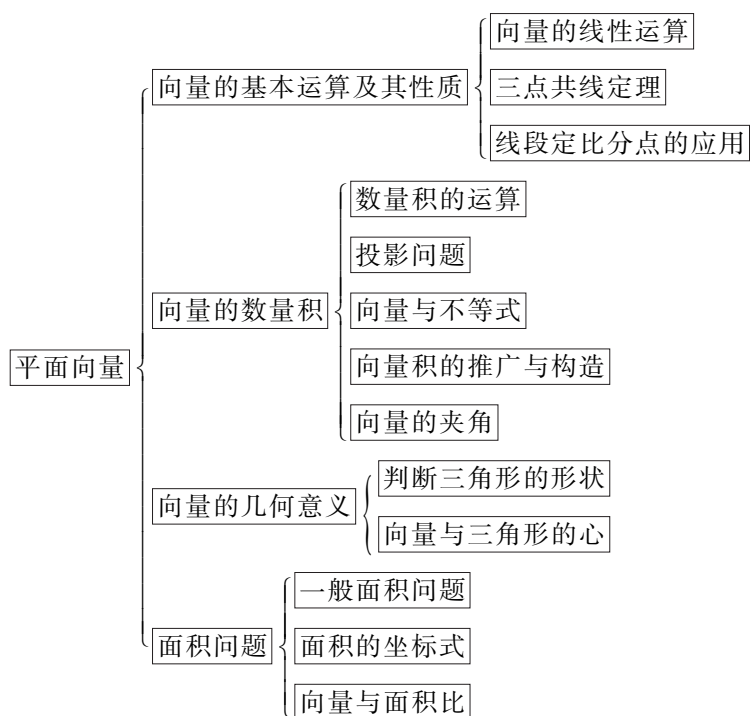


【导读】



向量,作为高中数学的一个内容模块,是每年高考试卷中不可或缺的部分.曾经很长一段时间,向量往往以简单题的形式出现,但近些年,它已逐渐占据了压轴小题的位置.

第一节 向量的基本运算及其性质

深刻理解并掌握平面向量的基本运算及其性质是学好向量的前提. 在有关向量的考题中, 除了直接考查向量的基本运算外, 更多的是将其作为基础, 以更加灵活、更加深入的方式出现, 比如三点共线的性质、定比分点公式的应用等.

一、向量的线性运算

向量的线性运算包括向量的加法、减法、数乘等, 对于每一种运算, 都包括几何运算法则和代数运算法则.

【例 1.1】 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3, AC=4, BC=5$, D, E 分别是 $\triangle ABC$ 的内心、外心, $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, 则 $m+n=(\quad)$.

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{5}{12}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{7}{12}$

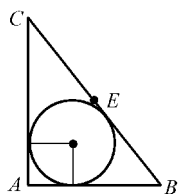


图 1-1

【解析】 由于 $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$, 所以 $\triangle ABC$ 是以 A 为直角顶点的直角三角形, 又因为 E 为 $\triangle ABC$ 的外心, 所以 E 为 BC 的中点, D 为 $\triangle ABC$ 的内心, 如图 1-1 所示, 且 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} + S_{\triangle CBD}$, 由于内心到各个边的距离是相等的, 设距离为 d , 则有 $\frac{1}{2}|AB||AC| = \frac{1}{2}d|AB| + \frac{1}{2}d|AC| + \frac{1}{2}d|CB|$, 可得 $d=1$, 由向量加法的平行四边形法则可得 $\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, 因此 $m+n = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$. 故选 B.

【注】 本题的几何做法中, 关键是 $\overrightarrow{AD}$ 的表示. 平时遇到更多的是理解表达式 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 代表的向量的意义, 本题中需要逆向采用表达式 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 来表达 $\overrightarrow{AD}$, 这对思维的灵活性有一定的要求, 所以平时对基本知识点的把握一定要做到熟练、透彻. 本题也可以将向量置于平面坐标系中, 利用代数运算进行求解.

在例 1.1 中, 涉及三角形的内接圆半径, 即题中的 d . 依照题目中的做法, 对于三角形的内接圆半径, 有如下公式:

【结论 1.1】 三角形的内接圆半径 $r = \frac{2S_{\triangle}}{C_{\triangle}}$, 其中 $S_{\triangle}$ 表示三角形的面积, $C_{\triangle}$ 表示三角形的周长.

【变式 1】(2013 · 四川文, 12) 如图 1-2 所示, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 O , $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AO}$, 则 $\lambda =$ _____.

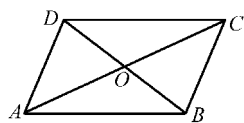


图 1-2

【变式 2】(2012 · 全国理, 6) 在 $\triangle ABC$ 中, AB 边上的高为 CD , 若 $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, 则 $\overrightarrow{AD} =$ ().

A. $\frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b}$

B. $\frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b}$

C. $\frac{3}{5}\mathbf{a} - \frac{3}{5}\mathbf{b}$

D. $\frac{4}{5}\mathbf{a} - \frac{4}{5}\mathbf{b}$

【变式 3】(2008 · 广东理, 8) 在平行四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于 O 点, E 是线段 OD 的中点, AE 的延长线与 CD 交于点 F . 若 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{AF} =$ ().

A. $\frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$

B. $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$

C. $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b}$

D. $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$

【变式 4】(2013 · 江苏, 10) 设 D, E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB, BC 上的点, $AD = \frac{1}{2}AB$, $BE = \frac{2}{3}BC$, 若 $\overrightarrow{DE} = \lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC}$ (λ_1, λ_2 为实数), 则 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的值为 _____.

【变式 5】 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle ABC = 60^\circ$, AD 为边 BC 上的高, O 为 AD 的中点, 若 $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{BC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 ().

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{5}{6}$

D. $\frac{2}{3}$

【例 1.2】 (2011 · 天津理, 14) 已知直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$, $AD = 2$, $BC = 1$, P 是腰 DC 上的动点, 则 $|\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}|$ 的最小值为 _____.

【解析 1】 设 AB 中点为 M , 则 $|\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PB}| = |2\overrightarrow{PM} + 2\overrightarrow{PB}| = 4|\overrightarrow{PN}|$, 如图 1-3 所示, 其中 N 为 BM 的中点. 因为 $ABCD$ 为直角梯形, 所以当 $PN \parallel BC$ 时, $|\overrightarrow{PN}|$ 最小, 根据梯形中位线长度的计算公式可知, $|\overrightarrow{PN}| = \frac{BC + \frac{BC+AD}{2}}{2} = \frac{5}{4}$, 即 $|\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}|_{\min} = 5$. 故填 5.

【解析 2】 如图 1-4 所示建立直角坐标系, 设 $CD = b$, $PD = a$, 则 $A(2, 0)$, $B(1, b)$, $P(0, a)$, $\overrightarrow{PA} = (2, -a)$, $\overrightarrow{PB} = (1, b-a)$, 所以 $\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = (5, 3b-4a)$, 因此 $|\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}| = \sqrt{25 + (3b-4a)^2} \geq 5$, 当且仅当 $3b=4a$ 时等号成立, 故 $|\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}|_{\min} = 5$. 故填 5.

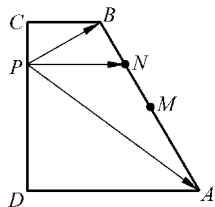


图 1-3

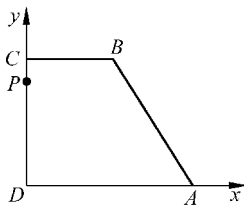


图 1-4

【变式 1】 (2012 · 江西理, 7) 在直角三角形 ABC 中, 点 D 是斜边 AB 的中点, 点 P 为线段 CD 的中点, 则 $\frac{|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2}{|\overrightarrow{PC}|^2} = (\quad)$.

A. 2

B. 4

C. 5

D. 10

【变式 2】 (2007 · 山东理, 11) 在直角三角形 ABC 中, CD 是斜边 AB 上的高, 则下列等式不成立的是 ().

A. $|\overrightarrow{AC}|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

B. $|\overrightarrow{BC}|^2 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

C. $|\overrightarrow{AB}|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$

D. $|\overrightarrow{CD}|^2 = \frac{(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}) \times (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{AB}|^2}$

【变式 3】(2014 · 福建文, 10) 设 M 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点, O 为平行四边形 $ABCD$ 所在平面内任意一点, 则 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ 等于().

- A. $\overrightarrow{OM}$ B. $2\overrightarrow{OM}$ C. $3\overrightarrow{OM}$ D. $4\overrightarrow{OM}$

例 1.1、例 1.2 及其变式对于向量的运算考查都比较简单直接, 根据基本的运算法则便可求解. 但某些计算题却不仅仅是计算本身的问题, 理解题意更关键, 尤以 2013 年重庆理科压轴选择题为典型.

【例 1.3】(2013 · 重庆理, 10) 在平面上, $\overrightarrow{AB_1} \perp \overrightarrow{AB_2}$, $|\overrightarrow{OB_1}| = |\overrightarrow{OB_2}| = 1$, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AB_2}$, 若 $|\overrightarrow{OP}| < \frac{1}{2}$, 则 $|\overrightarrow{OA}|$ 的取值范围是().

- A. $\left[0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ B. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$ C. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{2}\right]$ D. $\left[\frac{\sqrt{7}}{2}, \sqrt{2}\right]$

【解析 1】 根据条件可知 A, B_1, P, B_2 构成一个矩形 AB_1PB_2 , 以 AB_1, AB_2 所在直线为坐标轴建立直角坐标系, 设 $|\overrightarrow{AB_1}| = a$, $|\overrightarrow{AB_2}| = b$, 点 O 的坐标为 (x, y) , 则点 P 的坐标为 (a, b) , 由 $|\overrightarrow{OB_1}| = |\overrightarrow{OB_2}| = 1$, 得 $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + (y-b)^2 = 1, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} (x-a)^2 = 1 - y^2, \\ (y-b)^2 = 1 - x^2, \end{cases}$ 因为 $|\overrightarrow{OP}| < \frac{1}{2}$, 所以 $(x-a)^2 + (y-b)^2 < \frac{1}{4}$, 即 $1 - y^2 + 1 - x^2 < \frac{1}{4}$, 于是

$$x^2 + y^2 > \frac{7}{4} \quad \text{①}$$

又因为 $(x-a)^2 + y^2 = 1$, 所以 $x^2 + y^2 + a^2 = 1 + 2ax \leq 1 + a^2 + x^2$, 可得 $y^2 \leq 1$; 再由 $x^2 + (y-b)^2 = 1$, 所以 $x^2 + y^2 + b^2 = 1 + 2by \leq 1 + b^2 + y^2$, 可得 $x^2 \leq 1$, 因此可知

$$x^2 + y^2 \leq 2 \quad \text{②}$$

由①, ②可知 $\frac{7}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 2$, 所以 $\frac{\sqrt{7}}{2} \leq |\overrightarrow{OA}| \leq \sqrt{2}$. 故选 D.

【解析 2】 $|\overrightarrow{OB_1}| = |\overrightarrow{OB_2}| = 1 \Rightarrow B_1, B_2$ 在以原点为圆心的单位圆上, 不妨设其坐标分别为 $B_1(\cos\alpha, \sin\alpha), B_2(\cos\beta, \sin\beta)$; P 点在以原点为圆心、以 $\frac{1}{2}$ 为半径的圆内, 不妨设其坐标为 $P(r\cos\theta, r\sin\theta) \left(0 \leq r < \frac{1}{2}\right)$; 设点 $A(x, y)$, 则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AB_2} \Rightarrow (r\cos\theta - x, r\sin\theta - y) = (\cos\alpha + \cos\beta - 2x, \sin\alpha + \sin\beta - 2y) \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = \cos\alpha + \cos\beta - r\cos\theta, \\ y = \sin\alpha + \sin\beta - r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB_1} = (r\cos\theta - \cos\beta, r\sin\theta - \sin\beta), \\ \overrightarrow{AB_2} = (r\cos\theta - \cos\alpha, r\sin\theta - \sin\alpha). \end{cases} \end{aligned}$$

于是

$$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AB_2} = 0 \Leftrightarrow r^2 - r\cos(\theta - \alpha) - r\cos(\theta - \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 0.$$

因此 $|\overrightarrow{OA}|^2 = x^2 + y^2 = 2 - r^2 \in \left(\frac{7}{4}, 2\right] \Rightarrow |\overrightarrow{OA}| \in \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \sqrt{2}\right]$. 故选 D.

【变式 1】 已知向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 满足 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0, \overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$, 若 M 为线段 AB 的中点, 且 $|\overrightarrow{MC}| = 1$, 则点 (λ, μ) 在().

- A. 以 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 为圆心, 半径为 1 的圆上
- B. 以 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 为圆心, 半径为 1 的圆上
- C. 以 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 为圆心, 半径为 1 的圆上
- D. 以 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 为圆心, 半径为 1 的圆上

【变式 2】(2014 · 湖南文, 10) 在平面直角坐标系中, O 为原点, $A(-1, 0), B(0, \sqrt{3}), C(3, 0)$, 动点 D 满足 $|\overrightarrow{CD}| = 1$, 则 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}|$ 的取值范围是().

- A. $[4, 6]$
- B. $[\sqrt{19} - 1, \sqrt{19} + 1]$
- C. $[2\sqrt{3}, 2\sqrt{7}]$
- D. $[\sqrt{7} - 1, \sqrt{7} + 1]$

【变式 3】(2014 · 浙江理, 8) 记 $\max\{x, y\} = \begin{cases} x, & x \geq y, \\ y, & x < y, \end{cases}$ $\min\{x, y\} = \begin{cases} y, & x \geq y, \\ x, & x < y, \end{cases}$ 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为平面向量, 则().

- A. $\min\{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|, |\mathbf{a} - \mathbf{b}|\} \leq \min\{|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|\}$
- B. $\min\{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|, |\mathbf{a} - \mathbf{b}|\} \geq \min\{|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|\}$
- C. $\max\{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2, |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2\} \leq |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$
- D. $\max\{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2, |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2\} \geq |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$

二、三点共线定理

【知识点 1.1】 A, B, C 三点共线 $\Leftrightarrow$ 存在 $\lambda + \mu = 1$, 使得 $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$.

【注】 在知识点 1.1 中, 点 O 与 A, B, C 不共线, A, B, C 三点的位置可以任意互换, 但当 A, B, C 三点的相对位置不同时, 系数 λ, μ 的正负会随之改变, 可以利用向量加法的平行四边形法则进行解释, 请读者细细体会.

【例 1.4】(2007 · 江西理, 15) 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 BC 的中点, 过点 O 的直线分别交直线 AB, AC 于不同的两点 M, N , 若 $\overrightarrow{AB} = m \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC} = n \overrightarrow{AN}$, 则 $m + n$ 的值为_____.

【解析 1】 因为点 O 是 BC 的中点, 所以 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$, 又因为 $\overrightarrow{AB} = m \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC} = n \overrightarrow{AN}$, 所以 $\overrightarrow{AO} = \frac{m}{2} \overrightarrow{AM} + \frac{n}{2} \overrightarrow{AN}$. 由点 M, O, N 三点共线, 则 $\frac{m}{2} + \frac{n}{2} = 1$, 于是 $m + n = 2$. 故填 2.

【解析 2】 设 $\overrightarrow{MO} = \lambda \overrightarrow{MN}$, 则

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO} = \frac{1}{m} \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{MN} = \frac{1}{m} \overrightarrow{AB} + \lambda (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) = (1 - \lambda) \frac{1}{m} \overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{n} \overrightarrow{AC}.$$

又因为点 O 为 BC 的中点, 从而 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$, 由唯一性知 $\frac{\lambda}{n} = \frac{1}{2}, (1 - \lambda) \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$, 可得 $m + n = 2$. 故填 2.

本题可以做适当的推广, 有如下结论:

【结论 1.2】 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 BC 上一点, 且 $\overrightarrow{BO} = \lambda \overrightarrow{BC}$, 过点 O 的直线分别交直线 AB, AC 于不同的两点 M, N , 若 $\overrightarrow{AB} = m \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC} = n \overrightarrow{AN}$, 则 $m(1 - \lambda) + n\lambda = 1$.

【结论 1.3】 在 $\triangle ABC$ 中, AO 是 BC 边上的中线, D 为 AO 上一点 (D 与 A 不重合), 且 $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AD}$, 过点 O 的直线分别交直线 AB, AC 于不同的两点 M, N , 若 $\overrightarrow{AB} = m \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC} = n \overrightarrow{AN}$, 则 m, λ, n 成等差数列, 即 $m + n = 2\lambda$.

【变式 1】(2007 · 全国 II 理, 5) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是边 AB 上一点, 若 $\overrightarrow{AD} = 2 \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CA} + \lambda \overrightarrow{CB}$, 则 $\lambda =$ ().

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. $-\frac{2}{3}$

【变式 2】 在 $\triangle ABC$ 中, H 是边 BC 上异于 B, C 的任一点, M 为 AH 的中点, 若 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为_____.

【变式 3】 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 过 G 作直线与 AB, AC 两边分别交于 M, N 两点, 且 $\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = y \overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{xy}{x+y} =$ ().

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$

利用三点共线不仅可以解决求值问题, 也可以解决一些取值范围的问题, 请看下面的例题及其变式.

【例 1.5】(2006 · 湖南理, 15) 如图 1-5 所示, $OM \parallel AB$, 点 P 在由射线 OM 、线段 OB 及 AB 的延长线围成的区域内 (不含边界) 运动, 且 $\overrightarrow{OP} = x \overrightarrow{OA} + y \overrightarrow{OB}$, 则 x 的取值范围是_____; 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, y 的取值范围是_____.

【解析 1】 因为 $OM \parallel AB$, 所以可设 $\overrightarrow{OP} = \lambda_1 \overrightarrow{OB} + \lambda_2 \overrightarrow{AB}$, 而点 P 在区域内, 所以 $0 < \lambda_1 < 1, \lambda_2 > 0$, 故 $\overrightarrow{OP} = -\lambda_2 \overrightarrow{OA} + (\lambda_1 + \lambda_2) \overrightarrow{OB}$, 可得 $x = -\lambda_2$ 且 $y = \lambda_1 + \lambda_2$, 因此 $x = -\lambda_2 < 0$. 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $y = \lambda_1 + \frac{1}{2}$, 因为 $0 < \lambda_1 < 1$, 所以 $\frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}$. 故填 $x < 0; \frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}$.

【解析 2】 如图 1-6 所示, 由解析 1 知 x 的取值范围是 $(-\infty, 0)$, 延长 OP 交 AB 于 D , 则有 $\overrightarrow{OD} = \lambda \overrightarrow{OP} (\lambda > 1)$, 所以 $\overrightarrow{OD} = \lambda x \overrightarrow{OA} + \lambda y \overrightarrow{OB}$, 因为 A, B, D 三点共线, 所以 $\lambda x + \lambda y = 1$, 即 $x + y = \frac{1}{\lambda} \in (0, 1)$, 所以 $0 < x + y < 1$, 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 有 $0 < y - \frac{1}{2} < 1$, 化简可得 $\frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}$, 故填 $x < 0; \frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}$.

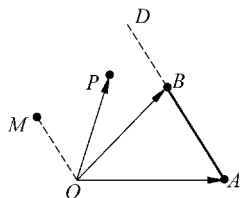


图 1-5

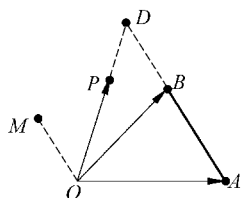


图 1-6

通过例 1.5,我们可以把三点共线定理作进一步的延伸:

(1) 在同一平面内,对于一组基底 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 而言,若点 P 在直线 AB 外,点 O 与点 P 位于直线 AB 的同侧,且射线 OP 与直线 AB 相交,则存在唯一的一对实数 λ_1, λ_2 使得 $\overrightarrow{OP} = \lambda_1 \overrightarrow{OA} + \lambda_2 \overrightarrow{OB}$,且 $0 < \lambda_1 + \lambda_2 < 1$; 反之也成立.

(2) 在同一平面内,对于一组基底 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 而言,若点 P 在直线 AB 外,点 O 与点 P 位于直线 AB 的同侧,且射线 PO 与直线 AB 相交,则存在唯一的一对实数 λ_1, λ_2 使得 $\overrightarrow{OP} = \lambda_1 \overrightarrow{OA} + \lambda_2 \overrightarrow{OB}$,且 $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$; 反之也成立.

(3) 在同一平面内,对于一组基底 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 而言,若点 P 在直线 AB 外,直线 OP 与直线 AB 平行,则存在唯一的一对实数 λ_1, λ_2 使得 $\overrightarrow{OP} = \lambda_1 \overrightarrow{OA} + \lambda_2 \overrightarrow{OB}$,且 $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$; 反之也成立.

(4) 在同一平面内,对于一组基底 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 而言,若点 P 在直线 AB 外,点 O 与点 P 位于直线 AB 的异侧,则存在唯一的一对实数 λ_1, λ_2 使得 $\overrightarrow{OP} = \lambda_1 \overrightarrow{OA} + \lambda_2 \overrightarrow{OB}$,且 $\lambda_1 + \lambda_2 > 1$; 反之也成立.

【变式 1】 在 $\triangle ABC$ 中,若 $AB=3, AC=4, BC=5$,点 D 是边 BC 上的动点, $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$,当 xy 取最大值时, AD 的长为().

A. 4

B. 3

C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{12}{5}$

【变式 2】 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,点 P 是 $\triangle GBC$ 内一点,若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$,则 $\lambda + \mu$ 的取值范围是().

A. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ B. $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ C. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ D. $(1, 2)$

【变式 3】 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=4, AC=8, \angle BAC=60^\circ$,延长 CB 到 D ,使得 $BA=BD$,当点 E 在线段 AB 上移动时,若 $\overrightarrow{AE} = m\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AD}$,当 m 取最大值时, $m+n$ 的值是_____.

【变式 4】 在边长为 1 的正三角形 ABC 中, E, F 分别为边 AB, AC 上的动点, 且满足 $\overrightarrow{AE} = m\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} = n\overrightarrow{AC}$, 其中 $m, n \in (0, 1), m+n=1$, M, N 分别是 EF, BC 的中点, 则 $|\overrightarrow{MN}|$ 的最小值为_____.

【变式 5】 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle BAC = 120^\circ, AB = 2, AC = 1, D$ 是边 BC 上的一点 (包括端点), 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的取值范围为().

A. $[1, 2]$ B. $[0, 1]$ C. $[0, 2]$ D. $[-5, 2]$

三、线段定比分点的应用

【知识点 1.2】 在 $\triangle ABC$ 中, 若 D 是 BC 上一点, 且 $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{DC} (\lambda \neq -1)$, 则向量 $\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC}}{1 + \lambda}$.

【例 1.6】 (2010 · 全国 II 理, 8) 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, CD 平分 $\angle ACB$, 若 $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{CA} = \mathbf{b}, |\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2$, 则 $\overrightarrow{CD} = ()$.

A. $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$ B. $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$ C. $\frac{3}{5}\mathbf{a} + \frac{4}{5}\mathbf{b}$ D. $\frac{4}{5}\mathbf{a} + \frac{3}{5}\mathbf{b}$

【解析】 由 CD 平分 $\angle ACB$ 知 $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{2}{1}$, 则 $|AD| = \frac{2}{3}|AB|, |BD| = \frac{1}{3}|AB|$, 于是 $\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$. 故选 B.

【变式 1】 (2008 · 全国 I 理, 3) 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}, \overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, 若点 D 满足 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AD} = ()$.

A. $\frac{2}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c}$ B. $\frac{5}{3}\mathbf{b} - \frac{2}{3}\mathbf{c}$ C. $\frac{2}{3}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\mathbf{c}$ D. $\frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{c}$