

平面光波导是最常见、最基本的光波导,对它的研究具有重要的实际意义。许多概念以及近似计算方法等也都出自于对平面光波导的研究,所以熟练掌握本章内容是学好其他后续章节的关键。

平面光波导是指组成光波导不同介质的折射率分布的分界面是一些平面的光波导。按照构成光波导的介质层数,可以分成三层、四层……平面波导;按照折射率的分布又可分为均匀(阶跃型)平面波导和非均匀(渐变折射率)平面波导等。

在平面光波导中最重要的概念是模式,它包括模式场与相移项(波动项)两部分,因此,求解平面光波导的问题就归结为如何求模式场分布和如何确定波动项的相移常数。求模式场分布通常是利用分离变量法,这时假定传输常数已经确定;而求传输常数的方法是,利用已知的模式场在边界上连续的条件,列出一个代数方程,这个方程实际上就是模式场函数的本征值方程。

3.1 三层均匀平面波导的射线分析法

光波导的射线分析法不是局限于用传统几何光学的方法给出光线的传播轨迹,而是为了得到波导中光的传播特性,又加入了波动光学的平面波、相位和相干等概念。从这个意义上来说,这种分析方法已不是传统几何光学的分析方法。下面先用射线法来分析一种最简单的平面光波导——三层均匀平面波导。

三层均匀平面波导的结构如图 3-1 所示。折射率沿 x 方向有变化,沿 y 、 z 方向没有变化。它是由薄膜(芯区)、衬底和包层所构成的,薄膜、衬底和包层的折射率分别为 n_1 、 n_2 和 n_3 ,且 $n_1 > n_2 \geq n_3$ 。包层通常为空气,即 $n_3 = 1$,薄膜和衬底的折射率之差一般为 $10^{-3} \sim 10^{-1}$,薄膜厚度一般为几微米。

按照几何光学的理论,光线在芯区中传播的一段是直线,而在芯区-包层的分界面与芯区-衬底的分界面上发生反射和折射。若光线的入射角大于两个分界面上的全反射临界角,则光线在两个分界面上形成全反射,光线被约束在芯区内沿着锯齿形路线向前传

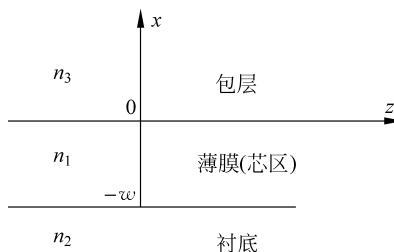


图 3-1 三层均匀平面波导的结构

播,这种受约束的光线称为束缚光线。从波动光学的理论来看,束缚光线是限制在波导中光波的波矢线,它对应的光波称为导波。注意,这个导波已经不是理想的等幅平面波,但是,它可以看作为由斜着向上界面行进的平面波与斜着向下行进的平面波的叠加。

那么是否满足全反射条件就一定能形成导波呢?不一定。导波是被限制在波导中,且能在波导中传播的光波。全反射条件仅仅能使光波被限制在波导中,是形成导波的必要条件,但并不是充分条件,因为导波由两个平面波叠加而成,当这两个平面波到达同一地点时,只有满足相位相同的条件,才能使两波叠加后,发生相互加强,使光波维持在波导中传播,形成导波。否则会因相位不同而相互抵消,使得光波不能沿波导传输。

图 3-2 中画出了两平面波的叠加模型。带箭头的实线代表射线,虚线代表波阵面(等相面)。BD 代表向上界面行进的射线 EB 到达 B 点的波阵面,同时也代表向下界面行进的射线 CD 由 C 点到达 D 点经全反射后的射线 DF 的波阵面。

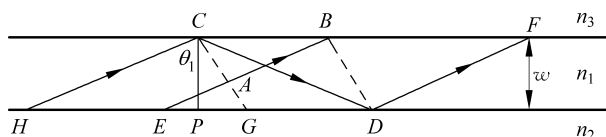


图 3-2 两平面波的叠加模型

由于 A、C 都在同一波阵面 CG 上,所以 EB 光线的 A 点与 HC 光线的 C 点的相位是相同的。因此,如果要想使它们到达 D 点的相位相同,即要求 EB 光线从 A 到达 B 的相移与 HC 光线从 C 经过全反射到达 D 点再经过全反射后的相移相同,或相差 2π 的整数倍。

EB 光线从 A 点到达 B 点的光程为

$$n_1 \overline{AB} = n_1 \overline{BC} \sin \theta_1 = n_1 (\overline{PD} - \overline{PG}) \sin \theta_1 = n_1 \left(w \tan \theta_1 - \frac{w}{\tan \theta_1} \right) \sin \theta_1$$

所以相应的相移为

$$k_0 n_1 \left(w \tan \theta_1 - \frac{w}{\tan \theta_1} \right) \sin \theta_1$$

CD 光线的光程和相移分别为

$$n_1 \overline{CD} = n_1 \frac{w}{\cos \theta_1}, \quad k_0 n_1 \frac{w}{\cos \theta_1}$$

另外 HC 光线从点 C 到达 D 点还要包括两次全反射,所以总的相移为

$$k_0 n_1 \frac{w}{\cos \theta_1} - 2\varphi_{12} - 2\varphi_{13}$$

其中 $-2\varphi_{12}$ 和 $-2\varphi_{13}$ 分别表示光线在芯区与衬底、芯区与包层全反射时产生的相移。

满足 EB 光线从 A 到达 B 的相移与 HC 光线从 C 经过全反射到达 D 再经过全反射后同相,即要求

$$\frac{k_0 n_1 w}{\cos \theta_1} - 2\varphi_{12} - 2\varphi_{13} - k_0 n_1 \left(w \tan \theta_1 - \frac{w}{\tan \theta_1} \right) \sin \theta_1 = 2m\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

上式经过整理后得

$$\kappa w = m\pi + \varphi_{12} + \varphi_{13} \quad (3-1-1)$$

其中, $\kappa = k_x = n_1 k_0 \cos\theta_1 = (n_1^2 k_0^2 - \beta^2)^{1/2} = k_0 (n_1^2 - N^2)^{1/2}$, 这里 $N = \beta/k_0$ 称为模折射率或有效折射率。

对于给定的波导结构和入射光的频率, 不同的 m 值, 方程(3-1-1)中 θ_1 或 β 有不同的解。可见 θ_1 或 β 是一个个分立值, 不同的 θ_1 或 β 对应不同的导波, 不同导波对应在第2章讲到的不同模式, 因此方程(3-1-1)称为模式的本征值方程或特征方程, 这里本征值是指传播常数 β , 通过此方程可以求解出不同模式的传播常数 β 。

由 TE、TM 模全反射时的相移公式, $\varphi_{12}, \varphi_{13}$ 可以进一步写为

$$\text{对 TE 模} \begin{cases} \varphi_{12} = \arctan\left(\frac{P}{\kappa}\right) \\ \varphi_{13} = \arctan\left(\frac{q}{\kappa}\right) \end{cases} \quad \text{对 TM 模} \begin{cases} \varphi_{12} = \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{P}{\kappa}\right) \\ \varphi_{13} = \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_3^2} \frac{q}{\kappa}\right) \end{cases}$$

这里 $P = (\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{1/2} = k_0 (N^2 - n_2^2)^{1/2}$, $q = (\beta^2 - k_0^2 n_3^2)^{1/2} = k_0 (N^2 - n_3^2)^{1/2}$, 因此本征值方程为

$$\kappa\omega = m\pi + \arctan\left(\frac{P}{\kappa}\right) + \arctan\left(\frac{q}{\kappa}\right) \quad \text{对 TE 模} \quad (3-1-2)$$

$$\kappa\omega = m\pi + \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{P}{\kappa}\right) + \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_3^2} \frac{q}{\kappa}\right) \quad \text{对 TM 模} \quad (3-1-3)$$

对于厚度为 ω 的薄膜, 光线从下界面行进到上界面光波的横向 (x 轴方向) 相移是 $\kappa\omega$, 在薄膜上界面光波的全反射相移是 $-2\varphi_{13}$, 光线从上界面返回到下界面光波的横向相移又是 $\kappa\omega$, 在薄膜下界面的全反射相移是 $-2\varphi_{12}$, 所以光线在一个往返周期内光波产生的横向相移与全反射相移的总和为 $2\kappa\omega - 2\varphi_{12} - 2\varphi_{13}$ 。当总相移等于零或 2π 的整数倍时, 就得到了本征值方程(3-1-1)。因此, 本征值方程也可以解释为: 光线在薄膜中完成一个往返周期时, 光波产生的横向相移与全反射相移的总和等于 0 或 2π 的整数倍。

在波导结构确定之后, 本征值方程式(3-1-2)和式(3-1-3)中只有入射光波长和入射角两个变量。因此对于波长一定的光波, 入射角只能取有限个分立值。这说明了在光线的入射角大于两个分界面上的全反射临界角的条件下, 只有特殊角度入射的光波才能形成导波。

射线分析法很直观地给出了波导中光线传播的轨迹和形成导波的条件, 但这种方法不能给出波导中的场分布, 为此在 3.2 节给出波导电磁场的分析方法。

3.2 三层均匀平面波导的电磁场分析法

正规光波导的电磁场分析法是根据正规光波导模式的亥姆霍兹方程和具体波导的边界条件, 求出波导中的光场分布和传播常数等反映传播特性的物理量。这种方法虽然比较复杂, 但精确和全面, 还可处理结构和折射率分布复杂的波导, 是本书中分析光波导的主要方法。

3.2.1 一般平面波导中模式的种类

对于平面波导,因为在 y 方向折射率不发生变化,所以模式场只是 x 的函数,即 $\mathbf{E}(x, y) = \mathbf{E}(x)$, $\mathbf{H}(x, y) = \mathbf{H}(x)$, 那么模式场的横向与纵向分量也只是 x 的函数, 这样式(2-1-32)~式(2-1-35)可以写为

$$\hat{\mathbf{x}} \times \frac{\partial \mathbf{E}_t(x)}{\partial x} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_z(x) \quad (3-2-1)$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \frac{\partial \mathbf{H}_t(x)}{\partial x} = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_z(x) \quad (3-2-2)$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \frac{\partial \mathbf{E}_z(x)}{\partial x} + i\beta\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t(x) = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_t(x) \quad (3-2-3)$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \frac{\partial \mathbf{H}_z(x)}{\partial x} + i\beta\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_t(x) = -i\omega\epsilon \mathbf{E}_t(x) \quad (3-2-4)$$

上面 4 式可以进一步写为(为方便计, $E_t(x)$, $E_x(x)$, $E_y(x)$, $E_z(x)$, $H_t(x)$, $H_x(x)$, $H_y(x)$, $H_z(x)$, 分别简写为 E_t , E_x , E_y , E_z , H_t , H_x , H_y , H_z)

$$\frac{dE_y}{dx} = i\omega\mu_0 H_z \quad (3-2-5)$$

$$\frac{dH_y}{dx} = -i\omega\epsilon E_z \quad (3-2-6)$$

$$-\frac{dE_z}{dx} + i\beta E_x = i\omega\mu_0 H_y \quad (3-2-7)$$

$$i\beta E_y = -i\omega\mu_0 H_x \quad (3-2-8)$$

$$-\frac{dH_z}{dx} + i\beta H_x = -i\omega\epsilon E_y \quad (3-2-9)$$

$$i\beta H_y = i\omega\epsilon E_x \quad (3-2-10)$$

从式(3-2-5)~式(3-2-10)可以看出,式(3-2-5)、式(3-2-8)和式(3-2-9)只含有模式场分量 E_y 、 H_x 和 H_z ; 而式(3-2-6)、式(3-2-7)和式(3-2-10)只含有模式场分量 H_y 、 E_x 和 E_z 。这样模式场的 6 个分量,可以化成独立的两组,分别由两组独立的方程求解。前一组分量的电场只有横向分量 E_y ,故这组分量的模式为 TE 模;而后一组分量的磁场只有横向分量 H_y ,故这组分量的模式为 TM 模,因此在平面波导中只存在 TE、TM 两种模。

对于 TE 模,从式(3-2-8)和式(3-2-5)分别得

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y \quad (3-2-11)$$

$$H_z = -\frac{i}{\omega\mu_0} \frac{dE_y}{dx} \quad (3-2-12)$$

从以上两式可见,对于 TE 模只要求出 E_y 即可求出其他的分量。

对于 TM 模,从式(3-2-10)和式(3-2-6)分别得

$$E_x = \frac{\beta}{\omega \epsilon} H_y \quad (3-2-13)$$

$$E_z = \frac{i}{\omega \epsilon} \frac{dH_y}{dx} \quad (3-2-14)$$

从以上两式可见,对于 TM 模只要求出 H_y 即可求出其他分量。

3.2.2 三层均匀平面波导中模式场的场分布与本征值方程

本小节用电磁场理论具体分析 TE 模模式场的场分布和本征值方程, TM 的分析与之完全类似,这里就不再赘述了。

对均匀平面波导,模式场的亥姆霍兹方程(2-1-22)可以写成

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{dx^2} + (k_0^2 n^2 - \beta^2) \mathbf{E} = 0$$

由于 TE 模电场只有分量 E_y ,所以上式可以写成

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + (k_0^2 n^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad (3-2-15)$$

把图 3-1 所示平面波导三个区域的折射率代入,式(3-2-15)可以变为

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + (k_0^2 n_1^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad \text{芯区} \quad (3-2-16)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + (k_0^2 n_2^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad \text{衬底} \quad (3-2-17)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + (k_0^2 n_3^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad \text{包层} \quad (3-2-18)$$

对于传导模式(简称导模),光场的能量被限制在波导的芯区内,在衬底和包层内远离芯区处的场应为零。因此,光场在芯区是振荡场,在包层和衬底为衰减场,即 $k_0^2 n_2^2 < \beta^2 < k_0^2 n_1^2$,且 $E_y|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$,所以式(3-2-16)~式(3-2-18)的通解为

$$E_y = A_1 \cos(\kappa x + \varphi) \quad (3-2-19)$$

$$E_y = A_2 e^{P(x+w)} \quad (3-2-20)$$

$$E_y = A_3 e^{-qx} \quad (3-2-21)$$

式中

$$\kappa = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3-2-22)$$

$$P = (\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3-2-23)$$

$$q = (\beta^2 - k_0^2 n_3^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3-2-24)$$

A_1, A_2, A_3, φ 是待定常数。

由边界条件 $x=0, x=-w$ 处电场的切向分量连续可得 E_y 在边界上是连续的,因此

$$A_1 \cos \varphi = A_3 \quad (3-2-25)$$

$$A_1 \cos(-\kappa w + \varphi) = A_2 \quad (3-2-26)$$

把以上两式代入式(3-2-20)和式(3-2-21)得

$$E_y = A_1 \cos(\kappa w - \varphi) e^{P(x+w)} \quad (3-2-27)$$

$$E_y = A_1 \cos \varphi e^{-qx} \quad (3-2-28)$$

由边界条件 $x=0, x=-w$ 处磁场的切向分量连续可得 H_z 连续,再由式(3-2-12)可得 $\frac{dE_y}{dx}$ 连续,因此

$$A_1 \kappa \sin \varphi = A_1 q \cos \varphi \quad (3-2-29)$$

$$-A_1 \kappa \sin(-\kappa w + \varphi) = A_1 P \cos(-\kappa w + \varphi) \quad (3-2-30)$$

由式(3-2-29)和式(3-2-30)分别得

$$\tan \varphi = \frac{q}{\kappa} \quad (3-2-31)$$

$$\tan(\kappa w - \varphi) = \frac{P}{\kappa} \quad (3-2-32)$$

联立式(3-2-31)及式(3-2-32)得

$$\kappa w = m\pi + \arctan\left(\frac{P}{\kappa}\right) + \arctan\left(\frac{q}{\kappa}\right) \quad (3-2-33)$$

这里 $m=0, 1, 2, \dots$

由此可见,此方程即为本征值方程,与 3.1 节用射线分析法得到的方程是完全一样的。通过求解它就可以得到在给定入射光与波导参数情况下的不同模式(不同 m)的传播常数 β 值,从而进一步求出模场分布 E_y 、 H_x 和 H_z 。

为了更好地理解不同模式之间的区别及其模阶数 m 与场分布的关系,下面讨论不同模式场分布的特点。

芯区的场分布由式(3-2-19)表示,因此它在芯区出现极大值和节点(零点)的数目由 $\kappa x + \varphi$ 的取值范围决定。由式(3-2-31)可知, φ 的取值范围为 $0 < \varphi < \pi/2$,那么 $\kappa x + \varphi$ 的取值范围为 $-\kappa w + \varphi < \kappa x + \varphi < \pi/2$ 。由式(3-2-32)可知, $-\kappa w + \varphi = -m\pi - \arctan(P/\kappa)$,而 $\arctan(P/\kappa)$ 的取值范围为 $0 < \arctan(P/\kappa) < \pi/2$,所以 $-\kappa w + \varphi$ 的取值范围为 $-(m+1/2)\pi < -\kappa w + \varphi < -m\pi$ 。综上所述, $\kappa x + \varphi$ 的取值范围为 $-(m+1/2)\pi < \kappa x + \varphi < \pi/2$ 。例如,对于 $m=0$ 的零阶模, $\kappa x + \varphi$ 的取值范围为 $-\pi/2 < \kappa x + \varphi < \pi/2$,所以 E_y 在芯区只出现一个极大值,不会出现节点;对于 $m=1$ 的一阶模, $\kappa x + \varphi$ 的取值范围为 $-3\pi/2 < \kappa x + \varphi < \pi/2$,所以 E_y 在芯区会出现两个极值点,出现一个节点。总之,对于 m 阶模, E_y 在芯区会出现 $m+1$ 个极值点,出现 m 个节点。

衬底和包层的场分布由式(3-2-27)和式(3-2-28)决定。阶次 m 越大, β 值越小, P 、 q 越小,从而使场延伸到衬底和包层的距离越长。

例如,对于 $n_1=1.62, n_2=1.515, n_3=1, w=5\mu\text{m}$ 的三层平面波导,若入射光的波长 $\lambda=1.55\mu\text{m}$ 。通过附录 III 中的程序 1,让程序中的 m 分别取 0、1、2 和 3;可以估算出 TE_0 、 TE_1 、 TE_2 和 TE_3 模传播常数的范围分别为 $6.5 \sim 6.55$ 、 $6.45 \sim 6.5$ 、 $6.3 \sim 6.4$ 和 $6.15 \sim 6.2$ 。再运行程序 2 即可解出这些模的 β 值分别为 6.5432、6.4719、6.3535 和 6.1937(单位: $1/\mu\text{m}$)。在程序 2 中,“slab_waveguide”是函数文件(见附录 III 中的程序 3)。在求出 β 之后,通过求程序 2 又可进一步求出各模式的 κ 、 P 、 q 和 φ 值,并画出这几个模式的电场分

布,如图 3-3 所示,这里设 $A_1=1$ 。

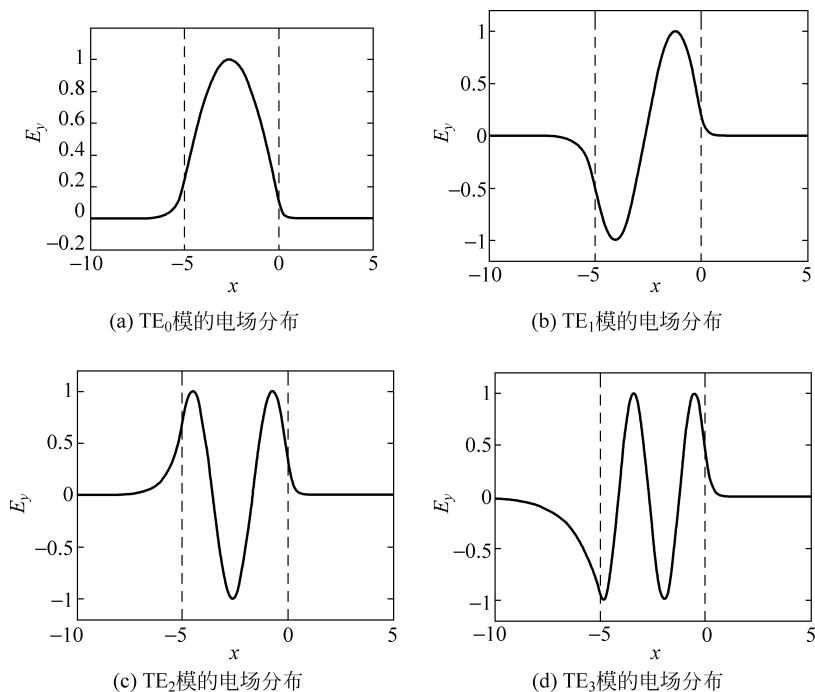


图 3-3 几个模式的电场分布

3.2.3 模截止及波导中的传输模式数

若把 TE 模、TM 模的本征方程写成一个统一的公式,则本征值方程可写为

$$\kappa\omega = m\pi + \arctan\left(c_{12} \frac{P}{\kappa}\right) + \arctan\left(c_{13} \frac{q}{\kappa}\right) \quad (3-2-34)$$

或写为

$$(n_1^2 k_0^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \omega = m\pi + \arctan\left[c_{12} \left(\frac{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \arctan\left[c_{13} \left(\frac{\beta^2 - n_3^2 k_0^2}{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad (3-2-35)$$

$$(n_1^2 - N^2)^{\frac{1}{2}} k_0 \omega = m\pi + \arctan\left[c_{12} \left(\frac{N^2 - n_2^2}{n_1^2 - N^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \arctan\left[c_{13} \left(\frac{N^2 - n_3^2}{n_1^2 - N^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad (3-2-36)$$

上三式中,对 TE 模, $c_{12}=c_{13}=1$; 对 TM 模, $c_{12}=(n_1/n_2)^2$, $c_{13}=(n_1/n_3)^2$ 。

从式(3-2-36)可以看出: 在给定入射光的频率,波导折射率 n_1 、 n_2 和 n_3 时,可以得到平板波导的有效折射率 N 随波导芯区厚度 ω 的变化关系曲线,如图 3-4 所示; 同样在给定波导的参数 ω 、 n_1 、 n_2 和 n_3 时又可通过式(3-2-35)得到平板波导传播常数 β 随入射光频率 ω 变化关系曲线,如图 3-5 所示。

当 $N=n_2$ 时,薄膜的厚度称为截止厚度,用 ω_c 表示。从式(3-2-36)可得

$$\omega_c = \frac{1}{k_0(n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ m\pi + \arctan \left[c_{13} \left(\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (3-2-37)$$

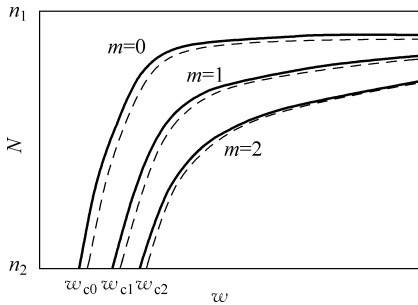


图 3-4 平板波导的有效折射率 N 随波导芯区厚度 w 的变化关系曲线(实线和虚线分别对应 $m=0, 1, 2$ 三个 TE 和 TM 导模, w_{c0}, w_{c1}, w_{c2} 分别为 TE₀、TE₁ 和 TE₂ 的截止厚度)

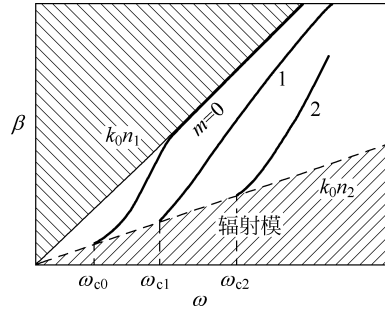


图 3-5 平板波导传播常数 β 随入射光频率 ω 变化关系曲线(其中 $\omega_{c0}, \omega_{c1}, \omega_{c2}$ 分别为 TE₀、TE₁ 和 TE₂ 模的截止频率)

截止厚度的意义: 若由式(3-2-37)确定了某一模式的截止厚度, 则当波导芯区的厚度小于此厚度时, 此模及阶数高于此模的模式是不存在的。如 TE₁ 模的截止厚度为 w_{c1} , 若 $w \leq w_{c1}$, 则波导中不存在 TE₁、TE₂ 和 TE₃ 及其他高阶模。从式(3-2-37)还可以看出

(1) w_c 随 m 的增大而增大。

(2) 若入射光的频率增大, 则 w_c 变小, 这说明对某一频率光波导不存在的模式, 对比此频率高的光波, 这种模式可能存在。例如有频率分别为 ω_1 和 ω_2 的两种不同光, 且 $\omega_2 > \omega_1$, 则频率为 ω_1 光某模式(如 TE₁ 模)的截止厚度 w'_{c1} 大于频率为 ω_2 光 TE₁ 模的截止厚度 w''_{c1} 。若波导的厚度 w 满足: $w''_{c1} < w < w'_{c1}$, 则频率为 ω_2 光的 TE₁ 模存在, 频率为 ω_1 光的 TE₁ 模不存在。

(3) TM 模的截止厚度大于同阶 TE 模的截止厚度。

(4) 当 $n_2 = n_3$ 时(称为三层对称平面波导), 有

$$\omega_c = \frac{m\pi}{k_0(n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

对零阶模有 $w_c = 0$, 所以三层对称平面波导的零阶模不会截止。

同样在给定波导参数 w, n_1, n_2 和 n_3 的情况下, 可以求出某一模式的截止频率

$$\omega_c = \frac{c}{(n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{w} \left\{ m\pi + \arctan \left[c_{13} \left(\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (3-2-38)$$

同截止厚度一样, 对上式也可以进行类似的讨论, 这里不再赘述。

从前面的讨论可见, 对于 $n_2 \neq n_3$ 的非对称平面波导, TE₀ 模是最不容易截止的一种模式, 若波导中只能传输 TE₀ 模这一种模式, 称为单模传输。在给定入射光的频率, 波导折射率 n_1, n_2 和 n_3 时, 单模传输条件为 $w_c(\text{TE}_0) < w < w_c(\text{TM}_0)$; 给定波导参数时, 单模传输的条件为 $\omega_c(\text{TE}_0) < \omega < \omega_c(\text{TM}_0)$ 或 $\lambda_c(\text{TM}_0) < \lambda < \lambda_c(\text{TE}_0)$ 。应该说明的是: 实际光波导

的 n_1 、 n_2 和 n_3 相差不大,因而 TE_0 和 TM_0 模的截止厚度、截止频率和截止波长都相差不大。为此,在实际工程中,认为 TE_0 和 TM_0 模的截止厚度近似相等,而将单模传输条件放宽到 $\omega_c(TE_0) < \omega < \omega_c(TE_1)$ 、 $\omega_c(TE_0) < \omega < \omega_c(TE_1)$ 和 $\lambda_c(TE_1) < \lambda < \lambda_c(TE_0)$ 。此种条件下, TE_0 和 TM_0 模都可以传输。

若已知波导参数和入射光的波长,则可以求出波导中能够传输 TE、TM 模式的数量分别为

$$M_{TE} = \text{Int} \left[\frac{2\omega}{\lambda} (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \quad (3-2-39)$$

$$M_{TM} = \text{Int} \left\{ \frac{2\omega}{\lambda} (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\pi} \arctan \left[\frac{n_1^2}{n_3^2} \left(\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + 1 \right\} \quad (3-2-40)$$

式中 Int 表示只取整数部分。波导中能够传输模式的总数量为

$$M = M_{TE} + M_{TM}$$

3.2.4 归一化参量

为了方便,常常把波导进行归一化计算,为此首先定义几个无量纲的参量。归一化厚度(或归一化频率)

$$V = k_0 \omega \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (3-2-41)$$

归一化波导折射率或归一化传播常数

$$P^2 = \frac{N^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} = \frac{(\beta/k_0)^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \quad (3-2-42)$$

P^2 的取值范围为 $0 < P^2 < 1$, $P^2 = 0$ 相应于截止,在近截止区, $P^2 \ll 1$,在远截止区, $1 - P^2 \ll 1$ 。

波导结构非对称的参量

$$\Delta = (n_2^2 - n_3^2) / (n_1^2 - n_2^2) \quad (3-2-43)$$

$\Delta = 0$ 相应于对称平板波导, $\Delta \rightarrow \infty$ 则对应于强非对称的平板波导 ($n_1 \approx n_2, n_2 \neq n_3$)。

对于 TE 模,利用上述各归一化参量的定义式,可以把本征值方程写成下列形式

$$V\sqrt{1 - P^2} = m\pi + \arctan \sqrt{P^2 / (1 - P^2)} + \arctan \sqrt{(P^2 + \Delta) / (1 - P^2)} \quad (3-2-44)$$

从上式可见,经过归一化定义之后,无论波导参量 ω 、 n_1 、 n_2 、 n_3 和入射光的波数 k_0 为何值都可以用此式表示。若几个不同波导结构的非对称参量 Δ 值相等, P^2 与 V 的关系曲线完全一致,这说明一条 $P^2 \sim V$ 曲线可以代表 Δ 相同的一类波导,这就是归一化的好处。

在式(3-2-44)中,令 $P^2 = 0$,我们便求得归一化截止频率为

$$V_c = m\pi + \arctan \sqrt{\Delta}$$

又可写为

$$(\omega/\lambda)_c = \frac{1}{2\pi} (n_1^2 - n_2^2)^{-1/2} (m\pi + \arctan \sqrt{\Delta}) \quad (3-2-45)$$

由此可在给定波长 λ 的情况下,求得 m 阶 TE 模的截止厚度。当导模数目较多(例如在 5 个以上)时,由上式可得估算波导中允许存在的 TE 导模数目的近似公式

$$m \approx \frac{2\tau w}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (3-2-46)$$

对于 TM 模, 归一化本征值方程可写成

$$V\sqrt{1-P^2} = m\pi + \arctan \left[\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sqrt{P^2/(1-P^2)} \right] + \arctan \left[\left(\frac{n_1}{n_3} \right)^2 \sqrt{(P^2 + \Delta)/(1-P^2)} \right] \quad (3-2-47)$$

它和 TE 模的对应方程(3-2-44)相似, 意义也类似, 不再赘述。

3.3 非均匀平面波导的射线分析法

从射线光学观点看, 在均匀平板波导中传播的导波光, 沿锯齿形光路前进时, 要在上、下两个界面反复作全反射, 必然因界面的不规则性而引起散射, 使传输损耗增加。为减小传输损耗, 可用扩散、离子交换和离子注入等技术制成波导层内折射率渐变的非均匀或渐变折射率的平面波导。在非均匀平面波导中, 因光线前进时可以远离界面, 故能避免因界面的不规则性引起的散射损耗。

3.3.1 光线在非均匀平面波导中的轨迹

在非均匀平面波导中, 射线方程(2-2-15)可以写为

$$\frac{d}{ds} \left[n(x) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] = \frac{dn(x)}{dx} \hat{\mathbf{x}} \quad (3-3-1)$$

由于光沿着 z 轴方向传播, 因而光线的路径是 xOz 平面内的曲线, 故

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + z\hat{\mathbf{z}}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dz}{ds}\hat{\mathbf{z}}$$

这样式(3-3-1)的 x 和 z 分量可分别写为

$$\frac{d}{ds} \left[n(x) \frac{dx}{ds} \right] = \frac{dn(x)}{dx} \quad (3-3-2)$$

$$\frac{d}{ds} \left[n(x) \frac{dz}{ds} \right] = 0 \quad (3-3-3)$$

在 xOz 平面内, ds 、 dx 、 dz 的关系如图 3-6 所示, 可见 $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$, 若用 $\theta(x)$ 表示光线上某点的切线与 z 轴的夹角, 则 $dz = ds \cos\theta(x)$ 。

由式(3-3-3)可得

$$n(x) \frac{dz}{ds} = n(x) \cos\theta(x) = n(0) \cos\theta(0) = C_1 \quad (3-3-4)$$

上式中的 C_1 在光线轨迹上为常数。

对于折射率分布如图 3-7(a)所示的非均匀波导, 波导的折射率分布 $n(x)$ 在 $x=0$ 处取最大值 n_1 , 在 $x \leq 0$ 区域从 n_1 开始逐渐递减, 在 $x > 0$ 的包层区域取常数 n_0 ($n_0 < n_1$)。

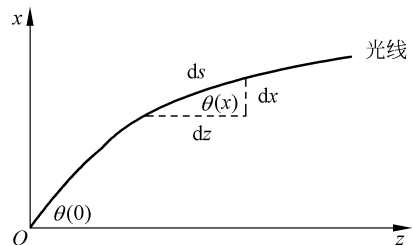


图 3-6 在非均匀介质中传播的光线

在这种非对称的渐变折射率波导中,光线先在 $x=0$ 的界面上发生全反射,然后向下传播。由于在 $x=0$ 处折射率最大,且随着 x 的减小折射率逐渐变小,那么从式(3-3-4)可知,光线与 z 轴的夹角 $\theta(x)$ 会随 x 的减小而逐渐变小,当 $x=x_1$ 时, $\theta(x)=0$,那么在 $x < x_1$ 区域光线不能传播,光线将从此点弯向 z 轴,称这点为光线的转折点,如图 3-7(b)所示。从转折点处光线再沿曲线向上行进,到 $x=0$ 界面处光线发生第二次全反射。这样,光线走弧形曲线沿 z 轴方向向前传播。

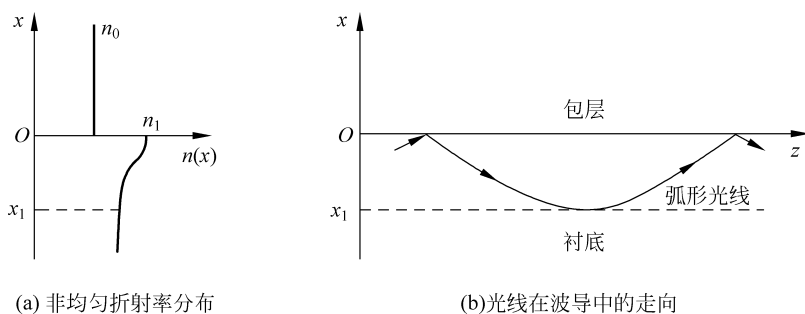


图 3-7 非对称渐变折射率波导的折射率分布及光线在波导中的轨迹

对于折射率分布如图 3-8(a)所示的对称渐变折射率平面波导,按上面同样的方法分析可以得到波导中的光线是蛇形曲线,如图 3-8(b)所示。它有 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 两个转折点,且 $x_1 = -x_2$ 。

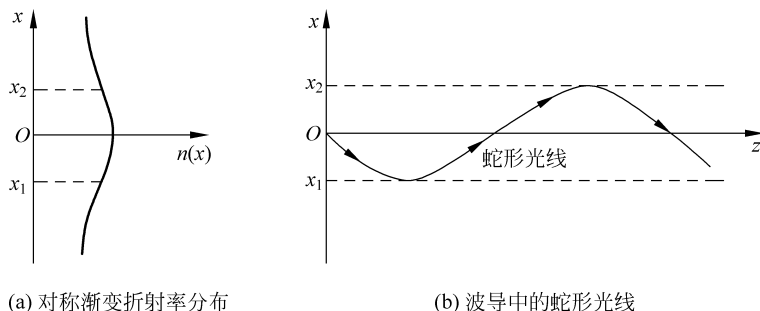


图 3-8 对称渐变折射率波导的折射率分布及光线在波导中的轨迹

上面的分析粗略给出了光线的轨迹,为了求出光线具体的传播路径,我们进行如下的推导。

式(3-3-2)可以写为

$$\frac{d}{dz} \left[n(x) \frac{dx}{dz} \frac{dz}{ds} \right] \frac{dz}{ds} = \frac{dn(x)}{dx}, \quad \text{即} \quad \cos\theta(x) \frac{d}{dz} \left[n(x) \cos\theta(x) \frac{dx}{dz} \right] = \frac{dn(x)}{dx}$$

利用式(3-3-4),上式可进一步写为

$$C_1^2 \frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{1}{2} \frac{dn^2(x)}{dx} \quad (3-3-5)$$

作变换 $t = \frac{dx}{dz}$, 则 $\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{dt}{dz} = \frac{dt}{dx} \frac{dx}{dz} = t \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dt^2}{dx}$, 将其代入式(3-3-5), 得

$$C_1^2 \frac{dt^2}{dx} = \frac{dn^2(x)}{dx} \quad (3-3-6)$$

对上式积分可得

$$C_1^2 t^2 = n^2(x) + C_2 \quad (3-3-7)$$

其中 C_2 为积分常数。由于转折点处 $t=0$, 且转折点的折射率为 C_1 , 所以可以求出 $C_2 = -C_1^2$ 。把它代入上式, 可以解出光线轨迹的方程为

$$z(x) = C_1 \int_0^x \frac{dx}{[n^2(x) - C_1^2]^{1/2}} \quad (3-3-8)$$

当已知折射率的具体分布时, 可以利用上式求出光线的轨迹。例如, 对平方律折射率分布的平面波导, 其折射率的表达式为

$$n^2(x) = n_1^2 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right] \quad (3-3-9)$$

式中的 Δ 和 a 为常数。把式(3-3-9)代入式(3-3-8), 可以求出光线的轨迹方程为

$$z(x) = C_1 \frac{a}{n_1 \sqrt{2\Delta}} \arcsin \frac{n_1 \sqrt{2\Delta} x}{a \sqrt{n_1^2 - C_1^2}} \quad (3-3-10)$$

上式还可写为

$$x = \frac{a \sqrt{n_1^2 - C_1^2}}{n_1 \sqrt{2\Delta}} \sin \frac{n_1 \sqrt{2\Delta}}{a C_1} z \quad (3-3-11)$$

从式(3-3-11)可见, 光线的轨迹是一个正弦曲线, 振幅为 $a \sqrt{n_1^2 - C_1^2} / n_1 \sqrt{2\Delta}$, 周期为 $2\pi a C_1 / n_1 \sqrt{2\Delta}$ 。因此, 振幅和周期由 C_1 的大小决定, 即由初始时光线与 z 轴夹角 $\theta(0)$ 的大小决定。 $\theta(0)$ 变大, C_1 变小, 从而使振幅变大, 周期变小。

3.3.2 非均匀平面波导中的本征值方程

前面用射线方法简单而直观地分析了三层均匀波导的传播特性, 而且得到了其本征值方程。下面用射线方法分析非均匀波导的情况。

为了建立本征值方程, 采用如下的方法。

对于折射率分布如图 3-7(a) 所示的非均匀波导, 观察光波在 $x=0$ 与 $x=x_1$ 之间的横向运动。这里, 波矢的 x 分量之值

$$\kappa = k_0 [n^2(x) - N^2]^{1/2}$$

是依赖于 x 坐标的函数。把光线分成若干个小线段, 各小线段所对应的横向坐标和间隔分别记作 x_i 和 Δx_i 。当 Δx_i 很小时, 在 Δx_i 范围内的介质折射率近似为 $n(x_i)$, 这时, 对应于 Δx_i 间隔的相移近似为

$$\Delta \varphi_i = [n^2(x_i) - N^2]^{1/2} \cdot k_0 \Delta x_i$$

光波从 $x=0$ 行进到 $x=x_1$ 的相移可由上式求和并令 Δx_i 取极限得到

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum \Delta \varphi_i = k_0 \int_{x_1}^0 [n^2(x) - N^2]^{1/2} dx \quad (3-3-12)$$

光波在上界面 $x=0$ 和转折点 x_1 之间往返一次的总相移, 应等于上式给出的相移的 2 倍再加上在上界面上的全反射相移 $-2\varphi_{10}$ 和在转折点处的相移 $-2\varphi_c$, $-2\varphi_c$ 也叫作弯曲相移。

与 3.1 节三层均匀平面波导类似,要想形成导模,总相移应等于零或 2π 的整数倍,即

$$2k_0 \int_{x_1}^0 [n^2 - N^2]^{1/2} dx - 2\varphi_{10} - 2\varphi_c = 2m\pi \quad (3-3-13)$$

式中 $\varphi_{10} = \arctan\left(\frac{N^2 - n_0^2}{n_1^2 - N^2}\right)^{1/2}$ (TE 模), $\varphi_{10} = \arctan\left[\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{N^2 - n_0^2}{n_1^2 - N^2}\right)^{1/2}\right]$ (TM 模)。弯曲相移 $-2\varphi_c$ 由下面的分析给出。

图 3-9 中的 $x = x_1 + \delta$ 和 $x = x_1 - \delta$ 是 $x = x_1$ 上下方的两条直线。当 δ 很小时,在 $x_1 - \delta < x < x_1$ 和 $x_1 < x < x_1 + \delta$ 两个区域可以近似看成是折射率分别为 $n(x_1 - \delta)$ 和 $n(x_1 + \delta)$ 的两个均匀介质区域,弯曲光线可看作是在 $x = x_1$ 分界面上发生全反射的光线。这样,对于 TE 波,全反射的相移为

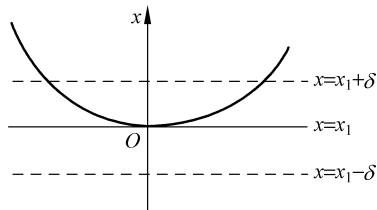


图 3-9 光线在非均匀介质中弯曲的转折点

$$-2\varphi_c = -2\arctan\left[\frac{N^2 - n^2(x_1 - \delta)}{n^2(x_1 + \delta) - N^2}\right]^{1/2} \quad (3-3-14)$$

上式中 $n(x_1 - \delta)$ 和 $n(x_1 + \delta)$ 分别为

$$n(x_1 - \delta) = n(x_1) - \delta \left(\frac{dn}{dx}\right)_{x=x_1}, \quad n(x_1 + \delta) = n(x_1) + \delta \left(\frac{dn}{dx}\right)_{x=x_1}$$

代入式(3-3-14)并利用 $N = n(x_1)$, 就得到光线在非均匀介质中弯曲时,对于 TE 模,转折点处的相移为 $-2\varphi_c = -2\arctan(1) = -\pi/2$ 。仿此,也可证明,对于 TM 模,转折点处的相移也为 $-\pi/2$ 。

由以上的分析,可得此波导的本征值方程为

$$k_0 \int_{x_1}^0 [n^2(x) - N^2]^{1/2} dx = m\pi + \frac{1}{4}\pi + \arctan\left(\frac{N^2 - n_0^2}{n_1^2 - N^2}\right)^{1/2} \quad \text{TE 模} \quad (3-3-15)$$

$$k_0 \int_{x_1}^0 [n^2(x) - N^2]^{1/2} dx = m\pi + \frac{1}{4}\pi + \arctan\left[\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 \left(\frac{N^2 - n_0^2}{n_1^2 - N^2}\right)^{1/2}\right] \quad \text{TM 模} \quad (3-3-16)$$

当 n_1^2 比 n_0^2 大得多, $n_1^2 - N^2$ 比 $N^2 - n_0^2$ 小得多时,即远离截止处,以上两式右边的第三项近似地等于 $\pi/2$ 。当包层为空气时,就属于这种情况。 $n_1 \gg n_0$ 的情况,常称为强非对称情况。因此,对于强非对称渐变折射率波导,常把模式方程写成下列近似式:

$$k_0 \int_{x_1}^0 [n^2(x) - N^2]^{1/2} dx = \left(m + \frac{3}{4}\right)\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3-3-17)$$

它适用于 TE 模和 TM 模。

对于折射率分布是图 3-8(a)所示的对称渐变折射率平面波导,光线是蛇形曲线,如图 3-8(b)所示,它有 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 两个转折点,它们都给出弯曲相移 $-\pi/2$,于是,在射线光学近似下,本征值方程为

$$k_0 \int_{x_1}^{x_2} [n^2(x) - N^2]^{1/2} dx = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3-3-18)$$

3.4 平方律分布渐变型折射率平板波导

前面已讲过用射线光学方法分析渐变折射率波导。利用电磁场理论严格分析渐变折射率波导十分困难,只有少数几种分布(平方律分布、直线型分布、指数型分布等)有严格的精确解。在本节中只对平方律分布渐变折射率波导作简要介绍。

平方律的介质折射率分布为

$$n^2(x) = n_1^2 - (n_1^2 - n_2^2) \left(\frac{x}{a}\right)^2 \quad (3-4-1)$$

式中 n_1 是波导中心 ($x=0$) 处的折射率, a 是折射率减小到 n_2 时离开中心的距离, 如图 3-10 所示。

式(3-4-1)可进一步写成

$$n^2(x) = n_1^2 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right] \quad (3-4-2)$$

其中 $2\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2}$ 。

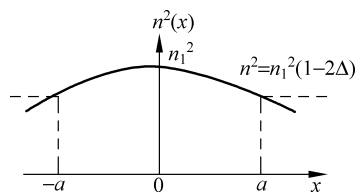


图 3-10 平方律折射率分布

3.4.1 TE 导模

对 TE 导模,由亥姆霍兹方程的一般形式式(2-1-22),得关于 E_y 的方程为

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + [k_0^2 n^2(x) - \beta^2] E_y = 0 \quad (3-4-3)$$

将式(3-4-2)代入方程(3-4-3),得到

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + \left[(k_0^2 n_1^2 - \beta^2) - 2k_0^2 n_1^2 \Delta \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right] E_y = 0 \quad (3-4-4)$$

为便于数学分析,引进参数 ω_0 及 ξ 如下

$$\omega_0^2 = \frac{a^2}{V} = \frac{a}{k_0 n_1 (2\Delta)^{1/2}} \quad (3-4-5)$$

$$\xi = \frac{x}{\omega_0} \quad (3-4-6)$$

则式(3-4-4)可写成

$$\frac{d^2 E_y}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2) E_y = 0 \quad (3-4-7)$$

$$\lambda = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2) \omega_0^2 \quad (3-4-8)$$

方程(3-4-7)与量子力学中一维谐振子的定态薛定谔方程完全相同。这样,就可以直接引用有关结果(可参看量子力学教材)。这一本征值方程的本征值为

$$\lambda = 2m + 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3-4-9)$$

相应的本征函数为厄米-高斯(Hermite-Gauss)函数

$$E_y = N_m \cdot H_m(\xi) \exp\left(-\frac{1}{2} \xi^2\right) \quad (3-4-10)$$

式中, $H_m(\xi)$ 表示阶厄米多项式, N_m 表示归一化常数。如果按下式进行归一化

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_y^2(x) dx = 1 \quad (3-4-11)$$

则有

$$N_m = \pi^{-1/4} (2^m \cdot m! \omega_0)^{-1/2} \quad (3-4-12)$$

磁场分量 H_x 和 H_z 则由式(3-2-11)与式(3-2-12)求出。厄米多项式的定义为

$$H_m(\xi) = (-1)^m \exp(\xi^2) \frac{d^m}{d\xi^m} \exp(-\xi^2) \quad (3-4-13)$$

如 $H_0(\xi) = 1, H_1(\xi) = 2\xi, H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2, H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$ 等。三个最低阶的厄米-高斯模式的场分布如图 3-11 所示。

定义归一化传播常数 $P^2 = [(\beta/k_0)^2 - n_2^2]/(n_1^2 - n_2^2)$, 则利用式(3-4-5)、式(3-4-8)和式(3-4-9), 归一化传播常数 P^2 与归一化频率 V 的关系式为

$$P^2 = 1 - \left(\frac{2m+1}{V} \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3-4-14)$$

由式(3-4-14)计算得到的 P^2 和 V 的关系曲线如图 3-12 所示。需要强调指出的是, 这里所给出的结果仅是光波在 $x=0$ 附近区域导模的一种近似。

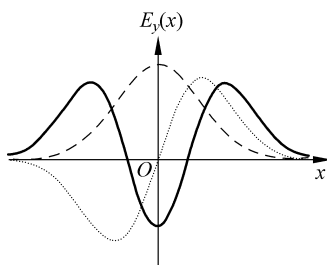


图 3-11 三个最低阶厄米-高斯模式的场分布

虚线: $m=0$; 点线: $m=1$; 实线: $m=2$

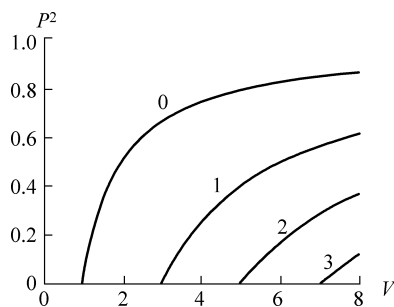


图 3-12 平方律波导的 $P^2 \sim V$ 关系曲线

3.4.2 TM 导模

利用亥姆霍兹方程的一般形式式(2-1-22), 关于 E_x 的方程可写为

$$\frac{d^2 E_x}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left[\frac{E_x}{n^2(x)} \frac{dn^2(x)}{dx} \right] + [k_0^2 n^2(x) - \beta^2] E_x = 0 \quad (3-4-15)$$

为了消去上式中的 dE_x/dx 项, 引进变换式

$$E_x = \psi(x)/n(x) \quad (3-4-16)$$

于是得到 $\psi(x)$ 所满足的标量波动方程为

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left[\frac{1}{2n^2(x)} \frac{d^2 n^2(x)}{dx^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{n^4(x)} \left(\frac{dn^2(x)}{dx} \right)^2 + k_0^2 n^2(x) - \beta^2 \right] \psi = 0 \quad (3-4-17)$$

将式(3-4-2)代入上式并略去高于 $\Delta^2(x/a)^4$ 的项得

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left[\left(k_0^2 n_1^2(x) - \beta^2 - \frac{2\Delta}{a^2} \right) - \left(\frac{k_0^2 n_1^2 2\Delta}{a^2} + \frac{16\Delta^2}{a^4} \right) x^2 \right] \psi = 0 \quad (3-4-18)$$

令

$$\eta = \frac{x}{\omega_0}, \quad \omega_0^2 = \left(\frac{2k_0^2 n_1^2 \Delta}{a^2} + \frac{16\Delta^2}{a^4} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \lambda = \left(k_0^2 n_1^2 - \beta^2 - \frac{2\Delta}{a^2} \right) \omega_0^2$$

方程(3-4-18)也能变换成方程(3-4-7)的形式,即

$$\frac{d^2 \psi}{d\eta^2} + (\lambda - \eta^2) \psi = 0 \quad (3-4-19)$$

因此函数 ψ 仍可写为厄米-高斯函数,故

$$E_x = \frac{\psi(x)}{n(x)} = \frac{1}{n(x)} \cdot \pi^{-1/4} (2^m \cdot m! \omega_0)^{-1/2} H_m(\eta) \exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2\right) \quad (3-4-20)$$

$$\lambda = 1 + 2m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

TM 模的本征值为

$$\beta^2 = k_0^2 n_1^2 - \frac{2\Delta}{a^2} - \frac{2m+1}{\omega_0^2} \quad (3-4-21)$$

3.5 WKB 近似法

利用电磁场理论严格分析渐变折射率波导是十分困难的,目前只有少数几种折射率分布有严格的精确解,因此有必要采用一些近似的方法,WKB 近似法就是其中的一种。WKB 近似法亦称相位积分法,它是在量子力学中建立起来的近似方法,可以直接移植过来。现在,用较简便的方法导出有关公式。

对于 TE 模,求解 E_y 。令 $E_y = \psi$,由亥姆霍兹方程得

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + [k_0^2 n^2(x) - \beta^2] \psi = 0 \quad (3-5-1)$$

对于折射率分布如图 3-8(a)所示的对称渐变折射率平面波导,当

$$k_0^2 n^2(x) - \beta^2 = 0 \quad (3-5-2)$$

时,可以解出 $x = x_1$ 或 $x = x_2$ 两个点,这两个点即为转折点。现假定 $x_1 < x_2$,在 $x_1 < x < x_2$ 的区域, $k_0^2 n^2(x) - \beta^2 > 0$ (此区域为振荡解区),可把方程写成

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \kappa^2(x) \psi = 0 \quad (3-5-3)$$

$$\kappa^2(x) = k_0^2 n^2(x) - \beta^2 \quad (3-5-4)$$

在 $x > x_2, x < x_1$ 的区域, $k_0^2 n^2(x) - \beta^2 < 0$ (此区域简称为指数解区),可把方程写成

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} - p^2(x) \psi = 0 \quad (3-5-5)$$

$$p^2(x) = \beta^2 - k_0^2 n^2(x) \quad (3-5-6)$$

假定折射率的变化是缓慢的(即采用短波长近似,假定在一个波长的范围内折射率的变化可忽略不计),这是 WKB 法的基本假定。因为 $n^2(x)$ 是缓变函数,可设式(3-5-3)的解在区间 $x_1 < x < x_2$ 近似为余弦函数,即

$$\psi(x) = A(x) \cos[\varphi(x)] \quad (3-5-7)$$

其中 $\varphi(x)$ 是相位,而振幅 $A(x)$ 是缓变函数,代入式(3-5-3),略去小项 $A''(x)$,就得到

$$[-A\varphi'^2 + A\kappa^2]\cos\varphi - (2A'\varphi' + A\varphi'')\sin\varphi = 0$$

因此

$$\frac{d\varphi}{dx} = \kappa \quad (3-5-8)$$

$$2A'\varphi' + A\varphi'' = 0 \quad (3-5-9)$$

以上两式可进一步写为

$$\varphi(x) = \int_{x_1}^x \kappa(x) dx + \varphi_1 \quad \text{或} \quad \varphi(x) = \int_{x_2}^x \kappa(x) dx + \varphi_2 \quad (3-5-10)$$

$$A(x) = A_0 / \sqrt{\kappa(x)} \quad (3-5-11)$$

其中 φ_1, φ_2 ($\varphi_1 = \varphi(x_1), \varphi_2 = \varphi(x_2)$) 及 A_0 均为待定常数, 于是振荡区的场函数近似表示式为

$$\psi(x) = \frac{A_0}{\sqrt{\kappa}} \cos \left[\int_{x_1}^x \kappa(x) dx + \varphi_1 \right] \quad (3-5-12)$$

或

$$\psi(x) = \frac{A_0}{\sqrt{\kappa}} \cos \left[\int_{x_2}^x \kappa(x) dx + \varphi_2 \right] \quad (3-5-13)$$

对于 $k_0^2 n^2(x) - \beta^2 < 0$ 的两个指数式衰减区: $x < x_1$ 及 $x > x_2$, 类似地, 可设解的近似式为

$$\psi(x) = B(x) \cdot \exp[\pm \alpha(x)] \quad (3-5-14)$$

其中 $B(x)$ 是缓变函数(正号相应于 $x < x_1$ 区, 负号相应于 $x > x_2$ 区), 代入方程(3-5-5)中, 略去与 $B''(x)$ 有关的项, 就得到 $d\alpha/dx = p$ 和 $B(x) = B_0 / \sqrt{p(x)}$, 其中 B_0 为常数。因此, 两个指数式衰减区的场函数近似表示式分别为

$$\psi(x) = \frac{B_1}{\sqrt{p}} \exp \left[\int_{x_1}^x p dx \right], \quad x < x_1 \quad (3-5-15)$$

$$\psi(x) = \frac{B_2}{\sqrt{p}} \exp \left[- \int_{x_2}^x p dx \right], \quad x > x_2 \quad (3-5-16)$$

其中 B_1, B_2 均为常数。

下面利用 $x = x_1$ 处及 $x = x_2$ 处 ψ 及 $d\psi/dx$ 连续的条件推导导模的色散关系式。由 $x = x_1$ 处 ψ 连续, 从式(3-5-12)和式(3-5-15)就得到

$$\frac{A_0}{\lim_{x \rightarrow x_1^+} \sqrt{\kappa}} \cos \varphi_1 = \frac{B_1}{\lim_{x \rightarrow x_2^-} \sqrt{p}} \quad (3-5-17)$$

由 ψ' 连续得

$$-A_0 \lim_{x \rightarrow x_1^+} \sqrt{\kappa} \sin \varphi_1 = B_1 \lim_{x \rightarrow x_1^-} \sqrt{p} \quad (3-5-18)$$

由式(3-5-17)与式(3-5-18)得

$$\varphi_1 = -\arctan \left(\frac{\lim_{x \rightarrow x_1^-} p}{\lim_{x \rightarrow x_1^+} \kappa} \right) + m_1 \pi \quad (3-5-19)$$

因为

$$\frac{\lim_{x \rightarrow x_1^-} p}{\lim_{x \rightarrow x_1^+} \kappa} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_1^-} [N^2 - n^2(x)]^{1/2}}{\lim_{x \rightarrow x_1^+} [n^2(x) - N^2]^{1/2}}$$

以 Δx 表示 $|x - x_1|$, 且在 $x \rightarrow x_1^-$ 的过程中, $n^2(x)$ 用 $n^2(x_1 - \Delta x)$ 来表示, 且在 $x \rightarrow x_1^+$ 的过程中, $n^2(x)$ 用 $n^2(x_1 + \Delta x)$ 来表示, 则上式可写为

$$\begin{aligned} \frac{\lim_{x \rightarrow x_1^-} [N^2 - n^2(x)]^{1/2}}{\lim_{x \rightarrow x_1^+} [n^2(x) - N^2]^{1/2}} &= \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [N^2 - n^2(x_1 - \Delta x)]^{1/2}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [n^2(x_1 + \Delta x) - N^2]^{1/2}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[N^2 - n^2(x_1) + 2n(x_1)n'(x_1)\Delta x]^{1/2}}{[n^2(x_1) + 2n(x_1)n'(x_1)\Delta x - N^2]^{1/2}} = 1 \end{aligned}$$

因此式(3-5-19)变为

$$\varphi_1 = \left(m_1 - \frac{1}{4}\right) \pi \quad (3-5-20)$$

同理由 $x = x_2$ 处 ψ, ψ' 连续, 从式(3-5-13)和式(3-5-16)亦可得到

$$\varphi_2 = \left(m_2 + \frac{1}{4}\right) \pi \quad (3-5-21)$$

由上两式及式(3-5-8)得到

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \left[\left(m_2 - m_1\right) + \frac{1}{2} \right] \pi = \int_{x_1}^{x_2} \kappa dx = k_0 \int_{x_1}^{x_2} [n^2(x) - N^2]^{1/2} dx$$

即

$$k_0 \int_{x_1}^{x_2} [n^2(x) - N^2]^{1/2} dx = \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi \quad (3-5-22)$$

这里 $m = 0, 1, 2, \dots$ 此方程是用 WKB 近似法求出的色散方程或本征值方程, 它和前面用射线光学近似导出的本征值方程一致, 所不同的是, 这里我们可以借助式(3-5-13)、式(3-5-15)和式(3-5-16)求出导模的场分布。

用同样方法还可以分析非对称渐变折射率分布的波导, 设在 $x > x_2$ 处的折射率为 n_3 , 则在 $x > x_2$ 区域中, 场函数应写为

$$\psi = C_2 \exp[-p(x - x_2)] \quad (3-5-23)$$

其中 $p^2 = \beta^2 - k_0^2 n_3^2$ 。因此 $x = x_2$ 处, ψ 及 $d\psi/dx$ 连续的条件可写为

$$\varphi(x_2) = \arctan\left(\frac{N^2 - n_3^2}{n^2(x_2) - N^2}\right)^{1/2} + m_2 \pi$$

对于强非对称渐变折射率波导, $n(x_2) \gg n_3$, 因而近似地有

$$\varphi(x_2) = \left(m_2 + \frac{1}{2}\right) \pi \quad (3-5-24)$$

于是, 由式(3-5-20)、式(3-5-24)和式(3-3-12), 并把 $m_2 - m_1$ 记作 m , 就得到

$$k_0 \int_{x_1}^{x_2} [n^2(x) - N^2]^{1/2} dx = \left(m + \frac{3}{4}\right) \pi \quad (3-5-25)$$

这就是用于计算强非对称渐变波导模式色散关系的 WKB 近似式。它和前面用射线光学近似导出的本征值方程也一致。

应该指出,射线光学法和 WKB 法所导出的色散关系式相吻合,是因为两者都是电磁场理论的短波长近似。不难理解,分析平面波导时,WKB 法的适用范围和射线法是相同的。WKB 法的优点在于能对场分布作近似计算。

3.6 变分法

变分法也是求渐变折射率平面波导的一种近似方法,它的基本思想是通过求传播常数积分表达式的极值确定模式场的场分布与传播常数。

3.6.1 传播常数的积分表达式和变分法

对于渐变折射率平面波导,模式场 ψ ($\psi = E_y$) 的亥姆霍兹方程可以写为

$$H \cdot \psi = \beta^2 \psi \quad (3-6-1)$$

其中算符

$$H = \frac{d^2}{dx^2} + k_0^2 n^2(x) \quad (3-6-2)$$

因此, β^2 为算符 H 的本征值, ψ 为本征函数。

在式(3-6-1)两边同乘以本征函数 ψ , 然后在 $-\infty < x < +\infty$ 的整个 x 值范围内积分, 就得到下列积分表达式

$$\beta^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi H \psi dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx} \quad (3-6-3)$$

此式称为传播常数 β 的积分表达式。

下面证明,在上述积分表示式中,当函数 ψ 为本征函数时, β^2 值取极值,这就是说,如果本征函数做微小的变化 $\delta\psi$ (称为 ψ 的变分), 则 β^2 的变化(在一级近似下)等于 0, 即

$$\delta\beta^2 (\delta\psi \rightarrow 0) = 0 \quad (3-6-4)$$

先证明算符 H 是对称算符, 即对任意两函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ (设它们在 $x \rightarrow \pm\infty$ 时趋于 0), 恒有

$$\int_{-\infty}^{\infty} u H v dx = \int_{-\infty}^{\infty} v H u dx \quad (3-6-5)$$

算符 H 的对称性可用如下证明得到。注意到 $H = d^2/dx^2 + k_0^2 n^2(x)$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} u H v dx = \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{d^2 v}{dx^2} dx + \int_{-\infty}^{\infty} k_0^2 n^2 u v dx$$

由分部积分公式, 易见

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{d^2 v}{dx^2} dx &= u \frac{dv}{dx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \\ &= -v \frac{du}{dx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} v \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} v \frac{d^2 u}{dx^2} dx \end{aligned}$$

由此即得式(3-6-5)。

现在在积分表示式 $\beta^2 = \int \phi H \phi dx / \int \psi^2 dx$ 中令函数 ψ 作一微小变化 $\delta\psi$, 则 β^2 的变化等于

$$\delta\beta^2 = \frac{\int \delta\psi H \phi dx}{\int \psi^2 dx} + \frac{\int \phi H \delta\psi dx}{\int \psi^2 dx} - 2 \frac{\int \phi H \phi dx}{\left(\int \psi^2 dx\right)^2} \cdot \int \psi \delta\psi dx \quad (3-6-6)$$

利用式(3-6-5)可知上式右边第二项与第一项数值相等, 且由 $H\psi = \beta^2\psi$ 可知它们都等于 $\beta^2 \cdot \int \psi \delta\psi dx / \int \psi^2 dx$, 而第三项则等于 $-2\beta^2 \int \psi \delta\psi dx / \int \psi^2 dx$, 因此证得 $\delta\beta^2 = 0$ 。

根据函数 ψ 为本征函数时, β^2 值取极值的结论, 可以采用如下的方法求 β^2 的近似值。首先取适当的尝试函数 $\psi_t(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是待定的参数。然后将 ψ_t 代入 β^2 的积分表示式中, 得到 $\beta^2 = \beta^2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 。最后为使 β^2 取极值, 令

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \beta^2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \beta^2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \dots = 0 \quad (3-6-7)$$

并由此解得 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的值, 相应的 β^2 值即为欲求的 β^2 近似值, 尝试函数 $\psi_t(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 即为欲求的本征函数。这种方法称为变分法, 在实际中应用甚广, 只要尝试函数选得适当, 往往能得到相当准确的结果。

3.6.2 变分法的应用

下面举一个简单例子, 说明如何用变分法求基模 β_0^2 的近似值。考虑折射率分布为四阶对称多项式的渐变波导, 即折射率分布为

$$n^2(x) = n_1^2 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{x}{a}\right)^2 + 2S\Delta \left(\frac{x}{a}\right)^4 \right] \quad 2\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2}, S \text{ 是小量}$$

采用归一化参量 $V = k_0 a (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} = k_0 a n_1 \sqrt{2\Delta}$ 时, 本征值方程可写为

$$\psi''(x) + \left[k_0^2 n_1^2 - \left(\frac{V}{a}\right)^2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 + S \left(\frac{V}{a}\right)^2 \left(\frac{x}{a}\right)^4 \right] \psi(x) = \beta^2 \psi(x)$$

故当令 $\xi = x/a$ 时, 本征值方程 $H\psi = \beta^2\psi$ 中的算符

$$H = \frac{d^2}{dx^2} + k_0^2 n_1^2 - \left(\frac{V}{a}\right)^2 \xi^2 + S \left(\frac{V}{a}\right)^2 \xi^4$$

为求基模传播常数的近似值, 我们选取尝试函数

$$\psi_t(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} C \xi^2\right)$$

其中 C 为待定参数, 代入 β^2 的积分表示式

$$\beta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi H \phi dx / \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx$$

中并利用公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2n} \cdot e^{-C\xi^2} d\xi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot C^n} \sqrt{\frac{\pi}{C}}$$

可算得

$$\beta^2(C) = k_0^2 n_1^2 + \frac{1}{a^2} \left[-C + \frac{1}{2C} (C^2 - V^2) + \frac{3S}{4C^2} V^2 \right] \quad (3-6-8)$$

上式对 C 求导, 并令导数等于零, 有

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{V^2}{C^2} - S \cdot \frac{3}{2} \frac{V^2}{C^3} = 0$$

即

$$C^3 - V^2 C + 3SV^2 = 0$$

若略去含有小量 S 的项, 即可由上式解得 $C=V$, 利用此结果, 上式可写为

$$C^3 - V^2 C + 3SVC = 0$$

$$C^2 = V^2 \left(1 - \frac{3S}{V} \right)$$

$$C \approx V - \frac{3S}{2}$$

在一级近似下, 即取 $C=V$ 时, 得近似本征函数为

$$\psi_0(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{Vx^2}{a^2}\right)$$

本征值的近似值为

$$\beta_0^2 = k_0^2 n_1^2 + \frac{1}{a^2} \left[-V + \frac{3}{4} S \right]$$

即归一化传播常数

$$P_0^2 = 1 - \frac{1}{V} + \frac{3S}{4V^2}$$

3.7 有限元法简介

有限元法和下节要论述的多层分割法, 是求渐变折射率分布平面波导场分布和传播常数的两种数值方法。

许多理论和实际工程问题都可以转化为对微分方程的求解。在已给边界条件下求微分方程的精确解析解, 虽然已有完整的理论, 但真正能解出的只是极少数的情况。为了满足生产和工程上的需要, 必须运用数值近似方法来处理。在求解光波导问题的各种数值近似方法中, 有限元方法是最好的数值近似方法之一, 它不仅能处理任意截面、任意折射率分布的情况(包括线性与非线性的情况), 还能给出比其他方法更精确的结果, 因此了解一些用有限元方法分析光波导的内容是很有必要的。这里以平面波导为例进行讲解。

3.7.1 基于变分思想的有限元法

考虑平面波导中的 TE 模, 若电场 E_y 用 ψ 表示, 则由模式场的亥姆霍兹方程得

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + [k_0^2 n^2(x) - \beta^2] \psi = 0 \quad (3-7-1)$$

此方程相应的泛函为

$$I(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 - (k_0^2 n^2(x) - \beta^2) \psi^2 \right] dx \quad (3-7-2)$$

由泛函极值的理论可以知道式(3-7-1)的解就是让式(3-7-2)取极值时的 ψ 值。在求式(3-7-2)取极值时的 ψ 值时,可以用 Ritz 法进行求解,这就要求先得找到试函数。实际上,全空间的试函数是很难找到的,因此人们就想到了用 n 个节点把全空间分成 E 个单元,用 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ 代表节点上的 ψ 值,只要空间分得足够小就可以用节点的线性插值函数来代替试函数,即设第 e 个小区间两端节点的 ψ 值分别为 ψ_{i-1}, ψ_i , 区间内部的 ψ 值为

$$\tilde{\psi}_e = \psi_{i-1} + \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}\psi_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\psi_i \quad (3-7-3)$$

显然, e 区间越小时,用上式表示的线性插值函数就越接近真实的 ψ 值。把上式代入式(3-7-2)得

$$I = \sum_e \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\left(\frac{d\tilde{\psi}_e}{dx} \right)^2 - (k_0^2 n^2(x) - \beta^2) \tilde{\psi}_e^2 \right] dx \quad (3-7-4)$$

显然,上式就变成了以 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ 为参变量的方程,解

$$\frac{\partial I}{\partial \psi_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-7-5)$$

可求出 ψ_i 与 β 值,即模式场的场分布与传播常数。

3.7.2 基于加权余量法思想的有限元法

并不是所有的微分方程都能找到与其相对应的泛函,正是因为这一点,通过求泛函极值的方法来解微分方程并不是总能行得通的,于是人们就发展了一种不需要寻找泛函,直接从微分方程出发来求解微分方程的方法,这就是加权余量法。

若把精确解 ψ 代入方程(3-7-1),方程(3-7-1)是严格成立的,其精确解很难找到,先把近似解 $\tilde{\psi}$ 代入方程(3-7-1),于是

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}}{dx^2} + [k_0^2 n^2(x) - \beta^2] \tilde{\psi} = Q(x)$$

这里 $Q(x)$ 称为余量。如果 $Q(x)$ 处处为 0, $\tilde{\psi}$ 就是精确解。但使 $Q(x)$ 在全区间处处为 0 显然是很难的,而使 $Q(x)$ 在区间内的平均值为 0, 即

$$\frac{1}{l} \int Q(x) dx = 0$$

却不难做到。因此令

$$\int Q(x) dx = 0 \quad (3-7-6)$$

由式(3-7-6)所确定的方法就是余量法。余量法得到解的精度太低,为了提高精度可令

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_l Q(x) dx = 0 \quad (3-7-7)$$

其中 $W_l (l=1, 2, \dots, n)$ 称为加权函数。 W_l 有不同的选取方法,如子域定位法,点定位法,伽辽金法等。下面用子域定位法说明为什么加权余量法得到的解的精度比余量法得到的解的精度高。

子域定位法：把区间分成 E 个子区间，第 e 个子区间为 R_l ，定义

$$W_l = \begin{cases} 0 & \text{在 } R_l \text{ 外} \\ 1 & \text{在 } R_l \text{ 上} \end{cases} \quad (3-7-8)$$

这样就得到 E 个独立的方程

$$\int_{x_{l-1}}^{x_l} Q(x) dx = 0 \quad (3-7-9)$$

若 $\tilde{\psi}$ 用式(3-7-3)中的线性插值函数来代替，则有

$$\int_{x_{l-1}}^{x_l} \left[\frac{d^2 \tilde{\psi}_e}{dx^2} + (k_0^2 n^2(x) - \beta^2) \tilde{\psi}_e \right] dx = 0$$

即

$$\int_{x_{l-1}}^{x_l} \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{x_l - x}{x_l - x_{l-1}} \psi_{l-1} + \frac{x - x_{l-1}}{x_l - x_{l-1}} \psi_l \right) + (k_0^2 n^2(x) - \beta^2) \left(\frac{x_l - x}{x_l - x_{l-1}} \psi_{l-1} + \frac{x - x_{l-1}}{x_l - x_{l-1}} \psi_l \right) \right] dx = 0 \quad (3-7-10)$$

这样得到 E 个方程，联立求解即可得出各节点处的 ψ_l 。显然，这时求出的 ψ 比余量法求出的要精确得多。

实际上，常用的方法是伽辽金法，在此方法中取

$$W_l = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \psi_l}$$

也可得到关于 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ 的 n 个方程组，联立即可求出 ψ_l 与 β 的值。

3.8 多层分割法

多层分割法的要点是把渐变折射率平板波导用许多层均匀平板波导来代替，每一层波导的折射率取为该层中心处的折射率，对每一层写出模式场的亥姆霍兹方程的解，并使相邻两层的解在分界面处满足边界条件(对 TE 模，若 $E_y = \psi$ ，边界条件为 ψ 及 $d\psi/dx$ 连续)。只要层数 N 足够大(一般取 $N = 20 \sim 40$ 层即可)，即可用此方法得到足够精确的解。

考虑非对称渐变折射率平面波导，取 x 轴与分界面垂直，设折射率分布为

$$\begin{cases} n^2 = n_0^2 & -\infty < x < 0 \\ n^2 = n_2^2 + f(x)(n_1^2 - n_2^2) & 0 < x < a \\ [f(0) = 1, f(a) = 0] \\ n^2 = n_2^2 & a < x < \infty \end{cases} \quad (3-8-1)$$

这里 a 为芯区厚度， $n_1 > n_2 > n_0$ ， $f(x)$ 为随 x 增大而递减的函数，如图 3-13 所示。

定义归一化传播常数 $P^2 = (N^2 - n_2^2)/(n_1^2 - n_2^2)$ ，归一化厚度 $V = k_0 a (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$ ，则亥姆霍兹方程 $\psi'' + (k_0^2 n^2 - \beta^2)\psi = 0$ 除以 $k_0^2 (n_1^2 - n_2^2)$ 可得(注意，下式中的 x 是上式中 x 的 $k_0 (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$ 倍)。

$$\begin{cases} \psi'' - p^2\psi = 0 & -\infty < x < 0 \\ \psi'' + (f(x) - P^2)\psi = 0 & 0 < x < V \\ \psi'' - P^2\psi = 0 & V < x < \infty \end{cases} \quad (3-8-2)$$

式中

$$p^2 = P^2 + \frac{n_2^2 - n_0^2}{n_1^2 - n_2^2} \quad (3-8-3)$$

将芯区(0, V)等分成 n 层, 设 $x_0 = 0, x_n = V$, 各层厚度 $\Delta = x_i - x_{i-1} = V/n, (i = 1, 2, \dots, n)$, 并设 $x = x_m$ 为振荡解区与指数解区的转折点, 令

$$\begin{aligned} k_i^2 &= f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) - P^2 \quad i = 1, 2, \dots, m \\ q_i^2 &= P^2 - f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \quad i = m + 1, m + 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3-8-4)$$

则式(3-8-2)在各层的解可写成

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= A_0 \exp[p(x - x_0)] & -\infty < x \leq x_0 \\ \psi_i(x) &= A_i \cos[k_i(x - x_i) - \varphi_i] \quad i = 1, 2, \dots, m & x_0 \leq x \leq x_m \\ \psi_i(x) &= A_i \{\exp[-q_i(x - x_i)] + \delta_i \exp[q_i(x - x_i)]\} \quad i = m + 1, m + 2, \dots, n & x_m \leq x \leq x_n \\ \psi_{n+1}(x) &= A_{n+1} \exp[-P(x - x_n)] & x_n \leq x < \infty \end{aligned} \quad (3-8-5)$$

为简明起见, 这里讨论 TE 模(TM 模的讨论与之完全类似)。由各分界面处 ψ 及 ψ' 连续的条件, 容易导出递推公式

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -k_1 \Delta + \arctan(p/k_1) + M\pi \quad M = 0, 1, 2, \dots \\ \varphi_i &= \arctan[(k_{i+1}/k_i) \tan(k_{i+1} \Delta + \varphi_{i+1})] \quad i = 1, 2, \dots, m - 1 \\ \varphi_m &= -\arctan\left(\frac{q_{m+1}}{k_m} \cdot Y_{m+1}\right) \\ Y_{m+1} &= [\exp(2q_{m+1} \Delta) - \delta_{m+1}] / [\exp(2q_{m+1} \Delta) + \delta_{m+1}] \\ \delta_j &= (q_j - q_{j+1} Z_{j+1}) / (q_j + q_{j+1} Z_{j+1}) \\ Z_{j+1} &= [\exp(2q_{j+1} \Delta) - \delta_{j+1}] / [\exp(2q_{j+1} \Delta) + \delta_{j+1}] \quad j = m + 1, m + 2, \dots, n - 1 \\ \delta_n &= (q_n - P) / (q_n + P) \end{aligned} \quad (3-8-6)$$

利用递推公式求传播常数 P^2 的方法如下: 对尝试值 P^2 , 首先确定 m, k_i, q_i , 然后依次求得 $\delta_n, Z_n, \delta_{n-1}, Z_{n-1}, \dots, \delta_{m+1}, Y_{m+1}, \varphi_m, \dots, \varphi_1$, 当由此求得的 φ_1 值与由式(3-8-6)的第一式给出的 φ_1 值相等时, 该尝试值即为所求的 P^2 值。

习题

1. 用射线光学的分析方法, 说明三层均匀平面波导中形成导模的条件。
2. 试用电磁场分析法推导三层均匀平面波导中 TM 模的本征值方程。

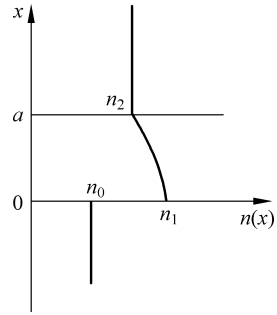


图 3-13 非对称渐变折射率平面波导折射率分布

3. 一平板波导薄膜、衬底和包层折射率分别为 n_1 、 n_2 和 n_3 , 若在波长 λ 下保持单膜传输, 薄膜的厚度 d 应在什么范围内选取?
4. 一平板波导薄膜、衬底和包层折射率分别为 n_1 、 n_2 和 n_3 , 薄膜的厚度为 d , 若只让 TE_0 传输, 频率 ω 和波长 λ 分别应在什么范围内选取?
5. 有一玻璃波导, 衬底玻璃的折射率为 $n_2 = 1.515$, 芯区玻璃的折射率为 $n_1 = 1.620$, 包层为空气, 若芯区的厚度为 $d = 1.00\mu\text{m}$, 传输波长为 $\lambda = 0.82\mu\text{m}$, 波导中能传输哪几种导模?
6. 在一个三层均匀平面波导中形成的导模, 哪种模式光线全反射的入射角最大? 为什么?
7. 试用射线法推出对称非均匀平面波导模式的本征值方程(3-3-18)。
8. 简述 WKB 法求解渐变折射率波导本征值方程(3-5-22)中传播常数的步骤。
9. 试推导强非对称渐变折射率波导的色散方程(3-5-25)。
10. 简述变分法求渐变折射率波导的场分布和传播常数的步骤。
11. 用变分法求出抛物线(或平方律)型折射率分布, 即 $n^2(x) = n_1^2[1 - 2\Delta(x/a)^2]$ 的场分布和传播常数。