<<< 第0章

绪　论

0.1 振动力学发展简史

振动力学从其概念产生到发展为一门科学理论经历了漫长的时间，包括世界著名科学家在内的无数学者和工程师为此作出了卓越贡献。

人类对振动现象的了解和利用有着漫长的历史，从远古时期已经开始利用振动发声制造各种乐器。人们对于振动问题的研究可以追溯到公元前6世纪毕达哥拉斯(Pythagoras)的工作，他通过实验观测得到弦线振动发出的声音与弦线的长度、直径和张力的关系，证明用三条弦发出某一个乐音以及它的第五度音和第八度音时，这三条弦的长度之比为6∶4∶3。我国古代科学家早在春秋战国时期，便根据弦线发音同长度的关系总结出“三分损益”定律，即将基音弦长分为三等份，减去或增加一份可确定相隔五度音程的各个音，成为中国古代制定音律时所用的生律法。同时期的《庄子·徐无鬼》对共振现象有明确记述：“鼓宫宫动，鼓角角动，音律同矣。”我国11世纪宋代科学家沈括，在《梦溪笔谈》中精心设计了一个纸游码共振实验，把一个纸人固定在一根弦上，当弹动和该弦频率成简单整数比的弦时，纸人因所在的弦发生共振而跳跃，这是有史记载最早的共振实验。现代物理科学的奠基人伽利略(Galileo Galilei)对振动问题进行了开创性的研究，17世纪在其名著《两门新科学的对话》中明确弦线振动频率与其长度、密度和张力的关系，他发现了单摆的等时性并利用落体公式得到摆动周期正比于摆长与重力加速度比的平方根的结论，还从能量的角度讨论摆的周期，后来惠更斯(C. Huvaens)利用几何方法推得摆振动周期的正确公式。梅森(M. Mersenne)在实验基础上系统地总结了弦线振动的频率特性，推断出密度和张力相同且发出谐音的短弦频率。牛顿(I. Newton)在其划时代的著作《自然哲学的数学原理》中建立的动力学原理，使振动问题的动力学研究成为可能，胡克(R. Hooke)于1678年发表的弹性定律和牛顿于1687年发表的运动定律分别为振动力学的发展奠定了理论基础。

18—19世纪，是线性振动理论发展和成熟的时期，逐步形成了一门相对独立的学科理论。17世纪的科学技术发展为振动问题的研究提供了强有力的力学基础和数学工具，由于振动问题最终归结为常微分方程或偏微分方程的求解，所以线性振动理论是与微分方程同步发展的，这个时期的数学家为此作出了重要贡献。欧拉(L. Euler)于1728年建立并求解了单摆在有阻尼介质中运动的二阶常微分方程；1739年，他研究了无阻尼简谐受迫振动，从理论上解释了共振现象；1747年，他在研究空气中声传播时建立了等刚度弹簧联结等质量质点的多自由度振动系统力学模型，列出运动微分方程并求出精确解，发现系统的振动是各

阶简谐振动叠加的结果。1762年，拉格朗日(J. L. Lagrange)在对微小振动深入系统研究的基础上建立了离散振动系统的一般理论，出版了著名论著《分析力学》，标志着离散系统的振动理论已经发展成熟。对于连续振动系统，最早研究的是弦线，其振动理论在18世纪已经建立。1746年，达朗贝尔(J. le R. d'Alemberi)在研究均匀弦线振动时，考虑弦线位移随时间及弦上位置的变化导出描述弦线振动的波动方程并求出行波解。1753年，丹尼尔·伯努利(D. Bernoulli)用无穷多个模态叠加的方法得到弦线振动的驻波解；1759年，拉格朗日从驻波解出发推导出行波解，从而在物理上充分理解了均匀弦线的振动规律；但严密的数学证明，直到1811年傅里叶(J. B. J. Fourier)提出函数的级数展开理论才得以完成。1762年欧拉和1763年达朗贝尔分别研究了非均匀弦线和重弦线的振动，之后其他连续体的振动问题也相继提出。欧拉和丹尼尔·伯努利于1744年和1751年分别研究了梁的横向振动，导出了自由、铰支和固定3类边界条件下的振形函数与频率方程，当时的研究忽略了截面转动和剪切变形的影响；直到19世纪末和20世纪初才分别由瑞利(J. W. S. Rayleish)和铁摩辛柯(S. P. Timoshenko)加以补充修正。1759年欧拉将膜视为两组互相正交的弦而解决了矩形膜的振动问题，但处理圆形膜的尝试未能成功，直到1829年泊松(S. D. Poisson)才完全解决了膜振动问题。1789年，雅格布·伯努利(J. B. Noulli)将板视为两组互相正交的梁导出其运动微分方程。1787年，克拉德尼(Chladni)对玻璃和金属板振动波节线的实验促进了板和壳振动的研究。1814年以来，泊松对板的振动进行了系统研究并建立动力学方程，但所建立方程的边界条件尚有缺陷；直到1850年，基尔霍夫(G. R. Kirchhoff)引入了符合实际的板变形假说，修正了泊松的错误，并给出圆板的自由振动解，比较完整地解释了克拉尼的实验结果。1821年，纳维(C. L. Navier)发表了论著《论弹性体的平衡与运动》，最早提出弹性体运动的一般方程；1828年建立了板的弯曲振动理论，并研究了三维弹性体的振动。1784年，库仑(C. A. Coulomb)对圆柱扭转振动进行了理论和实验研究，泊松于1829年解决了弹性体的扭转振动问题，完整的三维弹性体振动理论由泊松于1829年和克莱布什(R. F. A. Clebsch)于1862年分别建立。与此同时，对于受外激励响应的研究也日趋成熟。自从1807年托马斯·杨(T. Young)提出了载荷的动力效应，在不到一个世纪里，关于振动物体的激励响应和强迫振动理论基本建立起来。1834年，杜哈梅(J. M. C. Duhamel)将任意外激励视为一系列冲量激励的叠加，建立了计算强迫振动的普遍公式。1894年，庞加莱(J. H. Poincaré)基本完成了一般弹性体受迫振动数学理论的建立。

19世纪以来，随着科学技术的迅猛发展和工业化快速的推进，工程对振动力学的需求日益迫切。航空航天、航海运输和动力机械等新型工程系统规模越来越大、速度越来越高、结构形式越来越复杂，迫切需要振动力学作为设计理论和分析手段，然而经典的线性振动解析手段已经不能满足日益复杂的工程需求，于是各种近似计算方法应运而生。1873年，瑞利基于动能和势能的分析给出了确定系统基频的近似方法，即瑞利法，这是一种关于多自由度系统基频的上限估算法；1894年，邓克利(S. Dunkerley)在研究旋转轴的临界转速时从实验结果中导出一种近似计算多圆盘轴横向振动基频的近似方法，即邓克利法，是计算振动系统最小固有频率(即基频)下界的一个经验公式；1909年，里兹(W. Ritz)发展了瑞利法，他基于最小势能原理建立了瑞利-里兹法，这是一种缩减系统自由度的近似方法，反复使用可以求解一个多自由度系统的多个低阶固有频率，从而把瑞利法推广为求解几个低阶固有频率的近似方法。1915年，伽辽金(Б. Г. Галёркин)基于加权余量法，对里兹作了进一步的推

广，应用这种方法可以通过方程所对应泛函的变分原理将求解微分方程问题简化成为线性方程组的求解问题，成为求解振动微分方程边值问题的一种重要方法。1898 年，维奈尔(Vianell)在计算压杆的屈曲载荷时提出逐步近似方法；1904 年，斯托德拉(A. Stodola)将该方法推广用于计算轴杆的主频率，发展为振型迭代法。1902 年，法莫(H. Frahm)计算船主轴扭振时提出离散化的思想，相继被霍尔茨(Holzer)等科学家推广应用，形成了一种确定轴系和梁频率的有效方法；1950 年，汤姆孙(W. Thomson)将这种方法最终发展为传递矩阵法。对于现在工程普遍应用的有限单元法，最早可追溯到 20 世纪 40 年代。1943 年，柯朗特(R. Courant)在研究圣维南(St. Venant)的扭转问题时，将应用在三角形区域上定义的分片连续函数和最小能原理相结合，首次运用“单元”法则把微分方程转换成了一组代数方程；1956 年，波音公司的特纳(M. J. Turner)和克拉夫(R. W. Clough)等人分析飞机结构时，将钢架位移法推广应用于弹性力学平面问题，把结构分割成三角形和矩形单元，成功求解了平面应力问题。1960 年，克拉夫在其关于弹性力学平面问题研究的论文中，首次使用“有限元法”这个名称。1965 年，冯康(Y. K. Zheung)发表了论文“基于变分原理的差分格式”，这篇论文是国际学术界承认我国独立发展有限元方法的主要依据。20 世纪 60 年以后，随着计算机和软件的发展，有限元法迅速取代其他近似方法成为复杂工程振动问题近似计算的主要方法，至今有限元理论和分析手段已发展得非常成熟。

19 世纪后期，庞加莱和李雅普诺夫(A. M. Ляпунов)等人开创了非线性振动理论，这是与线性振动力学研究方向不同的新领域，使人们对振动的机制有了新的认识。人类对非线性振动现象的观察可以追溯到 1673 年惠更斯关于单摆的研究，发现了单摆大幅摆动时对等时性的偏离以及两只频率接近时钟的同步化等两类非线性现象。1881—1886 年，庞加莱研究了二阶系统奇点的分类，引入了极限环概念并建立了极限环的存在判据，定义了奇点和极限环的指数，1885 年他还研究了分岔问题。1892 年，李雅普诺夫给出了稳定性的严格定义，并提出了处理稳定性问题的两种方法，这是振动系统定性理论的一个重要方面，为非线性振动定性分析提供了基础。在定量求解非线性振动的近似解析方法方面，1830 年泊松研究单摆振动时提出摄动法的基本思想，但长期项的存在会使该方法失效。1883 年，林滋泰德(A. Lindstedt)把振动频率也按小参数展开，解决了摄动法的久期项问题。1918 年，达芬(G. Duffing)在研究硬弹簧受迫振动时采用谐波平衡和逐次迭代的方法研究了硬弹簧受迫振动。1920 年，范德波尔(van der Pol)在研究电子管非线性振荡时提出了慢变系数法的基本思想，1934 年克雷洛夫(H. M. Крылов)和包戈留包夫(H. H. Боголюбов)将其发展为适用于弱非线性系统的平均法，1947 年又发展为可求任意阶近似的渐近解。1955 年，由米特罗波尔斯基(Ю. A. Митропольский)总结整理，将这种方法推广应用到非定常系统，最终形成 KBM 法。1957 年斯特罗克(P. A. Sturrock)在研究电等离子体非线性效应时，用多个不同尺度描述系统的解从而建立了多尺度法。非线性振动系统除自由振动和受迫振动以外，还广泛存在另一类振动，即自激振动。1945 年卡特莱特(M. L. Cartwright)和李特伍德(J. F. Littlewood)对受迫范德波尔振子的研究，以及莱文森(N. Levison)对一类更简化的模型分析表明，两个不同稳态运动可能具有任意长时间的相同暂态过程，这表明运动具有不可预测性。为解释卡特莱特和李特伍德、莱文森的结论，斯梅尔(S. Smale) 提出了马蹄映射的概念，构造了形状类似于马蹄的结构稳定的离散动力系统，对高维结构稳定系统的特征提供了一个具体模型，并说明高维结构稳定系统具有复杂的拓扑结构和动力行为，马蹄映射是具有

无穷多个周期点的结构稳定(或Ω稳定)的混沌动力学研究中第一个经典例子。在20世纪60年代研究的基础上,混沌学的研究开始进入高潮。1963年,洛伦兹(E. N. Lorenz)在研究地球大气运动中发现了混沌现象"对初始条件的极端敏感性",提出了著名的"蝴蝶效应"。1971年,科学家在耗散系统中正式地引入了埃依(M. Henon)、洛伦兹等奇异吸引子的概念;1973年,上田和林千博在研究达芬方程时得到一种混乱、貌似随机且对初始条件极度敏感的数值解,提出了混沌的科学概念。从此,揭开了20世纪最重大的发现——混沌运动。

进入20世纪以来,航空和航天工程的发展对振动力学提出了更高要求,诸如大气湍流引起的飞机颤振、喷气噪声导致飞行器表面结构的声疲劳、火箭运载工具有效负载的可靠性等工程问题包含了大量的随机因素,前述确定性的力学模型已经无法满足这些工程的精确分析和设计要求。工程发展的需要促使人们用概率与统计方法研究承受随机载荷作用的机械与结构系统的稳定性、响应、识别及可靠性,从而形成了随机振动学科。1944年,莱斯(Rice)首先在通信领域使用随机过程来处理信号中的噪声,促使人们很快地认识到随机过程理论将会在航天和导弹系统以及其他结构、机械、电子系统中有广泛应用,大批科技人员开始研究在随机振动环境下如何保证结构或机电系统具有最大的可靠性。1959年和1963年,美国就随机振动的数学理论、结构在随机载荷下的响应、随机振动模拟试验、随机振动可靠性等方面的研究进展,两次在麻省理工学院举行国际性随机振动报告会,掀起了随机振动研究的热潮。但由于数据的庞大和处理上的烦琐,并受到当时计算手段的限制,这个时期及其之前大量的随机振动研究还停留在理论和概念上。20世纪60年代中后期,随着计算技术与大规模集成电路的迅速发展,信号与信息的处理技术进入到了一个新的阶段,使得宇航、海运、车辆、建筑、结构、机构等领域大量的随机振动问题得到迅速有效的分析,随机振动学科成长为现代应用力学的一个重要分支。

0.2 振动力学的基本概念

0.2.1 振动的基本物理量

在物理学中,我们把一个物体相对于另一个物体位置的变化称为机械运动。**振动**(vibration)也是一种机械运动,它是指物体围绕某一平衡位置所作的往复运动,是机械运动的一种特殊形式,所以也称为**机械振动**(mechanical vibration)。

与其他机械运动形式一样,振动也用位移、速度、加速度等物理量来描述振动物体随时间的变化规律。显然,振动物体的运动规律可以用时间函数来描述,如振动物体的位移运动可以表示为

$$x=x(t) \qquad (0.2.1)$$

式中 t 为时间、x 为随时间变化的位移。如果以 t 为横坐标、x 为纵坐标作图,则可以得到振动物体的位移随时间变化的曲线,

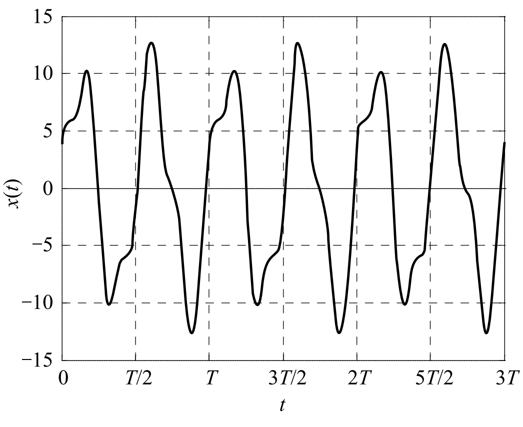


图0.2.1 位移时程

称为**位移时程曲线**(time history curve of displacement),如图 0.2.1 所示。

如果振动物体在相等的时间间隔内作往复运动,称为**周期运动**(periodic motion),往复一次运动所需的时间间隔即物体完成一次振动所占用的时间长度 T 称为**周期**(periodic),单位一般以秒(s)计。周期振动每经过一个周期后,又重复前一周期中的全部过程,周而复始形成整个振动过程。周期振动可用时间的周期性函数表达为

$$x=x(t)=x(t+nT),\quad n=1,2,3,\cdots \tag{0.2.2}$$

物体在单位时间内周期振动的次数称为**频率**(frequency),显然它是周期的倒数。频率通常以 f 表示,单位以每秒次(1/s)或赫兹(Hz)计

$$f=1/T \tag{0.2.3}$$

最简单的周期振动是**简谐振动**(simple harmonic vibration),任何周期振动都可以分解为不同阶次简谐振动的叠加运动,所以简谐振动在振动理论中具有重要意义。简谐振动可以用正弦或余弦函数表示为

$$x(t)=X\cos(\omega t+\varphi_0) \tag{0.2.4}$$

式中 X 为振动物体离开静平衡位置的最大距离,称为**振幅**(amplitude);ω 为描述振动周期变化快慢的物理量,称为振动频率。由于简谐振动可以用旋转矢量来模拟(0.2.2 节),所以其振动频率及其周期可以圆周旋转的概念来描述。设想当物体以角速度 ω 绕圆周旋转时,每旋转一周即完成一个周期运动,其所占用的时间即为周期 T。显然有关系式

$$T=2\pi/\omega \tag{0.2.5}$$

由于上述周期从绕圆周旋转的概念引出,故又称之为**圆周期**(circular periodic)T,单位仍为秒(s)。圆周期 T 对应的频率 ω 称为**圆频率**(circular frequency),可见有如下关系:

$$\omega=2\pi/T \tag{0.2.6}$$

显然圆频率等于角速度,单位为每秒弧度(rad/s)。

在式(0.2.4)中的 ωt($\omega t=\theta$)表示的是绕圆周旋转矢量 t 时刻的角度,称为**相位角**(phase angle);而 φ_0 为 $t=0$ 时刻的初始相位角,简称为**初相位角**(initial phase angle),二者单位均为弧度(rad)。

我们在分析振动现象时涉及到的机械部件、工程结构等研究对象称为**振动系统**(vibration systems)。构成系统的基本要素是惯性元件(质量)和弹性元件(弹簧),实际工程系统中还有阻尼元件。一个系统所以产生振动,除了自身具备一定的条件外,还必须受到外界的作用。我们把外界的这种作用称为**激励**(excitation),系统在外界作用下引起的振动称为振动系统对激励的**响应**(response)。激励可以是力,也可以是位移、速度或加速度等,激励通常是随时间变化的函数,如初始扰动、过程激励等外界对于系统的作用。响应是系统在激励作用下产生的运动及其状态,可以用位移、速度和加速度等运动参数描述,也可以用内力或能量表示,但在振动力学中不加说明时通常是用前者来表述振动系统对激励的响应。此外,任何振动系统的振幅和初始相位,均由该系统的初始状态确定。我们把振动系统在运动初始时刻(一般为 $t=0$ 时刻)的位移、速度或加速度等统称为**初始条件**(initial conditions)。

0.2.2 简谐振动及其表示法

1. 简谐振动的运动参量及特征

简谐振动是指系统的运动参量(位移、速度、加速度等)按时间的正弦或余弦函数规律变化的振动,是最简单而又最重要的一种周期振动。如使用余弦函数表达,则简谐振动的位移数学表达式为

$$x(t)=X\cos(\omega t+\varphi_0) \tag{0.2.7a}$$

式中的振幅和初相位均由初始条件确定。对位移关于时间求一阶导数和二阶导数,分别得到简谐振动的速度和加速度表达式

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-X\omega\sin(\omega t+\varphi_0)=X\omega\cos\left[(\omega t+\varphi_0)+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-X\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)=X\omega^2\cos[(\omega t+\varphi_0)+\pi] \tag{0.2.7b}$$

比较以上三式,不难看出简谐振动有以下运动学特征:

(1) 简谐振动的速度、加速度也是简谐函数,且与位移函数(简谐函数)具有相同的频率;

(2) 速度的相位较位移的相位超前 $\pi/2$,加速度相位较位移相位超前 π;

(3) 加速度与位移恒成正比而方向相反,比例系数为圆频率的平方。

简谐振动的位移、速度和加速度时程曲线如图 0.2.2 所示。

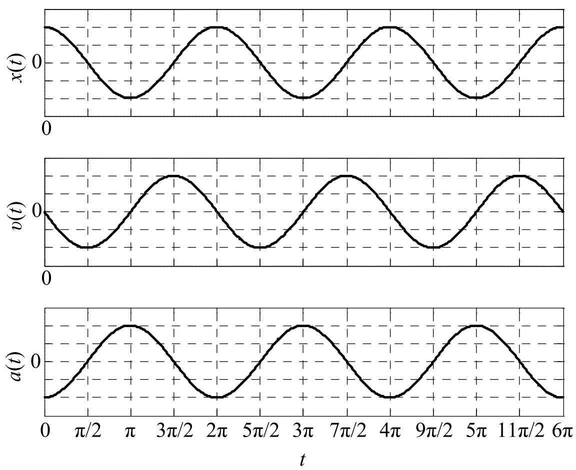


图 0.2.2 简谐振动的位移、速度和加速度时程曲线

2. 简谐振动的矢量表示法

简谐振动可以用旋转的矢量在坐标上的投影来表示。如图 0.2.3 所示,矢量$\overrightarrow{OP}$以等角速度逆时针旋转,其模为 A;矢量起始位置与水平轴夹角为 φ_0,任意时刻与水平轴夹角为 $\omega t+\varphi_0$。此时,旋转矢量在坐标上的投影为简谐函数,如在纵坐标上的投影为

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0) \tag{0.2.8a}$$

而在水平坐标上的投影为

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0) \tag{0.2.8b}$$

与简谐振动方程(0.2.7a)比较可见，旋转矢量的模 A 正是简谐振动的振幅 X，旋转矢量的角速度是简谐振动的圆频率 ω，旋转矢量与水平轮的夹角是简谐振动的相位角 $\omega t+\varphi_0$；$t=0$ 时旋转矢量与水平轴的夹角为简谐振动的初相位角 φ_0。可见，二者具有一一对应的关系，所以旋转矢量可用来表述简谐振动。

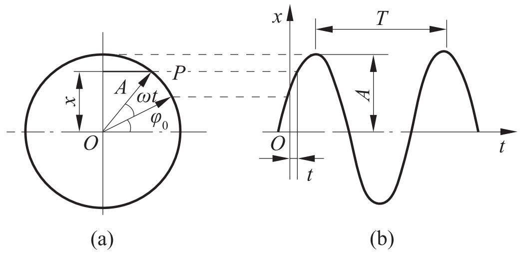


图 0.2.3 简谐振动的矢量表示法

3. 简谐振动的复数表示法

简谐振动也可以用复数表示，如图 0.2.4 所示。

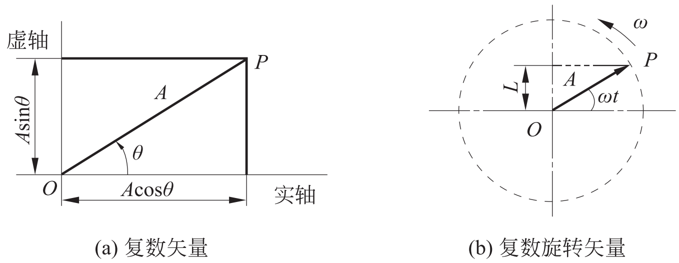


图 0.2.4 简谐振动的复数表示法

图 0.2.4(a)所示为一复矢量 $\overrightarrow{OP}$，其模为 A，与水平实轴夹角即辐角为 θ。矢量 $\overrightarrow{OP}$ 在实轴与虚轴上的投影分别为 $A\cos\theta$ 与 $A\sin\theta$，则复矢量 $\overrightarrow{OP}$ 的复数表达式为

$$Z=A(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \tag{0.2.9a}$$

可见，复矢量的虚部和实部均为简谐函数，即

$$x=\begin{cases}\mathrm{Re}(Z)=A\cos\theta\\ \mathrm{Im}(Z)=A\sin\theta\end{cases} \tag{0.2.9b}$$

因此，一个复矢量的虚部或实部可以用来描述简谐振动。复矢量 A 的模代表了简谐振动的振幅 X，辐角 θ 与简谐振动的相位角($\omega t+\varphi_0$)相对应，复矢量在复平面的实轴或者虚轴上的投影分别代表余弦或正弦简谐振动。

如果假想复矢量 $\overrightarrow{OP}$ 以等角速度 ω 逆时针旋转，矢量起始位置与实轴夹角为 φ_0，任意时刻与水平轴夹角为 $\theta=\omega t+\varphi_0$，如图 0.2.4(b)所示，此时，复矢量仍由式(0.2.9a)表达，而辐角为

$$\theta=\omega t+\varphi_0 \tag{0.2.9c}$$

根据欧拉公式

$$Z=A(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{0.2.10}$$

简谐振动可用复数表示为

$$x=\begin{cases}\mathrm{Re}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=A\cos\theta\\ \mathrm{Im}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=A\sin\theta\end{cases} \tag{0.2.11}$$

$$\theta=\omega t+\varphi_0$$

为方便起见，在振动分析中通常将式(0.2.10)中的虚部或实部符号省略，这样简谐振动的复数表达式可写成

$$x=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{0.2.12a}$$

将辐角表达式代入，变为

$$x=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi_0)}=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=\overline{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{0.2.12b}$$

式中$\overline{A}=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$称为复振幅。

复变函数以指数形式运算，通常比较简便。假设已知两个复变函数为

$$Z_1=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\qquad Z_2=A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} \tag{0.2.13}$$

则这两个复变函数的乘积、商和乘方法则如下：

$$\begin{cases}Z_1Z_2=A_1A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}\\ \dfrac{Z_1}{Z_2}=\dfrac{A_1}{A_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}\\ (Z)^n=A^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\end{cases} \tag{0.2.14}$$

简谐振动若采用复数指数的表达形式，通常会给分析运算带来极大的方便。因此，在振动力学的理论分析中，经常采用复数表示法。

0.2.3 振动的分类

振动的形式多种多样，可以从不同角度或研究的侧重点入手加以分类。以下从6个方面对振动类型进行归类。

1. 按激励特性分类

(1) 确定性振动

如果一个系统的物理特性是确定性的，受到的激励也是确定性的，则该系统的响应也一定是确定性的，相应的振动称为**确定性振动**(deterministic vibration)。所谓确定性激励是指其大小及变化规律可以用时间的确定性函数进行表述，常见的有周期激励和冲击激励。

(2) 随机振动

如果一个系统所受激励是随机的，则该系统的响应也一定是随机的，相应的振动称为**随机振动**(random vibration)。所谓随机激励是指其大小及变化无一定规律，不能用时间的确定性函数进行描述，其激励作用事先无法预测，如阵风、地震、波浪等。但随机激励及其响应具有统计规律，可以使用概率统计理论来分析。

2. 按振动系统的物理特性分类

(1) 线性振动

振动系统的质量恒定，阻尼力和弹性恢复力分别与速度和位移呈线性关系，该系统的运

动能够用常系数线性微分方程来描述，这样的系统称为**线性系统**(linear system)，线性系统在确定性激励下产生的振动称为**线性振动**(linear vibration)。

(2) 非线性振动

振动系统的质量、阻尼力或弹性恢复力等物理量具有非线性性质，该系统的运动只能用非线性微分方程来表述，这样的振动称为**非线性振动**(nonlinear vibration)。

3. 按振动的周期特性分

(1) 周期振动

振动系统的位移、速度、加速度等运动参量，在相等的时间间隔内作周期变化，其运动规律可以表述为周期函数 $x(t)=x(t+T)$(T 为周期)，这样的振动称为**周期振动**(periodic vibration)。可以用简单正弦函数或余弦函数来描述的**简谐振动**(simple harmonic vibration)，就属于典型的周期性振动。

(2) 非周期振动

振动系统的物理量不随时间作周期性的变化，即其运动没有周期性，这样的振动称为**非周期振动**(nonperiodic vibration)。大多数振动都是非周期的，其中瞬态振动为典型的非周期振动。

4. 按激励类型分类

(1) 自由振动

系统受到初始激励后不再受激励作用，仅靠其本身的弹性恢复力自主振动，这种在给定的初始位移或初始速度激励下产生的振动称为**自由振动**(free vibration)，自由振动的特性仅取决于系统本身的质量、刚度和阻尼等固有的物理特性。

(2) 受迫振动

系统在外界持续的激振作用下激发的振动，称为**受迫振动**(forced vibration)或称为**强迫振动**，其振动状态除取决于系统本身的物理特性外，还与激振扰力特性有关。

(3) 自激振动

有的非线性系统具有非振荡性能源和反馈特性，所受激励受到振动系统本身的控制，在适当的反馈作用下将自动地激起稳定的振动，这样的振动称为**自激振动**(self-excited vibration)。但是，一旦系统的振动被抑制，激励也将随之消失。

5. 按振动系统的自由度数目分类

(1) 单自由度系统的振动

系统在振动过程中任意瞬时的几何位置只需要一个独立坐标来描述，这样的振动系统称为**单自由度系统**(systems with one degree of freedom)，其振动即称为单自由度系统的振动。

(2) 多自由度系统的振动

系统在振动过程中任意瞬时的几何位置需用多个独立坐标才能确定，这样的振动系统称为**多自由度系统**(systems with multiple degrees of freedom)，其振动即称为多自由度系统的振动。

(3) 无限多自由度

系统在振动过程中任何瞬时的几何位置均需要无限多个独立坐标来确定，这样的振动系统称为**无限多自由度系统**(systems with infinite degrees of freedom)或**连续体系统**(continuous system)，其振动即称为无限多自由度系统的振动。

6. 按振动位移的特征分类

实际工程中的各类振动往往沿着某一特定方位振动，因此工程中通常简便地按照振动位移的方位来称谓相应的振动，常见的有：

（1）纵向振动：沿振动体轴线方向发生位移的振动。

（2）横向振动：垂直于振动体轴线方向发生位移的振动。

（3）扭转振动：绕振动体轴线方向发生扭转位移的振动。

（4）摆角振动：绕垂直于振动体轴线在平衡位置附近作弧线摆动的振动。

0.3 研究振动问题的基本方法

0.3.1 振动力学的研究内容

一个系统所以会产生振动，除了自身具备一定的条件外，还必须受到外界的作用才可能发生。也就是说，振动系统的振动是由于外界激励引起的，如果把激励看作对振动系统的输入，则振动响应就是振动系统的输出，输出与输入的关系取决于振动系统的特性，如图0.3.1所示。

图0.3.1 振动系统的输入与输出

可见，一个完整的振动系统包括了输入、输出和系统特性3个部分，系统的振动状态取决于激励特性和系统本身的振动特性。因此，人们在研究振动问题时，除了关心振动情况即响应之外，还关心激励与响应的关系以及系统固有特性对振动的影响，从而形成了以下3个方面的研究内容。

（1）振动分析

已知激励和系统特性，确定系统的响应，称为振动分析。这是研究振动的正问题，是最传统、最成熟的问题，也是工程设计中最常见问题。除了解析法外，目前已经发展了许多有效的数值方法和商用软件，可以满足一般工程的分析和设计需要。振动分析是结构设计的基础，是结构和机械工程师必备的技能之一。

（2）系统识别

已知激励和响应，确定系统的特性参数，称为系统识别（system identification）。当要求在一定的激励条件下确定系统参数并使响应满足指定的条件时，称为系统设计。当已知系统的激励和响应，要求从测试数据中确定出系统的频率、阻尼和振型等称为参数识别。这类问题属于振动研究的第一类逆问题，目前相关的软硬件发展都很快，识别理论与技术已日趋成熟。

（3）振源识别

已知系统特性和响应求激励，即寻找系统的振源或识别系统的激励，称为振源识别（excitation identification）。在有的情况下，系统会受到周边环境的被动激励，这时寻找振源的工作又称为**振动环境预测**（vibration environment prediction）。由于实际振动问题往往错综复杂，引起振动的激励可能多种多样、相互耦合、难以分辨，因此确定复杂工况下的振源及其数学表述一般都比较困难。解决的办法应与第一类逆问题密切结合，还可能同时结合识别、分析和设计等多方面工作协同研究。这类问题属于振动研究的第二类逆问题，目前仍处在发展之中。

0.3.2 振动系统的简化与力学模型

实际振动系统往往比较复杂，如果不作处理难以进行理论分析。因此，在研究振动问题时首先要对实际振动系统进行简化，建立振动力学模型和数学模型，然后再进行计算分析。

力学模型的建立实质上就是实际振动系统的简化过程，在处理过程中必须根据问题的实际情况和研究的需要，抓住系统中的主要影响因素，忽略或简化次要因素，把复杂的振动系统加以抽象和简化，由此建立的能够反映振动参数本质关系的物理系统，称为**力学模型**（mechanics model）。

振动系统的力学模型有很多种，分类方法也不尽相同，使用时可以从不同的角度和不同的研究需要进行选择。如按照系统特性参数的连续性来处理，可简化为离散型系统（discrete system）或**连续型系统**（continuous system）模型；按照系统特性参数的关系来处理，可简化为线性振动系统或非线性振动系统模型；按照激励特性来处理，可简化为确定性系统或随机系统。

离散模型比较简单，其运动在数学上用常微分方程表述，运算比较简单方便，因而在振动力学理论和实际工程中都得到了广泛的应用。离散型系统由集中参数元件构成，所以又称**集中参数系统**（lumped parameter system），基本元件有质量块、弹簧和阻尼器，对应的基本参数有质量、弹簧刚度和阻尼系数。振动系统原本都是连续的，建立离散系统模型首先要对原结构进行离散化处理，常用的方法有集中质量法、广义坐标法和有限元法。单自由度系统和多自由度系统模型一般自由度数较少，便于计算分析，同时模型简单便于突出主要影响因素，反映振动的本质特征，在振动理论中得到普遍运用。对于复杂的实际工程的振动分析，通常采用有限元分析，目前有限元计算技术和手段非常成熟，相应的计算软件也非常发达，已经成为现代工程分析和设计最有力的方法，在科学研究和工程产品开发中扮演着越来越重要的角色。

连续体系统模型接近系统的原态，但相对离散模型一般要复杂得多，其运动在数学上用偏微分方程表述，运算分析比较困难，只有在必要的情况下才选用连续体系统模型。连续体系统由弹性元件组成，其惯性、弹性和阻尼也是连续的，典型的弹性元件有弦、杆、轴、梁、膜、板、壳等。

任何系统本质上都是非线性的，但非线性的影响程度各有不同。研究振动问题时，应优先考虑是否可以简化为线性模型，因为线性振动理论成熟、分析方法简便可靠。当我们所关心的非线性影响因素较小，不足以对研究结果造成期望之外的影响时，可以忽略这些非线性因素，将振动系统简化为线性振动系统。但是，当系统的某些非线性因素较强或对其影响无法估计时，应将系统简化为非线性振动系统，如果仍然盲目地采用线性系统模型不仅可能会遗失某些重要现象，还可能得到完全错误的结论。对于复杂的工程非线性振动问题的研究，应借助有限元方法进行计算机分析。

当系统受到的激励作用是随机的，如建筑结构受到阵风或地震动的作用、路面引起行驶车辆的颠簸、船只受到海浪的拍击、飞行器受到大气湍流的激励，这些系统的响应也将是随机的。对这些振动系统的分析，最科学的方法是建立随机振动模型，然后使用随机振动理论进行分析。

0.3.3 振动系统的动力自由度

振动系统在振动过程中所有质量体系的位置随时间不断变化，我们把确定系统全部质量在任意时刻位置所需要的独立几何参数的数目，称为振动系统的**动力自由度**(dynamic degrees of freedom)。在解析方程中，系统的动力自由度通常以坐标的形式来反映。实际系统或结构的质量和刚度都是连续分布的，其动力自由度为无穷多个，不仅计算困难，而且在很多情况下也没有必要。我们通常的做法是把连续的振动系统离散化，根据系统的复杂程度和研究的需要，建立有限自由度系统。一般而言，自由度数越多分析精度越高，但计算难度也越大。简化的基本原则是，在满足计算精度的前提下，尽量减少振动力学模型的自由度数。离散连续系统的常用的方法有集中质量法、广义坐标法和有限元法。

所谓的**集中质量法**(lumped mass method)，就是将连续结构的分布质量按照一定规则集中并简化到适当的位置上，形成一系列离散的质点系统，质点之间由无质量的弹簧和阻尼器连接，从而将无限自由度体系简化为有限自由度系统的质阻弹模型。例如对于多层框架结构，由于楼面(包括横梁)的刚度和质量较大，作水平振动时可假定楼板刚度无限大，将楼板和柱子的质量都集中到柱子两端的楼板处，集中质量之间用弹簧及阻尼器来模拟柱子和墙的侧移刚度及振动阻尼，形成“糖葫芦”式的串联式模型。在简化振动模型时，自由度数并不是一成不变的，对于实际问题应同时兼顾精度与计算工作量。另外，质量的离散与分配是否合理，可以按照动能等价的原理进行评价，即当离散后质量的总动能与离散前相等或接近，才可能保证离散模型的合理性。

与集中质量法不同，**广义坐标法**(generalized coordinate method)是通过对结构的振动位移形态上有限点的约束来实现离散化的，它将质量连续分布的振动位移表达成满足位移边界条件的位移函数(也称形函数)的线性组合，这些线性组合系数组成了由该方法得到的离散系统的广义坐标。例如对于图0.3.2所示的简支梁，可假设其竖向振型为正弦曲线。当仅考虑一阶振型时，即假设其振型为1个正弦波时(如图0.3.2(a)所示)，取位移函数为 $y=a_1(t)\sin(\pi x/l)$，满足边界条件，全梁上各处质量的位移由唯一的广义坐标 $a_1(t)$ 确定，于是连续简支梁被简化成了只有一个自由度的振动系统。当考虑两阶振型时，假设其第二阶振型为2个正弦波(如图0.3.2(b)所示)，对应的位移函数为 $y=a_2(t)\sin(2\pi x/l)$，这时简支梁的位移形态由第一阶和第二阶振型叠加而成，故此时简支梁的位移函数为 $y=a_1(t)\sin(\pi x/l)+a_2(t)\sin(2\pi x/l)$，广义坐标为 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$，梁上各处质量的位移由这两个广义坐标确定，所以连续简支梁被简化成了具有两个自由度的振动系统。同样，如果假设简支梁的第三阶振型为3个正弦波(如图0.3.2(c)所示)，对应的位移函数为 $y=a_3(t)\sin(3\pi x/l)$，则简支梁的全部位移函数变为 $y=a_1(t)\sin(\pi x/l)+a_2(t)\sin(2\pi x/l)+a_3(t)\sin(3\pi x/l)$，简支梁被简化为具有3个自由度的离散振动系统。将以上简支梁简化为具有 n 个动力自由度的位移函数可以概括为以下的一般表达式：

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{n}a_i(t)\varphi(x) \tag{0.3.1}$$

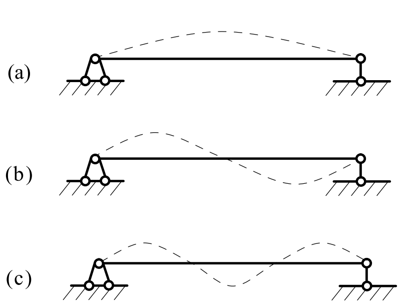


图0.3.2 简支梁的广义坐标函数

式中的待定参数 $a_i(t)$ 即为广义坐标，可由振动的初始条件确定；为满足位移边界条件的位移函数，故称为**形状函数**(shape function)，简称形函数。

有限单元法(finite element method)的离散化方法，是把振动结构人为地分割成有限个单元，将连续分布的刚度、质量、荷载、阻尼集中于单元节点处，然后以节点的位移作为结构的广义坐标，统一规定各单元共享的形状函数，通过形状函数满足各单元节点之间的连续性要求，使广义坐标获得了直观的物理背景及统一的计算格式。由于每一节点位移仅影响其相邻单元，结构的向量方程耦联程度较小，因此质量矩阵和刚度矩阵等将表现出带状特征，为计算带来了很大便利。有限单元方法一般选静力状况下的形状函数作为各单元共享的形状函数，形状函数相对振型函数存在一定偏差，因而给计算带来一定的误差，在大体积结构中还可能因形状函数难以反映高振型影响而造成高频反应失真。但由于结构反应在很大程度上取决于低振型的影响，故有限单元离散化方法在多数情况下都能得到理想的计算精度。

0.3.4　振动力学的研究方法

振动力学的研究方法包括理论分析和实验研究两个部分。

理论分析是研究振动问题最基本的方法，它的根本任务是从理论上揭示系统振动的基本规律及其特性。理论分析包括定性研究和定量研究。定性研究的主要是方程解的存在性、唯一性、周期性和稳定性，以及振动系统的简化和振动力学建模理论等；定量研究的是微分方程的解，包括解的方法、解的具体形式、解的规模数量等。振动微分方程的求解又包括精确解法和近似解法。精确解即解析解，如有限自由度线性振动系统在简谐激励下的响应均可以运用线性振动理论获得解析解，但随着自由度数目的增加计算难度会大幅度增加。但是对于一些振动问题，获得解析解很困难甚至不可能，如当线性振动系统受到不规则周期力、冲击、随机等复杂激励作用时，这时对振动运动采用近似解往往会使分析大大简化，并且可以根据精度的需要确定近似的简化程度。例如对于一般周期激励下的强迫振动，我们可以运用傅里叶级数分析方法将周期激振力简化为傅里叶级数进行求解，至于傅里叶级数的项数取多少就可以根据精度的要求来进行选择。近似计算最有效的方法是数值分析，随着电子数字计算机的迅速发展以及各种计算方法的不断完善，**数值分析法**已成为各个科学技术领域中普遍应用的重要研究方法，在振动问题的研究中发挥着越来越重要的作用。从根本上说，用数值计算来分析振动问题就是用数值积分法求出描述运动的微分方程在一定初值下的数值解，再根据解所表示的运动时间历程分析系统的运动规律和振动特性，因此这种方法也可称作数字计算机仿真。数值分析能够求解各类线性、非线性和非确定性系统的振动问题，目前在非线性振动的研究中已得到日益广泛的应用。

振动试验是通过实验方法来研究振动问题基本的方法，它既是对理论研究的补充，也是对理论结果的验证，二者相辅相成，互为支撑。振动试验包括**振动测试**和**模型试验**两大类。振动测试包括振动响应、系统特性和振动激励测试。对于已有系统在给定激励下的响应测试，是实际工程最常见的一种振动测试，目的是确定振动的强弱和规律；对周期振动，主要测定位移、速度、加速度或应变的幅值和振动周期；对瞬态振动和冲击，主要测定位移或加速度的最大峰值和响应持续时间；对平稳随机振动，主要测定力和响应的时间历程的均值和方差等；对非平稳随机振动，可把时间划分为许多小段，测定各小段内时间历程的均值和方差，找出它们同时间的关系，并以此作为振动强度的度量。在系统特性未知或不明确的情况下，可

以根据激励和响应的测试结果进行动态特性参量识别，对于线性系统最常用的为模态参量，包括各阶固有频率、振型参数、模态质量或模态刚度、模态阻尼比等。目前进行模态参数识别分为频域法及时域法两大类。将测试所得的激励与响应时间历程信号，经过快速傅里叶变换(FFT)后进行参数识别，称为振动模态识别的频域方法；如果对振动信号直接进行识别，则是振动模态参数识别的时域方法。以确定未知激励为目的的振动测试称为载荷识别或环境识别，它是以确定振源性质、传播途径及振源施加在系统上的载荷谱为目的的试验分析。大型结构和复杂系统承受的载荷非常复杂，很难直接测定，但可以通过结构的响应信号和系统已知的数学模型来反推系统所承受的激励载荷，再根据各种工况下得出的数据进行统计和综合，最终得到载荷谱。振源的性质和传播途径也可以用功率谱分析或相关分析方法获得。在振动试验研究中，经常受到试验规模、试验场地、试验设备和试验经费等条件的限制，无法进行现场试验，这时可以采用模型试验来完成振动试验研究。模型试验首先要按照振动对象原型的制作试验用模型，然后通过模拟实际振动荷载对结构模型进行激振，从而获得相应的数据和信息。模型试验应满足相似理论，如模型与原型尺寸上几何相似、结构上材料相似、激励上成比例等。模型试验具有针对性强、经济性好、仿真性高等特点，受到科学界和工程界的广为重视，已经成为振动力学不可或缺的重要研究手段。

0.4 振动理论的工程应用

振动是各类工程结构和机械系统最典型的动力学问题，振动理论带动了工程技术的进步，随着工程结构的大型化和动力系统的高速化，工程设计及其动力分析对振动力学提出了越来越高的要求，因而又反过来推进了振动理论的发展。振动理论的工程应用主要体现在以下3个方面。

(1) 振动分析与工程设计

大多数工程结构和机械系统都存在振动问题，需要通过理论分析或试验研究来确定系统的振动强度和振动规律，进而确定系统的动特性以及振动状态下的可靠性是否满足要求。传统的工程设计，一般先从静态设计入手，然后再进行动特性的验算或测试，不符合要求时再进行调整或补救，很难达到高水准动态要求且效率低下。现代工程设计引入动态设计思想，全面考虑结构或构件的静态和动态特性，设计的对象在符合静态要求的同时，还有较好的动特性并满足动强度、动刚度、动稳定性的要求。

(2) 振动抑制与振动控制

振动既是一种自然现象(如阵风、地震、海浪等)，也是一种工作状况(转子的振动、噪声簸动等)，常常要伴随着结构或设备的整个寿命周期，对工程的可靠性、质量和寿命有着非常不利的影响。因此，在很多情况下，我们需要采取措施对不利的振动进行抑制或控制。目前，已经建立的振动控制方法有3种，即振动的被动控制、主动控制和半振动控制。

振动的被动控制是振动控制中的经典方法，它主要由惯性、弹性和阻尼3类元件构成，不需要外界施加能量，造价低易于实现，在工程中得到广泛应用。如最早应用于机械系统的隔振、阻振、减震等减震措施非常成功，很快在建筑结构、桥梁结构等中得到推广应用。我国隔震技术的研究开展较早，在理论研究、技术开发和工程应用等各方面都取得了丰硕成果。但是被动控制的控制频率范围固定且一般宽度不大，控制振动的效果也有限，于是人们又提

出了主动控制振动的方法。主动控制系统可以随时根据结构反应或环境的扰动迅速运算并做出决策，然后过作动器实施最优控制力。主动控制系统主要由传感器、控制器和作动器等硬件以及数据处理和结构分析等软件集成，需要外部提供能量。这种控制方法的特点是可以实现振动控制且效果显著，在系统频率范围和控制效果上可以人为地进行较大的调整，但实现过程复杂，控制设备投资大。半主动控制原理与主动控制基本相同，但是通过改变控制装置的属性来取得最优控制效果，而不需要对控制结构专门输入能量。半主动控制系统主要有主动变刚度系统和主动变阻尼系统。在控制振动的应用中，有时把主动控制系统和被动控制系统结合起来使用，将不同的控制系统同时施加在同一个结构上的振动控制系统称为混合振动控制系统。

随着现代控制理论和计算机技术的快速发展，振动控制特别是主动控制技术取得了长足的进步，工程应用日益广泛。在建筑、桥梁领域，用于减小阵风的不适性，防止飓风和地震造成的破坏；在机械领域，用于精密工作机械整机的振动控制、转子的振动控制和柔性机械臂的振动控制，以及最新的超精密加工、超精密测量以及航天技术中的微幅振动主动控制；在交通运输领域，为提高车辆平顺性、安全性和零部件寿命而用于车辆悬架的振动控制。

(3) 振动利用

振动是一种特殊的机械运动，包含一定形式的机械能，会产生特定的振动波。当一个结构、零件甚至复杂系统，受到某种振动激励时常常会产生意想不到的效果，工程上利用振动的作用来达到某些特定效果或实现某些特殊用途，称为**振动利用**(vibration utilization)。如今振动利用非常普遍，广泛应用于土木、机械、冶金、煤炭、电力、能源、交通、农业、生物、信息等各个领域，各类振动机器和振动仪器层出不穷，成功用于不同工程和人们日常生活。如土木工程领域，利用振动沉桩拔桩、振动挖掘、振动夯土、振动混料、振动密实、振动拆除、振动疏通等；在机械领域，振动输送、振动筛选、振动干燥、振动成型、振动破碎、振动清理、振动加工、振动时效等。与此同时，振动波也在工程和我们日常生活中得到广泛应用，利用海浪波动能量发电、利用超低频振动增加原油采收率、超声波振动切削新工艺、超声医疗器械、超声电机等。

随着科学技术和振动力学的发展，振动利用日益广泛，特别是近30多年来的发展举世瞩目。我国著名振动力学专家闻邦椿院士，在国际上首先提出了振动利用工程的新概念，创建了振动利用工程新学科，为振动的工程利用提供了理论框架和应用基础。

第1章 单自由度系统的自由振动

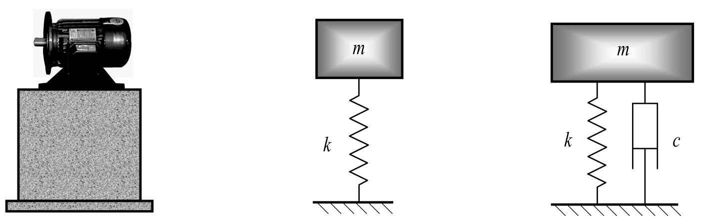
单自由度线性系统是最简单的振动系统，也是最基本的振动系统。很多实际问题都可以简化为单自由度线性系统，相关的理论可以直接解决工程实际问题。单自由度系统具有一般振动系统的一些基本特性，它是对多自由度系统、连续系统乃至非线性系统进行振动分析的基础。

振动系统仅受到初始条件(如初始位移、初始速度)的激励而引起的振动称为**自由振动**(free vibration)。

1.1 振动系统的简化及其模型

任何实际振动系统都是连续的复杂系统，其振动规律受到许多复杂因素的影响。但理论分析与工程测试研究表明，在振动系统中只有质量及其分布、运动阻尼、恢复力特性等少数参数对振动特性及其响应起主导作用，人们据此提出了**集中参数模型**(lumped parameter model)。线性振动系统的集中参数由质量 m、阻尼 c 和弹簧刚度 k 构成，通常又称为**质阻弹模型**(mass-spring-damper model)。集中参数模型是最典型的离散化振动模型，模型中的集中参数，是将实际连续系统简化为理想的离散振动系统后对应的相当值，通常要根据测试结果分析计算得到。简化模型的复杂程度取决于所考虑问题的复杂程度和所要求的计算精度，不同的简化模型，对应不同的集中参数，分析的准确性也不尽相同，处理不好甚至会得到错误的结论。因此，合理简化是正确分析的前提。

单自由度振动系统的质阻弹力学模型，由质量块、阻尼器和弹簧 3 种理想化的元件组成，分别以质量的大小 m、阻尼器的阻尼系数 c 和弹簧的刚度系数 k 为集中参数。图 1.1.1 为某电机-基础-地基系统及其简化后的质阻弹力学模型。



(a) 电机-基础-地基系统　(b) 质量-弹簧模型　(c) 质量-弹簧-阻尼模型

图 1.1.1　电机-基础-地基系统及其质阻弹模型

1.1.1 弹性元件

1. 弹性元件的意义与性质

弹性元件(或弹簧)在外力作用下产生变形,并提供与运动方向相反的弹性恢复力。弹性元件的弹性恢复力与位移关系如图 1.1.2 所示。由图 1.1.2 可见,在小变形范围内,弹性恢复力与位移关系满足胡克定律,即二者呈线性关系

$$F=kx \tag{1.1.1}$$

式中,k 称为**弹簧刚度**(stiffness),其量纲为$[\mathrm{M}][\mathrm{T}]^{-2}$,单位为 N/m。显然,弹簧刚度 k 在数值上等于使弹簧产生单位位移所需施加的力。

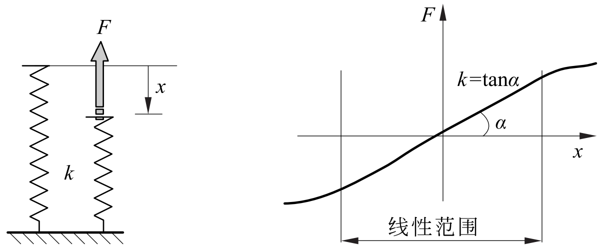


图 1.1.2 弹性恢复力与位移的关系

对于角振动(扭转振动)系统,其振动为在外力矩作用下的往复角位移运动。此时系统对应的弹簧为扭转弹簧,与线型弹簧一样,在小变形范围内,外力矩 M 与扭转角 θ 呈线性关系

$$M=k\theta \tag{1.1.2}$$

式中,k 称为扭转弹簧的刚度,其大小等于使扭转弹簧产生单位角位移所需施加的力矩,扭转弹簧刚度的量纲为$[\mathrm{M}][\mathrm{L}]^2[\mathrm{T}]^{-2}$,单位为 N·m/rad。

实际工程结构中的许多构件,其工作受力与变形之间保持线性关系,在研究其振动规律时,均可作为线性弹性元件处理。弹簧刚度可由下式计算:

$$\text{弹簧刚度}=\frac{\text{广义作用力}}{\text{广义位移}} \tag{1.1.3}$$

弹性元件为储能构件,在外力作用下弹簧因变形而储存变形势能。对于给定的弹簧而言,储能的多少与弹簧形变 x 的平方成正比,即弹簧变形储存的势能为

$$V=\frac{1}{2}kx^2 \tag{1.1.4}$$

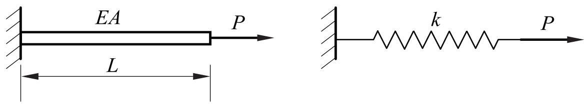
在振动分析中,通常采用以下两个假设。

(1) 忽略弹簧的质量。振动系统中质量块的质量往往远远大于弹簧的质量,在这种情况下忽略弹簧的质量,引起的误差微乎其微。因此,工程计算中为了简化计算,常常忽略弹簧的质量。但是在弹簧质量相对较大时,不应忽略弹簧的质量,否则会引起较大的计算误差。

(2) 小变形假设。实际工程系统,在设计时一般已经限定构件的受力和变形在线性范围以内,振动系统的振幅不会超出其弹性元件的线性范围,其线性化处理符合一般工程的情况。

【例 1.1.1】 求下列各构件的弹簧刚度 k。已知：杆件的长度为 L、横截面积为 A、抗弯截面惯性矩为 I、极惯性矩为 J，杆件材料的弹性模量为 E、剪切弹性模量为 G。外力为 P，外力矩为 M，轴的扭转角为 θ。

解 (1) 拉压杆件的刚度



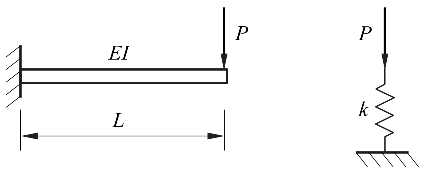
杆件在轴向外力 P 作用下的变形为

$$\Delta=\frac{PL}{EA}$$

按照式(1.1.3)，得到该拉压杆件的刚度

$$k=\frac{P}{\Delta}=P\Big/\frac{PL}{EA}=\frac{EA}{L}$$

(2) 悬臂梁的刚度



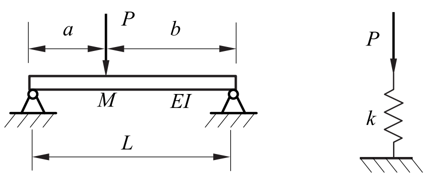
悬臂梁在图示外力 P 作用下自由端的挠度为

$$\Delta=\frac{PL^3}{3EI}$$

按照式(1.1.3)，得到该悬臂梁的刚度

$$k=\frac{P}{\Delta}=P\Big/\frac{PL^3}{3EI}=\frac{3EI}{L^3}$$

(3) 简支梁的刚度



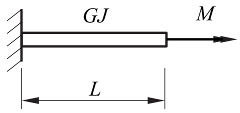
简支梁在图示外力 P 作用下 M 点的挠度为

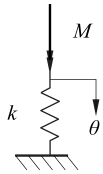
$$\Delta=\frac{Pa^2b^2}{3EIL}$$

按照式(1.1.3)，得到该简支梁的刚度

$$k=\frac{P}{\Delta}=P\Big/\frac{Pa^2b^2}{3EIL}=\frac{3EIL}{a^2b^2}$$

（4）扭转轴的刚度





扭转轴在外扭矩 M 作用下自由端的转角为

$$\Theta=\frac{ML}{GJ}$$

按照式(1.1.3)，得到该扭转轴的刚度

$$k=\frac{M}{\Theta}=M\Big/\frac{ML}{GJ}=\frac{GJ}{L}$$

2. 等效刚度

实际工程系统的弹性元件往往比较复杂，为了便于分析，常常要将复杂的弹性元件系统简化为一个等价的弹性元件，这种等效代换需要通过弹性元件系统等效刚度的计算来实现。

将复杂的弹性元件系统简化为一个简单的弹性元件，关键是二者的刚度要等效，即简化后的弹性元件刚度对系统参数的影响与简化前应当是一致的。我们通常把力学模型中取代复杂系统中的整个弹性元件组的等价效应的弹簧，称为**等效弹簧**，等效弹簧的刚度称为**等效刚度**(equivalent stiffness)。如例 1.1.1 所示的简单弹性元件的等效刚度和例 1.1.2 所示的弹性元件组的等效刚度。

（1）并联刚度

当弹性元件组对系统的恢复力的贡献为和的关系时，则弹性元件之间为并联关系。此时弹性元件组的等效刚度为

$$k_{\mathrm{eq}}=\sum_{1}^{n}k_i \tag{1.1.5}$$

（2）串联刚度

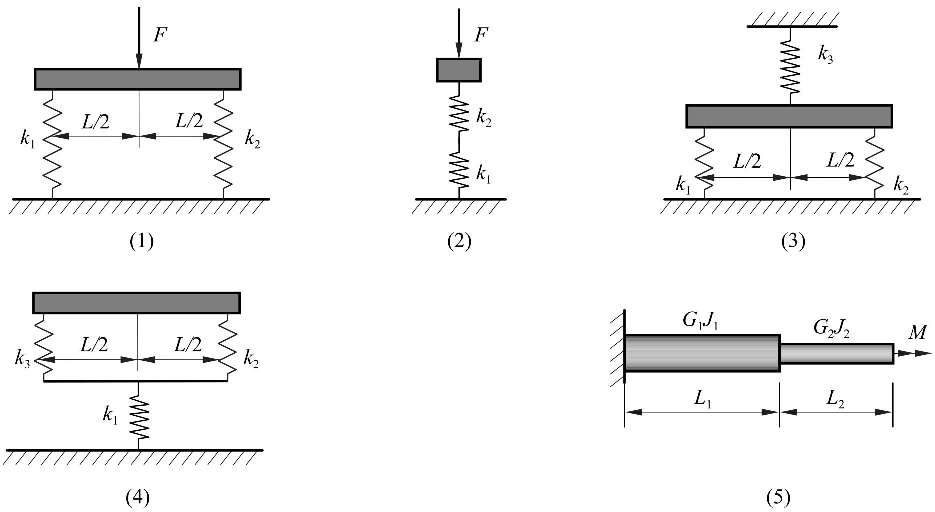
当弹性元件组对系统的位移的贡献为和的关系时，则弹性元件之间为串联关系。此时弹性元件组的等效刚度为

$$k_{\mathrm{eq}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i} \tag{1.1.6}$$

（3）确定等效刚度的一般方法

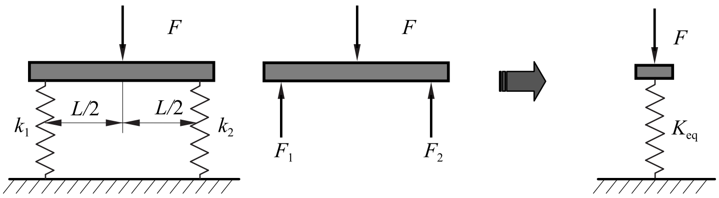
弹性元件为储能元件，只有等效弹簧在任一时刻储蓄的势能均与原系统相等时，等效系统才与原系统等效。因此，可以利用二者势能相等的原理来确定等效刚度。这是确定等效刚度的一般方法，对于复杂系统特别有效。

【例 1.1.2】 求例 1.1.2 图所示系统的等效刚度。假设以下(1)、(3)、(4)中 L 较小，不考虑刚杆倾斜的影响。



例 1.1.2 图

解　(1) k_1 和 k_2 为并联关系,受力分析和模型简化如图(1)所示。



(1)

系统的恢复力为 k_1 和 k_2 的反力之和

$$F=F_1+F_2$$

根据胡克定律,有

$$\Delta\cdot k_{\mathrm{eq}}=\Delta\cdot k_1+\Delta\cdot k_2$$

由此得到原系统的等效刚度

$$k_{\mathrm{eq}}=k_1+k_2$$

与直接使用式(1.1.4),结果一样。

也可以利用势能相等的原理来确定该系统的等效刚度,即原系统的势能与简化系统的势能相等

$$\frac{1}{2}k_1\Delta^2+\frac{1}{2}k_2\Delta^2=\frac{1}{2}k_{\mathrm{eq}}\Delta^2$$

可得

$$k_{\mathrm{eq}}=k_1+k_2$$

与上述方法的结果一致。

(2) k_1 和 k_2 为串联关系,受力分析和模型简化如图(2)所示。