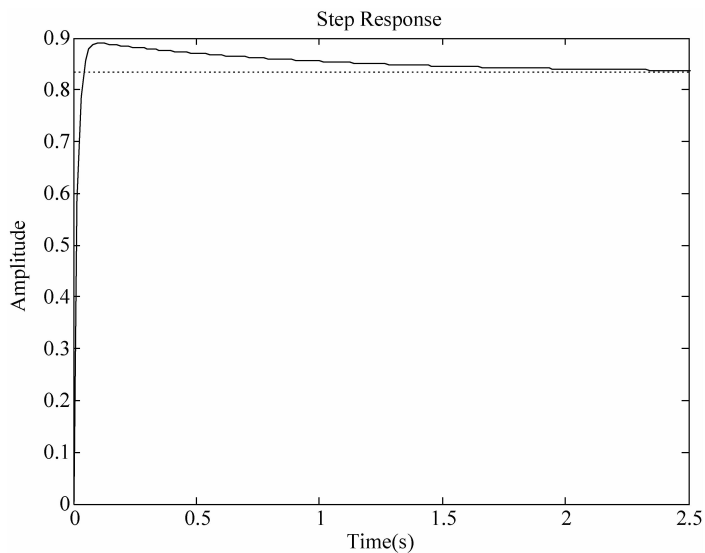


图 3-36 单位阶跃响应

单位阶跃扰动($N(s)=1/s$)的响应曲线如图 3-37 所示。

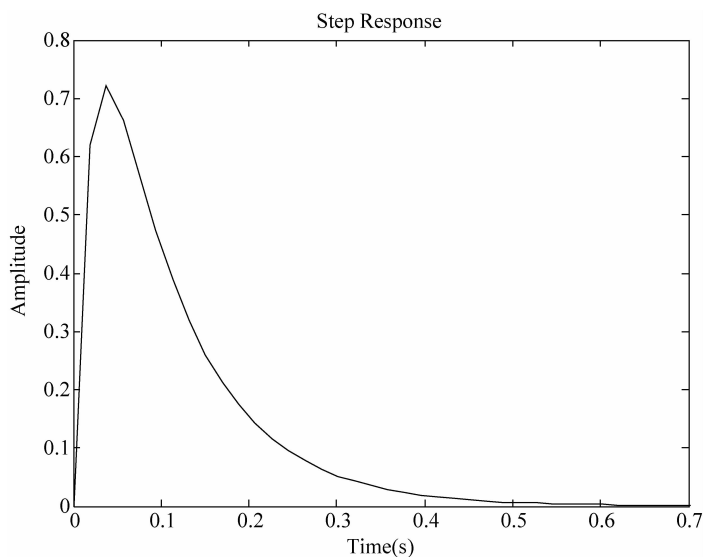


图 3-37 单位阶跃响应

当 $a=100$ 时

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{60s(s+1)}{s^3 + 68s^2 + 6072s + 6000}$$

单位阶跃扰动($N(s)=1/s$)的响应曲线如图 3-38 所示。

可见, a 值增大, 系统的抗干扰能力增强。

(4) 系统的抗干扰能力取决于扰动作用点之前的前向通道中的积分器个数和增益。

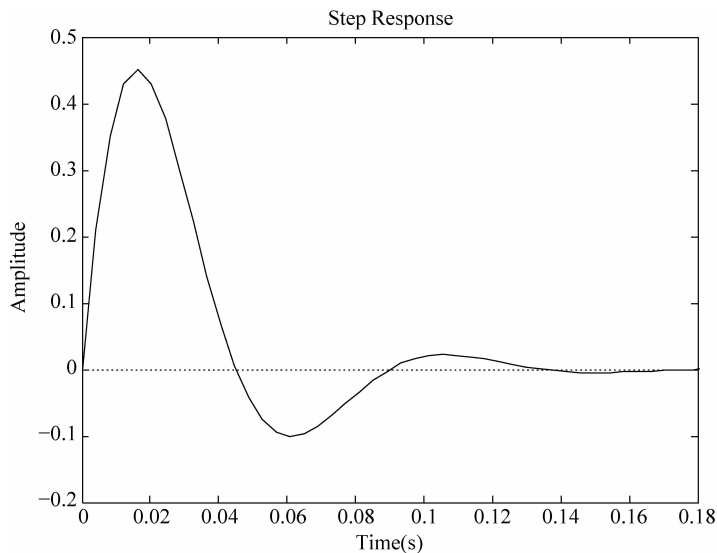


图 3-38 单位阶跃扰动的响应

D3-3 已知闭环系统的传递函数

$$G(s) = \frac{6}{(s^2 + 5s + 6)}$$

- (1) 用解析法计算系统的单位阶跃响应；
- (2) 用 step 命令求系统的单位阶跃响应曲线；
- (3) 比较(1)、(2)的计算结果(超调量 M_p 和按 2% 准则的调整时间 t_s)。

解 闭环系统的传递函数 $G(s) = \frac{6}{(s^2 + 5s + 6)}$, 系统的输入单位阶跃信号

$r(t) = u(t)$, $R(s) = \frac{1}{s}$, 则系统的输出为

$$C(s) = \frac{6}{(s^2 + 5s + 6)} \frac{1}{s}$$

进行拉氏反变换得

$$c(t) = 1 + 6 \left(\frac{e^{-3t}}{3} - \frac{e^{-2t}}{2} \right)$$

系统的超调量为

$$M_p = 0\%$$

系统的调整时间

$$t_s \approx 2.47s, \quad \Delta = 2\%$$

系统的单位阶跃响应如图 3-39 所示。

D3-4 用 MATLAB 的 lsim 命令, 求以下单位负反馈系统对单位加速度输入 ($R(s) = \frac{1}{s^2}$) 的响应, 并求系统的稳态误差。

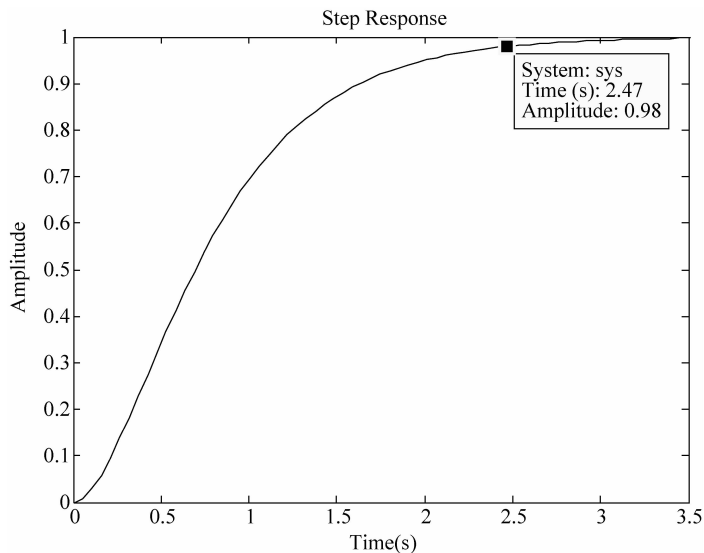


图 3-39 单位阶跃响应

$$(1) G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$$

$$(2) G(s) = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$(3) G(s) = \frac{2}{s^2(s^2 + 2s + 2)}$$

解 使用 `lsim` 命令求系统速度输入 $R(s) = \frac{1}{s^2}$ 的响应, 三个系统分别如下:

(1)

```
num = [2];
den = [1 2 4];
% h = tf(num, den);           % 获得传递函数
[A, B, C, D] = tf2ss(num, den); % 将传递函数转化为状态方程
t = 0:0.1:10;
u = t;
x = u;
sys = ss(A, B, C, D);
x0 = [0 0];
[y, t, x] = lsim(sys, u, t, x0) % 模型的输出响应
plot(t, y, 'b', t, u, 'g')
```

得系统的响应曲线如图 3-40 所示。

由系统开环传递函数求得闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s^2 + 2s + 2}}{1 + \frac{2}{s^2 + 2s + 2}} = \frac{2}{s^2 + 2s + 4}$$

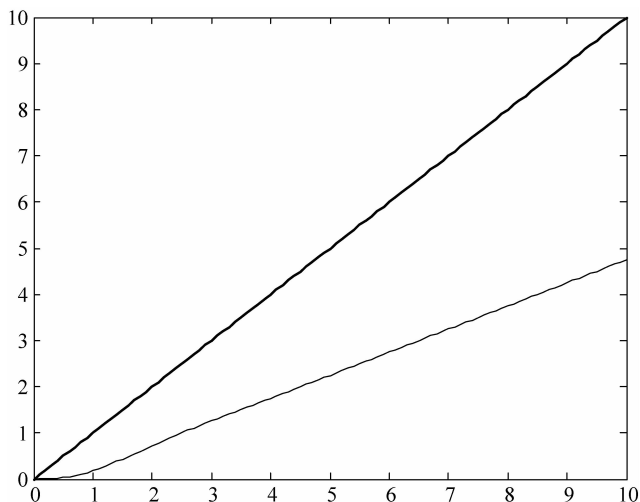


图 3-40 系统的响应曲线

由特征方程 $s^2 + 2s + 4 = 0$ 可知系统稳定。

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0$$

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

则系统的稳态误差为

$$e_{ssv} = \frac{1}{k_v} = \infty$$

(2)

```
num = [2];
den = [1 2 2];
% h = tf(num,den);           % 获得传递函数
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den); % 将传递函数转化为状态方程
t = 0:0.1:10;
u = t;
x = u;
sys = ss(A,B,C,D);
x0 = [0 0 0];
[y,t,x] = lsim(sys,u,t,x0) % 模型的输出响应
plot(t,y,'b',t,u,'g')
```

得系统的响应曲线如图 3-41 所示。

由系统开环传递函数求得闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}}{1 + \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}} = \frac{2}{s^3 + 2s^2 + 2s + 2}$$

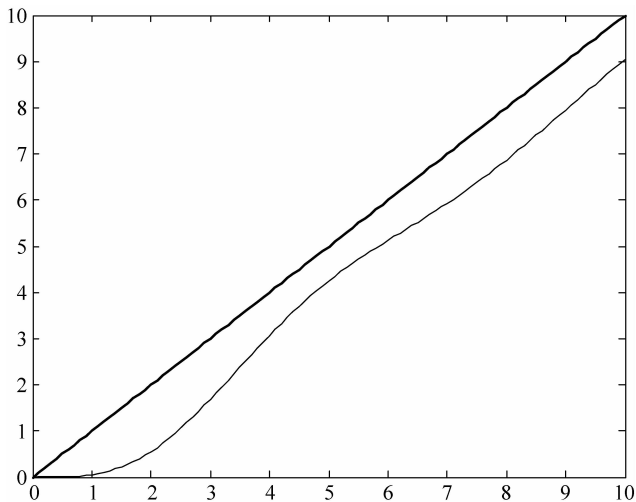


图 3-41 系统的响应曲线

由特征方程 $s^3 + 2s^2 + 2s + 2 = 0$ 可排出劳斯表

$$\begin{array}{rcl} S^3 & 1 & 2 \\ S^2 & 2 & 2 \\ S^1 & 1 & \\ S^0 & 2 & \end{array}$$

由劳斯表可知系统稳定。则

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 1$$

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

于是得到系统的稳态误差为

$$e_{ssv} = \frac{1}{k_v} = 1$$

(3)

```
num = [2];
den = [1 2 2 0 2];
% h = tf(num, den);           % 获得传递函数
[A, B, C, D] = tf2ss(num, den); % 将传递函数转化为状态方程
t = 0:0.1:100;
u = t;
x = u;
sys = ss(A, B, C, D);
x0 = [0 0 0 0];
[y, t, x] = lsim(sys, u, t, x0) % 模型的输出响应
plot(t, y, 'b', t, u, 'g')
```

得系统的响应曲线如图 3-42 所示。

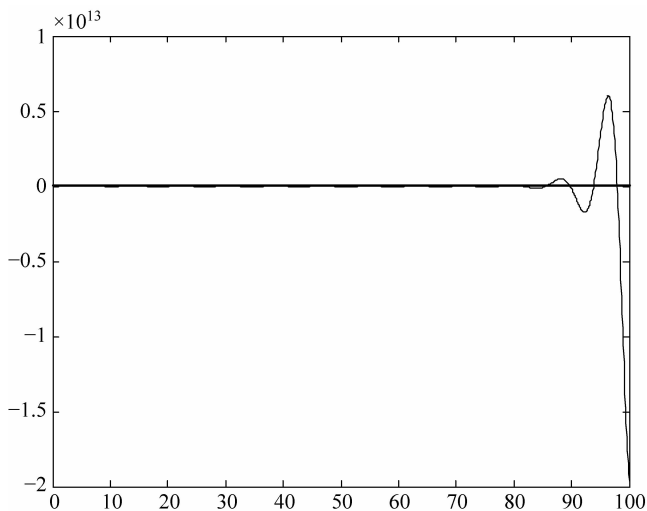


图 3-42 系统的响应曲线

由系统开环传递函数求得闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s^2(s^2 + 2s + 2)}}{1 + \frac{2}{s^2(s^2 + 2s + 2)}} = \frac{2}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2}$$

由特征方程缺项可知系统不稳定,故不存在稳态误差。

D3-5 用 MATLAB 的 lsim 命令,求输入为 $u(t) + tu(t) + \frac{1}{2}t^2 u(t)$ 时,题 D3-4

系统的响应曲线,并求系统的稳态误差。

解 (1)

```
num = [2];
den = [1 2 4];
% h = tf(num, den);           % 获得传递函数
[A, B, C, D] = tf2ss(num, den); % 将传递函数转化为状态方程
t = 0:0.1:10;
[rt, lt] = size(t);
for i = 1:1:lt
    tt(i) = t(i) * t(i);
end
u = 1 + t + 0.5 * tt;
x = u;
sys = ss(A, B, C, D);
x0 = [0 0];
[y, t, x] = lsim(sys, u, t, x0) % 模型的输出响应
plot(t, y, 'b', t, u, 'g')
```

得系统的响应曲线如图 3-43 所示。

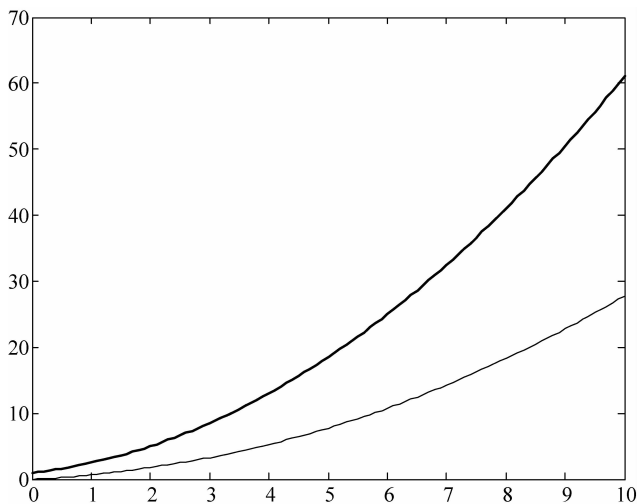


图 3-43 系统的响应曲线

由系统开环传递函数求得闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s^2 + 2s + 2}}{1 + \frac{2}{s^2 + 2s + 2}} = \frac{2}{s^2 + 2s + 4}$$

由特征方程 $s^2 + 2s + 4 = 0$ 可知系统稳定。故

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0$$

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

所以系统的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ssp} + e_{ssv} + e_{ssa} = \frac{1}{1 + k_p} + \frac{1}{k_v} + \frac{1}{k_a} = \infty$$

(2)

```
num = [2];
den = [1 2 2];
% h = tf(num, den);           % 获得传递函数
[A, B, C, D] = tf2ss(num, den); % 将传递函数转化为状态方程
t = 0:0.1:50;
[rt, lt] = size(t);
for i = 1:1:lt
    tt(i) = t(i) * t(i);
end
u = 1 + t + 0.5 * tt;
x = u;
sys = ss(A, B, C, D);
```

```

x0 = [0 0 0];
[y, t, x] = lsim(sys, u, t, x0)    % 模型的输出响应
plot(t, y, 'b', t, u, 'g')

```

得系统的响应曲线如图 3-44 所示。

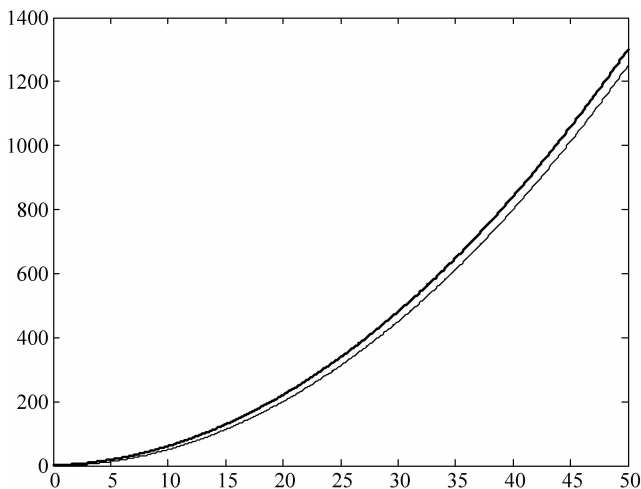


图 3-44 系统的响应曲线

由系统开环传递函数求得闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}}{1 + \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}} = \frac{2}{s^3 + 2s^2 + 2s + 2}$$

由特征方程 $s^3 + 2s^2 + 2s + 2 = 0$ 可排出劳斯表

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 1 & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

由劳斯表可知系统稳定。故

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 1$$

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

则系统的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ssp} + e_{ssv} + e_{ssa} = \frac{1}{1 + k_p} + \frac{1}{k_v} + \frac{1}{k_a} = \infty$$

(3)

```

num = [2];
den = [1 2 2 0 2];

```

```

% h = tf(num,den);           % 获得传递函数
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den); % 将传递函数转化为状态方程
t = 0:0.1:10;
[rt,lt] = size(t);
for i = 1:1:lt
    tt(i) = t(i) * t(i);
end
u = 1 + t + 0.5 * tt;
x = u;
sys = ss(A,B,C,D);
x0 = [0 0 0 0];
[y,t,x] = lsim(sys,u,t,x0)   % 模型的输出响应
plot(t,y,'b',t,u,'g')

```

得系统的响应曲线如图 3-45 所示。

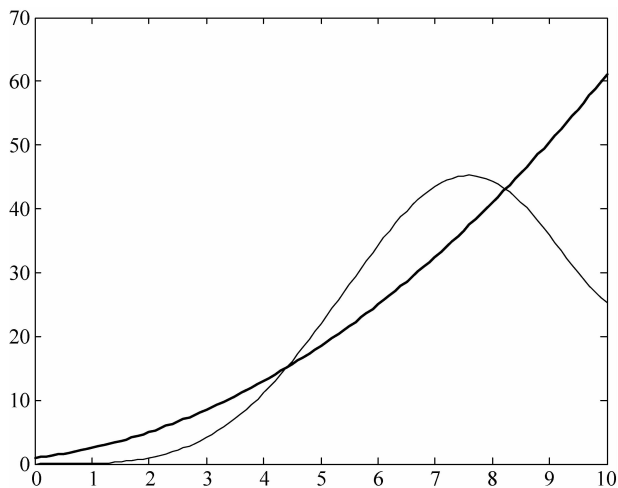


图 3-45 系统的响应曲线

由系统开环传递函数求得闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s^2(s^2 + 2s + 2)}}{1 + \frac{2}{s^2(s^2 + 2s + 2)}} = \frac{2}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2}$$

由特征方程缺项可知系统不稳定,故不存在稳态误差。