

第3章 整数规划与运输问题

3.1 整数规划

3.1.1 整数规划问题的数学模型

在实际的经济管理过程中,往往要求决策变量的取值部分或者全部是整数,比如机器的台数、车辆的分配、人员的安排等,对于这样的规划问题称为整数规划问题(Integer Programming, IP)。整数规划是最近几十年发展起来的规划论中的一个分支。如果不考虑整数条件,由余下的目标函数和约束条件构成的规划问题称为该整数规划问题的松弛问题(Slack Problem)。若松弛问题是一个线性规划,则称该整数规划为整数线性规划(Integer Linear Programming, ILP)。整数线性规划问题数学模型的标准形式为

$$\begin{aligned} \max Z(\text{或 } \min Z) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{(IP)} \quad \text{s. t.} \quad &\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \dots, n) \text{ 且部分或全部为整数} \end{cases} \end{aligned}$$

依照决策变量取整要求的不同,整数线性规划可分为纯整数线性规划、全整数线性规划、混合整数线性规划、0-1 整数线性规划。

纯整数线性规划(Pure Integer Linear Programming): 所有决策变量要求取非负整数(这时引进的松弛变量和剩余变量可以不要求取整数)。

全整数线性规划(All Integer Linear Programming): 除了所有决策变量要求取非负整数外,系数 a_{ij} 和常数 b_i 也要求取整数(这时引进的松弛变量和剩余变量也必须是整数)。

混合整数线性规划(Mixed Integer Linear Programming): 只有一部分的决策变量要求取非负整数,另一部分可以取非负实数。

0-1 整数线性规划(Zero-one Integer Linear Programming): 所有决策变量只能取 0 或 1 两个整数。

注意: 本章仅讨论整数线性规划,本教材中后面所提到的整数规划,一般均指整数线性规划。

3.1.2 整数规划问题实例

例 3.1 某厂生产甲和乙两种产品,需要经过 A、B、C 三道工序进行加工,单件工时和利润以及各工序每月工时限额如表 3-1 所示。问工厂应如何安排生产,才能使总利润最大?

表 3-1

	A	B	C	利润/元/件
甲	2	4	5	30
乙	3	7	6	45
工时限额/小时/月	300	100	260	

解：设工厂每月生产甲产品 x_1 件,乙产品 x_2 件。则该问题的数学模型为

$$\begin{aligned} \max Z &= 30x_1 + 45x_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 300 \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 100 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 260 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{且为整数} \end{cases} \end{aligned}$$

这是一个纯整数规划问题。

例 3.2 某人有一个背包可以装 5kg、0.02m³ 的物品。他准备用来装 A、B 两种物品，每件物品的重量、体积和价值如表 3-2 所示。问两种物品各装多少件才能使所装物品的总价值最大？

表 3-2

物品	重量/千克/件	体积/立方米/件	价值/元/件
A	1.2	0.003	4
B	0.5	0.0025	5

解：设 A、B 两种物品的装载件数分别为 x_1 、 x_2 ，则该问题的数学模型为

$$\begin{aligned} \max Z &= 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 1.2x_1 + 0.5x_2 \leq 5 \\ 0.003x_1 + 0.0025x_2 \leq 0.02 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{且为整数} \end{cases} \end{aligned}$$

这也是一个纯整数规划问题。

例 3.3 在例 3.2 中，假设此人还有一只旅行箱，最大载重量为 10kg，其体积是 0.018m³。背包和行李箱只能选择其一，如果所需携带物品不变，问该如何装载物品，使所装物品价值最大？

解：引入 0-1 变量(或称逻辑变量) y_i ，令

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{采用第 } i \text{ 种方式装载时 } i = 1, 2 \\ 0, & \text{不采用第 } i \text{ 种方式装载时} \end{cases}$$

则该整数规划数学模型为

$$\begin{aligned} \max Z &= 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 1.2x_1 + 0.5x_2 \leq 5y_1 + 10y_2 \\ 0.003x_1 + 0.0025x_2 \leq 0.02y_1 + 0.018y_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{且为整数}; y_i = 0 \text{ 或 } 1, i = 1, 2 \end{cases} \end{aligned}$$

这是一个 0-1 整数规划问题。

例 3.4 企业计划生产 4000 件某种产品,该产品可以以自己加工、外协加工任意一种形式生产。已知每种生产形式的固定成本、生产该产品的变动成本以及每种生产形式的最大加工数量(件)限制如表 3-3 所示,怎样安排产品的加工使总成本最小。

表 3-3

	固定成本/元	变动成本/元/件	最大加工数/件
本企业加工	500	8	1500
外协加工 I	800	5	2000
外协加工 II	600	7	不限

解: 设 x_j 为采用第 j ($j=1,2,3$) 种方式生产的产品的数量,生产费用为

$$C_j(x_j) = \begin{cases} k_j + c_j x_j & (x_j > 0) \\ 0 & (x_j = 0) \end{cases}$$

其中, k_j 为固定成本, c_j 为变动成本。设 0-1 变量 y_j , 令

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{采用第 } j \text{ 种加工方式时, 即 } x_j > 0 \text{ 时 } j = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{不采用第 } j \text{ 种加工方式时, 即 } x_j = 0 \text{ 时} \end{cases}$$

该问题的线性规划模型为

$$\begin{aligned} \min Z &= (500y_1 + 8x_1) + (800y_2 + 5x_2) + (600y_3 + 7x_3) \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_j - My_j \leq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 4000 \\ x_1 \leq 1500, x_2 \leq 2000 \\ x_j \geq 0, y_j = 1 \text{ 或 } 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases} \end{aligned}$$

其中, $x_j - My_j \leq 0$ 是处理 x_j 与 y_j 一对变量之间逻辑关系的特殊约束, M 为任意大的正数, 当 $x_j > 0$ 时 $y_j = 1$, 当 $x_j = 0$ 时, 为使 Z 最小化, 有 $y_j = 0$ 。此问题为混合整数规划问题。

3.1.3 整数规划问题的解

整数规划及其松弛问题,从解的特点上来说,两者之间既有密切的联系,又有本质的区别。

松弛问题作为一个线性规划问题,其可行解的集合是一个凸集,任意两个可行解的凸组合仍为可行解。整数规划问题的可行解集合是它的松弛问题可行解集合的一个子集,任意两个可行解的凸组合不一定满足整数约束条件,因而不一定仍为可行解。由于整数规划问题的可行解一定也是它的松弛问题的可行解(反之则不一定),所以前者最优解的目标函数值不会优于后者最优解的目标函数值。

在一般情况下,松弛问题的最优解不会刚好满足变量的整数约束条件,因而不是整数规划的可行解,自然就不是整数规划的最优解。此时,若对松弛问题的这个最优解中不符合整数要求的分数或小数解经“四舍五入”或“舍入化整”,所得到的解不一定是整数规划问题的最优解,甚至也不一定是整数规划问题的可行解。先看下面的例子。

例 3.5 用图解法求下列问题的最优解。

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 14x_1 + 9x_2 \leq 51 \\ -6x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases} \end{aligned}$$

解：去掉决策变量为整数约束,该问题的最优解为图 3-1(a)中的点 $(3/2, 10/3)$ 。如用“舍入取整法”可得到图 3-1(b)中的 4 个点,即 $(1, 3)$ 、 $(2, 3)$ 、 $(1, 4)$ 和 $(2, 4)$ 。显然,这 4 个点均不在问题的可行域之内,因此它们都不可能是原问题满足整数约束的最优解。

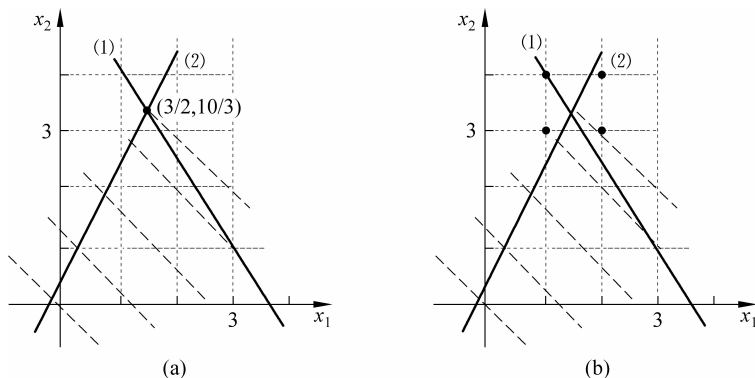


图 3-1

由于整数规划及其松弛问题之间的上述特殊关系,像例 3.5 这样先求松弛问题的最优解,再用简单取整的方法虽然简单直观,但是却并不是求解整数规划的有效方法,因此,对于求解整数规划问题有必要进行专门研究。

3.1.4 整数规划的求解方法

按整数规划约束条件,其可行解肯定在其松弛问题的可行域内且为整数点。故当整数规划问题的松弛问题的可行解集是一个有限集合时,最容易想到的方法就是穷举变量的所有可行的整数组组合,如图 3-1(b)中,可以将该有限集合中的所有整数组组合一一列出,即 $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(2, 1)$ 、 $(2, 2)$ 、 $(3, 0)$ 、 $(3, 1)$,然后将这些整数组组合代入目标函数中,比较各点目标函数值,能使目标函数值取最大的整数组组合即为该整数规划问题的最优解,此法称为**完全枚举法**或**穷举法**。在本例中, $(2, 2)$ 、 $(3, 1)$ 可使目标函数取最大值,因此,例 3.5 的最优解为 $(2, 2)$ 和 $(3, 1)$,最优值为 4。

完全枚举法对于决策变量较少、约束条件不是很多的整数规划的求解是可用的,但对于大规模整数规划问题是不可取的。例如,在本章第 3 部分的指派问题中,将 n 项任务指派 n 人去完成,不同的指派方案共有 $n!$ 种,当 $n=10$ 时,这个数就要超过 300 万;当 $n=20$ 时,这个数就超过 2×10^{18} ,如果一一计算,庞大的数据计算量是可想而知的,很显然,对于这样的问题,穷举法是不可取的。目前,应用较为广泛的求解整数规划方法主要有**分枝定界法**(Branch and Bound Method)和**割平面法**等,对于特别的 0-1 整数规划问题,一般有**隐枚举法**和**匈牙利法**等。下面首先介绍分枝定界法和割平面法。

1. 分枝定界法

分枝定界法是由 Land Doig 和 Dakin 等人于 20 世纪 60 年代初提出的,可用于解纯整数规划或混合整数规划问题。由于该方法灵活且便于用计算机求解,所以现在它已经是求解整数规划的重要方法,在实际问题中有着广泛的应用。

分枝定界法是一种隐枚举法或部分枚举法,它不是一种有效的算法,是穷举法基础上的改进。分枝定界法的关键是分枝和定界。解整数规划的一般步骤如下。

步骤一:暂时不考虑整数约束,解整数规划问题(IP)的松弛问题(LP)

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$
$$(LP) \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0, & (j = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

可能得到以下情况之一。

① 若(LP)没有可行解,则(IP)也没有可行解,停止计算。

② 若(LP)有最优解,并符合(IP)的整数条件,则(LP)的最优解即为(IP)的最优解,停止计算。

③ 若(LP)有最优解,但不符合(IP)的整数条件,转入下一步。

为讨论方便,设(LP)的最优解为

$$X^{(0)} = (b'_1, b'_2, \dots, b'_r, \dots, b'_m, 0, \dots, 0)^T, \quad \text{目标函数最优值为 } Z^{(0)}$$

其中, $b'_i (i=1, 2, \dots, m)$ 不全为整数。

步骤二:定界。

① 上界的定义。记(IP)的目标函数最优值为 Z^* , 以 $Z^{(0)}$ 作为 Z^* 的上界,记为 $\bar{Z} = Z^{(0)}$ 。

② 下界的定义。用观察法找得一个整数可行解 X' , 并以其相应的目标函数值 Z' 作为 Z^* 的下界,记为 $\underline{Z} = Z'$, 也可以令 $\underline{Z} = -\infty$, 则有 $\underline{Z} \leq Z^* \leq \bar{Z}$ 。

步骤三:分枝。

在(LP)的最优解 $X^{(0)}$ 中,任选一个不符合整数条件的变量,例如 $x_r = b'_r$ (不为整数),以 $[b'_r]$ 表示不超过 b'_r 的最大整数。构造两个约束条件

$$x_r \leq [b'_r] \quad \text{和} \quad x_r \geq [b'_r] + 1$$

将这两个约束条件分别加入整数规划问题(IP),形成两个子问题 (IP_1) 和 (IP_2) ,再解这两个问题的松弛问题 (LP_1) 和 (LP_2) 。

步骤四:修改上、下界。

以每个子问题所对应的松弛问题为一分枝标明求解的结果,与其他问题的解的结果进行比较,并按照以下两点规则进行上下界的修改。

① 在各分枝问题中,找出目标函数值最大者作为新的上界 $\bar{Z}$ 。

② 从已符合整数条件的分枝中,找出目标函数值最大者作为新的下界 $\underline{Z}$ 。

步骤五：比较与剪枝。

各分枝的目标函数值中,若有小于 $\underline{Z}$ 者,则剪掉此枝,表明此子问题已经探清,以后不再考虑了;若大于 $\underline{Z}$,且不符合整数条件,则重复第三步。

如此反复进行,直到得到 $\underline{Z} = \mathbf{Z}^* = \overline{Z}$ 为止,即得最优整数解 $\mathbf{X}^*$ 。

例 3.6 用分枝定界法求解下列整数规划问题。

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$(\text{IP}) \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

解：用单纯形法解(IP)对应的松弛问题(LP),最终单纯形表如表 3-4 所示。

表 3-4

c_j			3	2	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
3	x_1	13/4	1	0	3/4	-1/4
2	x_2	5/2	0	1	-1/2	1/2
σ_j			0	0	-5/4	-1/4

由最终单纯形表可知,(LP)最优解为 $x_1 = 13/4, x_2 = 5/2$,最优值为 $59/4$,故上界定义为 $\overline{Z} = Z^{(0)} = 59/4 \approx 14.75$,下界可以定义为 $\underline{Z} = -\infty$ 。

选 x_2 进行分枝,即增加两个约束 $x_2 \leq 2$ 和 $x_2 \geq 3$ 分别放入原整数规划(IP)中,则形成的两个新的分枝问题有

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$(\text{IP}_1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$(\text{IP}_2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

求解(IP₁)和(IP₂)的松弛问题(LP₁)和(LP₂)的过程分别如表 3-5 和表 3-6 所示。

表 3-5

c_j			3	2	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	x_1	13/4	1	0	3/4	-1/4	0
2	x_2	5/2	0	1	-1/2	1/2	0
0	x_5	2	0	1	0	0	1
σ_j			0	0	-5/4	-1/4	0
3	x_1	13/4	1	0	3/4	-1/4	0
2	x_2	5/2	0	1	-1/2	1/2	0
0	x_5	<u>-1/2</u> →	0	0	1/2	-1/2	1
σ_j			0	0	-5/4	-1/4 ↑	0

c_j			3	2	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	x_1	$7/2$	1	0	$1/2$	0	$-1/2$
2	x_2	2	0	1	0	0	1
0	x_4	1	0	0	-1	1	-2
σ_j			0	0	$-3/2$	0	$-1/2$

$$x_1 = 7/2, x_2 = 2, Z^{(1)} = 29/2 = 14.4.$$

表 3-6

c_j			3	2	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6
3	x_1	$13/4$	1	0	$3/4$	$-1/4$	0
2	x_2	$5/2$	0	1	$-1/2$	$1/2$	0
0	x_6	-3	0	-1	0	0	1
σ_j			0	0	$-5/4$	$-1/4$	0
3	x_1	$13/4$	1	0	$3/4$	$-1/4$	0
2	x_2	$5/2$	0	1	$-1/2$	$1/2$	0
0	x_6	$\underline{-1/2} \rightarrow$	0	0	-1/2	$1/2$	1
σ_j			0	0	$-5/4 \uparrow$	$-1/4$	0
3	x_1	$5/2$	1	0	0	$1/2$	$3/2$
2	x_2	3	0	1	0	0	-1
0	x_3	1	0	0	1	-1	-2
σ_j			0	0	0	$-3/2$	$-5/2$

$x_1 = 5/2, x_2 = 3, Z^{(2)} = 27/2 = 13.5$, 因为 $Z^{(2)} < Z^{(1)}$, 所以先不考虑分枝。

此时, 上界定义为 $\bar{Z} = Z^{(1)} = 29/2 = 14.5$, 下界仍然定义为 $\underline{Z} = -\infty$ 。因 (LP_1) 中 x_1 仍然不为整数, 经过 $Z^{(1)}$ 与 $Z^{(2)}$ 比较后, 继续对 (LP_1) 中 x_1 进行分枝, 在 (IP_1) 基础上分别加入约束 $x_1 \geq 4$ 和 $x_1 \leq 3$ 形成两个新分枝 (IP_3) 、 (IP_4) , 有

$$\begin{array}{ll} \max Z = 3x_1 + 2x_2 & \max Z = 3x_1 + 2x_2 \\ (IP_3) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{array} \right. & (IP_4) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{array} \right. \end{array}$$

求解 (IP_3) 、 (IP_4) 松弛问题 (LP_3) 、 (LP_4) 的过程分别如表 3-7 和表 3-8 所示。

表 3-7

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7
3	x_1	7/2	1	0	1/2	0	-1/2	0
2	x_2	2	0	1	0	0	1	0
0	x_4	1	0	0	-1	1	-2	0
0	x_7	3	1	0	0	0	0	1
σ_j			0	0	-3/2	0	-1/2	0
3	x_1	7/2	1	0	1/2	0	-1/2	0
2	x_2	2	0	1	0	0	1	0
0	x_4	1	0	0	-1	1	-2	0
0	x_7	-1/2	0	0	-1/2	0	1/2	1
σ_j			0	0	-3/2↑	0	-1/2	0
3	x_1	3	1	0	0	0	0	1
2	x_2	2	0	1	0	0	1	0
0	x_4	2	0	0	0	1	-3	-2
0	x_3	1	0	0	1	0	-1	-2
σ_j			0	0	0	0	-2	-3

$x_1=3, x_2=2, Z^{(3)}=13$ 。找到整数解,问题已探明,停止计算。

表 3-8

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_8
3	x_1	7/2	1	0	1/2	0	-1/2	0
2	x_2	2	0	1	0	0	1	0
0	x_4	1	0	0	-1	1	-2	0
0	x_8	-4	-1	0	0	0	0	1
σ_j			0	0	-3/2	0	-1/2	0
3	x_1	7/2	1	0	1/2	0	-1/2	0
2	x_2	2	0	1	0	0	1	0
0	x_4	1	0	0	-1	1	-2	0
0	x_8	-1/2	0	0	1/2	0	-1/2	1
σ_j			0	0	-3/2	0	-1/2↑	0
3	x_1	4	1	0	0	0	0	-1
2	x_2	1	0	1	1	0	0	2
0	x_4	3	0	0	-3	1	0	-4
0	x_5	1	0	0	-1	0	1	-2
σ_j			0	0	-2	0	0	-1

$x_1=4, x_2=1, Z^{(4)}=14$ 。找到整数解,问题已探明,停止计算。

此时上界定义为 $\bar{Z}=Z^{(4)}=14$,下界定义为 $\underline{Z}=Z^{(4)}=14, \underline{Z}=Z^*=\bar{Z}=14$ 。

从以上计算可得,原问题的最优解为 $\mathbf{X}^*=(4,1)^T, Z^*=14$ 。整个分枝定界过程如图 3-2

所示。

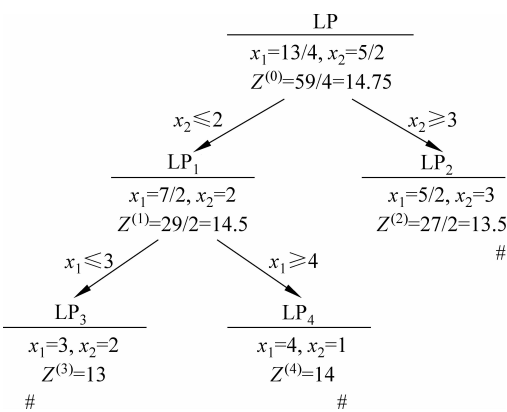


图 3-2

用分枝定界法求解纯整数规划或混合整数规划问题比用穷举法优越,因为它仅在一部分可行解的整数解中寻求最优解,计算量比穷举法小。但是,如果变量数目很大,其计算量也是相当可观的。

2. 割平面法

割平面法是由高莫雷(R. E. Gomory)于 1958 年提出来的,所以又称为 Gomory 的割平面法。其基本思想是放宽变量的整数约束,首先求对应的松弛问题最优解,当某个变量 x_i 不满足整数要求时,寻求一个约束方程并添加到松弛问题中,其作用是切割掉非整数部分,缩小原松弛问题的可行域,最后逼近整数问题的最优解。

例 3.7 求解整数规划问题:

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases} \end{aligned}$$

如果不考虑该问题中的整数约束,则容易求得相应的松弛问题的最优解 $(3/4, 7/4)^T$, 最优目标函数值为 $5/2$ 。它就是图 3-3 中可行域 R 的顶点 A , 但是不符合整数条件。现在设想,如能找到像 CD 那样的直线去切割可行域 R (见图 3-4), 去掉三角形域 ACD , 那么具有整数坐标的 C 点 $(1, 1)$ 就是域 R' 的一个顶点, 如在域 R' 上求解原问题的松弛问题, 而得到的最优解又恰巧在 C 点就得到原问题的整数解, 所以解法的关键就是怎样构造一个这样的“割平面” CD , 尽管它可能不是唯一的, 也可能不是一步就能求到的。

下面仍就本例说明。

在原问题的前两个约束条件中增加非负松弛变量 x_3, x_4 , 使两式变成等式约束:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

不考虑整数要求,用单纯形法求解该松弛问题,表 3-9 和表 3-10 是最终单纯形表。

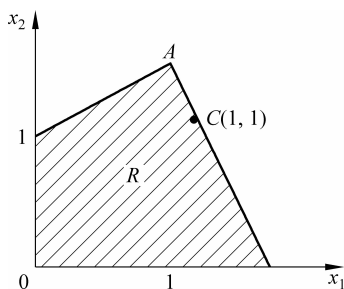


图 3-3

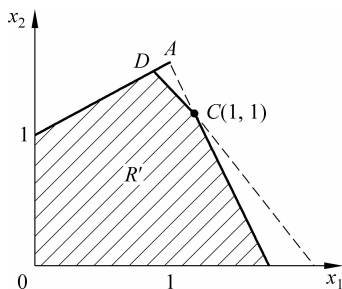


图 3-4

表 3-9

c_j			1	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	1	-1	1	1	0
0	x_4	4	3	1	0	1
σ_j			1	1	0	0

表 3-10

c_j			1	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4
σ_j			0	0	-1/2	-1/2

因此,松弛问题的最优解为 $\mathbf{X}^* = (3/4, 7/4)^T$, $Z^* = 5/2$,但不是整数最优解。由最终单纯形表中可以得到变量间的关系式:

$$x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4} \quad (3-1)$$

$$x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{7}{4} \quad (3-2)$$

将系数和常数项部分都分解成整数和非负真分数之和,移项后以上两式变为

$$x_1 - x_3 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \right)$$

$$x_2 - 1 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \right)$$

在原整数规划问题中,要求变量 x_1, x_2 均为非负整数,于是根据式(3-1)和式(3-2)可知 x_3, x_4 也都是非负整数。在上式中(其实只考虑一个式子即可)从等式左边看是整数;在等式右边的括号内是正数;所以等式右边必是负数。也就是说,整数约束条件可以由下式所代替:

$$\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4\right)\leqslant 0$$

即

$$-3x_3-x_4\leqslant -3$$

这就得到一个切割方程,将其作为增加的约束条件置于原问题中,继续求解。

引入松弛变量 x_5 ,得到等式:

$$-3x_3-x_4+x_5=-3$$

将这个新的约束方程加到表 3-10 中,得到表 3-11。

表 3-11

c_j			1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4	0
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4	0
0	x_5	-3	0	0	-3	-1	1
σ_j			0	0	-1/2	-1/2	0

从表 3-11 中可以看出,这时得到的是非可行解,于是需要用对偶单纯形法继续计算。选择 x_5 为换出变量, x_3 为换入变量,再按照单纯形法进行迭代,得到表 3-12。

表 3-12

c_j			1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	1	1	0	0	1/3	1/12
1	x_2	1	0	1	0	0	1/4
0	x_3	1	0	0	1	-1	-1/3
σ_j			0	0	0	-1/3	-1/6

至此得到最优表,其最优解为 $\boldsymbol{X}^*=(1,1)^T,Z^*=2$,这也是原问题的最优解。

如同分枝定界法一样,割平面法仍然是在线性规划方法基础上进行的,现在将割平面法的求解步骤进行归纳如下。

步骤一：用单纯形法求解整数规划问题(IP)对应的松弛问题(LP)。

① 若(LP)没有可行解,则(IP)也没有可行解,停止计算。

② 若(LP)有最优解,并符合(IP)的整数条件,则(LP)的最优解即为(IP)的最优解,停止计算。

③ 若(LP)有最优解,但不符合(IP)的整数条件,转入下一步。

步骤二：做割平面方程。

从(LP)的最优解中,任选一个不为整数的分量 x_r ,将最优单纯形表中该行的系数 a'_{rj} 和 b'_r 分解为整数部分(小于该数的最大整数)和小数部分之和,并以该行为源行,按下式做割平面方程：

$$f_r - \sum_{j=m+1}^n f_{rj} x_j \leq 0$$

其中, f_r 为 b'_r 的小数部分, f_{rj} 为 a'_{rj} 的小数部分。

步骤三: 将所得的割平面方程作为一个新的约束条件置于最优单纯形表中(同时增加一个单位列向量), 用对偶单纯形法求出新的最优解, 返回步骤一。

由以上解题步骤可知, 割平面方程真正进行了切割, 至少把非整数最优解这一点割掉了; 同时没有割掉整数解, 这是因为相应的线性规划的任意整数可行解都能满足割平面方程的缘故。另外, 在解题的过程中, 表中含有分数元素且算法过程中始终保持对偶可行性, 因此, 这个算法也称为分数对偶割平面算法。

3.1.5 0-1 型整数规划实例

0-1 型整数规划是一种特殊形式的整数规划, 这时的决策变量 x_i 只取两个值 0 或 1, 这个条件可由约束条件

$$\begin{aligned} x_i &\leq 1 \\ x_i &\geq 0, \quad \text{且为整数} \end{aligned}$$

所代替。它和一般整数规划的约束条件是一致的。在实际问题中, 如果引入 0-1 变量, 就可以把有各种情况需要分别讨论的线性规划问题统一在一个问题中讨论了。下面, 首先介绍几个引入 0-1 变量的实际问题, 然后研究 0-1 型整数规划的求解方法。

1. 选址问题

例 3.8 某公司拟在市内 A、B、C 三个区建立销售点。经考察, 有 10 个位置(点) $S_i (i=1, 2, \dots, 10)$ 可以选择。规定在 A 区, 由 $S_1 \sim S_4$ 四个点中至多选两个; 在 B 区, 由 $S_5 \sim S_7$ 三个点中至少选一个; 在 C 区, 由 $S_8 \sim S_{10}$ 三个点中至少选一个。如果选择 S_i 点, 建设投资为 v_i 万元, 每年可获得利润估计为 p_i 万元, 但总投资不能超过 V 万元。问应如何选择可使年利润最大?

解: 在建立该问题的模型时, 引入 0-1 变量 x_i , 令

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{当 } S_i \text{ 点被选用} \\ 0 & \text{当 } S_i \text{ 点未被选用} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

则此问题可用下列模型来表示:

$$\begin{aligned} \max Z &= \sum_{i=1}^{10} p_i x_i \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^{10} v_i x_i &\leq V \\ \sum_{i=1}^4 x_i &\leq 2 \\ \sum_{i=5}^7 x_i &\geq 1 \\ \sum_{i=8}^{10} x_i &\geq 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=8}^{10} x_i \geq 1$$

$$x_i = 0 \text{ 或 } 1, \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

2. 相互排斥的约束条件

如果有 m 个相互排斥的约束条件 ($\leq$ 型) $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$ 。为了保证这 m 个约束条件只有一个起作用, 可以引入 m 个 0-1 决策变量 $y_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 和一个充分的常数 M 。构造下面这一组 $m+1$ 个约束条件

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i + y_i M, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m y_i = m - 1$$

$$y_i = 0 \text{ 或 } 1, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

即可符合上述要求。

例 3.9 在本章例 3.1 中, 工序 A 的每月工时的约束条件为

$$2x_1 + 3x_2 \leq 300$$

现在假设工序 A 还有一种新的加工方式, 相应的每月工时约束变为

$$1.7x_1 + 2.5x_2 \leq 270$$

如果工序 A 只能从两种加工方式中选择一种, 那么, 这两种加工方式就成为两个互相排斥的约束条件。为了统一在一个问题中, 引入 0-1 变量。

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{若工序 A 采用第 } i \text{ 种加工方式} \quad i = 1 \text{ 为原加工方式} \\ 1 & \text{若工序 A 不采用第 } i \text{ 种加工方式} \quad i = 2 \text{ 为新的加工方式} \end{cases}$$

于是, 互相排斥的约束条件可用下列三个约束条件统一起来:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 300 + My_1 \\ 1.7x_1 + 2.5x_2 \leq 270 + My_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

3. 固定费用问题

本章例 3.4 就是一个典型的固定费用问题, 下面再看一个例题。

例 3.10 某服装公司能够生产三种服装: 衬衣、短裤和长裤。每种服装的生产都要求公司具有适当类型的机器。生产每种服装所需的机器将按下列费用租用: 衬衣机器每周 200 元、短裤机器每周 150 元、长裤机器每周 100 元。每种服装的生产还需表 3-13 所示数量的布料和劳动时间, 每种服装的售价和单位可变成本也列在此表中。每周可利用的劳动时间为 150h、布料为 160m^2 。试建立一个可以使该公司每周利润最大的整数规划模型。

表 3-13

服装类型	劳动时间/h	布料/m ²	售价/元	可变成本/元
衬衣	3	4	12	6
短裤	2	3	8	4
长裤	6	4	15	8

解：设 x_i 为第 i 种服装的周产量，

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{生产第 } i \text{ 种服装} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

则该问题的 IP 模型如下。

目标函数：

$$\max z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3$$

约束条件：

(1) 劳动时间约束。

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150$$

(2) 布料约束。

$$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160$$

(3) 保证当 $x_i > 0$ 时, $y_i = 1$, 即生产服装 i , 则必然发生租用机器 i 的费用。

$$x_i \leq My_i, \quad i = 1, 2, 3$$

非负条件：

$$x_i \geq 0 \text{ 且为整数}; y_i = 0 \text{ 或 } 1, \quad i = 1, 2, 3$$

在固定费用问题中, 存在一个同以非零水平执行某项活动有关的费用, 它与该活动的水平无关。因此在例 3. 10 中, 无论在何种水平上生产衬衣 (无论生产多少), 都必须支付 200 元的固定费用来租借衬衣机器。

决策者必须选择在何处安排设施的问题通常是固定费用问题, 决策者必须选择在何处安排各种设施 (如工厂、仓库等), 固定费用通常与建造或使用设施有关。

4. 二选一约束条件

有下列两个约束条件：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \end{aligned}$$

我们希望保证至少满足两个约束条件中的一个约束条件。则可以通过引入一个 0-1 变量和一个正数 M , 下面的两个约束条件则能保证至少满足以上两个约束条件中的一个约束条件。

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq My \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq M(1 - y) \\ y &= 0 \text{ 或 } 1 \end{aligned}$$

通常, M 是一个足够大的正数 (M 必须足够大, 使得 $f \leq M$ 和 $g \leq M$ 对于满足问题中其他约束条件的 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的所有值都成立)。

例 3.11 某汽车公司正考虑生产三种类型的汽车：微型、中型和大型汽车。表 3-14 给出了每种汽车需要的资源以及产生的利润。目前有 6000t 钢材和 60 000h 的劳动时间。要生产一种在经济效益上可行的汽车，这种类型的汽车至少必须生产 1000 辆。试建立一个可以使该公司利润最大的整数规划模型。

表 3-14

	微型	中型	大型
需要的钢材/t	1.5	3	5
需要的劳动时间/h	30	25	40
产生的利润/美元	2000	3000	4000

解：设 x_i 为 i 型汽车的生产数量，则该公司的目标函数为

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

我们知道，如果要生产某种类型的汽车，那么至少必须生产 1000 辆，因此，必有 $x_i \leq 0$ 或 $x_i \geq 1000$ 。

对于微型汽车，必有 $x_1 \leq 0$ 或 $x_1 \geq 1000$ ，即

$$\begin{cases} x_1 \leq M_1 y_1 \\ 1000 - x_1 \leq M_1 (1 - y_1) \\ y_1 = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

为了保证 x_1 和 $1000 - x_1$ 永远不会超过 M_1 ，选择的 M_1 必须足够大，使得 M_1 大于 1000 且 x_1 始终小于 M_1 。生产 $60\,000/30=2000$ 辆微型汽车将使用所有可用的劳动时间（钢材仍然会剩余一部分），所以最多可生产 2000 辆微型汽车。因此，可以选择 $M_1=2000$ 。

同理，对于中型汽车和大型汽车，可以取 $M_2=2000$ 和 $M_3=1200$ 。则该问题的所有约束条件如下：

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x_1 \leq 2000 y_1 \\ 1000 - x_1 \leq 2000 (1 - y_1) \end{cases} \\ &\begin{cases} x_2 \leq 2000 y_2 \\ 1000 - x_2 \leq 2000 (1 - y_2) \end{cases} \\ &\begin{cases} x_3 \leq 1200 y_3 \\ 1000 - x_3 \leq 1200 (1 - y_3) \end{cases} \\ &1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 6000 \\ &30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \leq 60000 \end{aligned}$$

非负约束：

$$\begin{aligned} &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad \text{且为整数} \\ &y_1, y_2, y_3 = 0 \text{ 或 } 1 \end{aligned}$$

* 5. 集合覆盖问题

下例是整数规划中另一类典型和重要问题，它们称为集合覆盖问题。

例 3.12(设施位置集合覆盖问题) 某城市有 6 个行政区，这个城市必须确定在什么地

方修建消防站。在保证至少有一个消防站在每个行政区的 15min(行驶时间)路程内的情况下,该市希望修建的消防站最少。表 3-15 给出了在该市的各行政区之间行驶时所需要的时间(单位: min)。建立一个整数规划模型,告诉该市应当修建多少消防站以及它们所在的位置。

表 3-15

	行政区 1	行政区 2	行政区 3	行政区 4	行政区 5	行政区 6
行政区 1	0	10	20	30	30	20
行政区 2	10	0	25	35	20	10
行政区 3	20	25	0	15	30	20
行政区 4	30	35	15	0	15	25
行政区 5	30	20	30	15	0	14
行政区 6	20	10	20	25	14	0

解：表 3-16 说明了哪些位置可以在 15min 内到达每个行政区。

表 3-16

	行政区 1	行政区 2	行政区 3	行政区 4	行政区 5	行政区 6
在 15 分钟行程内的行政区	1、2	1、2、6	3、4	3、4、5	4、5、6	2、5、6

对在每个行政区来说,该市都必须确定是否在那里修建消防站。假设

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{在区 } i \text{ 修建消防站} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

目标函数：

$$\min Z = \sum_i x_i$$

约束条件：

从表 3-16 可知,行政区 1 和行政区 2 至少需修建 1 个消防站,行政区 1、2、6 三者中至少建 1 个消防站,其他行政区间有类似的约束。因此,有以下的约束条件：

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_6 &\geq 1 \\ x_3 + x_4 &\geq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 &\geq 1 \\ x_4 + x_5 + x_6 &\geq 1 \\ x_2 + x_5 + x_6 &\geq 1 \end{aligned}$$

非负约束：

$$x_i = 0 \text{ 或 } 1, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

在集合覆盖问题中,给定集合(称之为集合 1)中的每个成员必须被某个集合(称之为集合 2)中的一个可接受成员“覆盖”。集合覆盖问题的目标是使覆盖集合 1 中所有成员所需要的集合 2 中的成员数量最少。在例 3.12 中,集合 1 是该城市中的每个行政区,集合 2 是

消防站的集合。行政区 2 中的消防站覆盖行政区 1、2 和 6, 行政区 4 中的消防站覆盖行政区 3、4、5。集合覆盖问题在航空乘务员调度、行政区划、航班调度和车辆行程安排等方面有许多应用。

* 6. 假设 (if-then) 约束条件

在许多应用中将出现下列情况: 我们希望保证, 如果满足约束条件

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$$

那么必须满足约束条件

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

如果没有满足

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$$

那么可以满足也可以不满足

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

简言之, 我们希望保证 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$, 意味着 $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ 。

为了确保这一点, 在表述中加入下列约束条件:

$$-g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq My$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M(1-y)$$

$$y = 0 \text{ 或 } 1$$

通常, M 是一个足够大的正数 (M 必须足够大, 使得 $f \leq M$ 和 $g \leq M$ 对于满足问题中其他约束条件的 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的所有值都成立)。

可以看到, 如果 $f > 0$, 那么只有当 $y = 0$ 时才满足 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M(1-y)$ 。因此, 由 $-g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq My$ 可知 $-g \leq 0$ 或 $g \geq 0$, 这是我们需要结果。因此, 如果 $f > 0$, 那么 $-g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq My$ 和 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M(1-y)$ 将保证 $g \geq 0$ 。

此外, 如果没有满足 $f > 0$, 那么 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M(1-y)$ 允许 $y = 0$ 或 $y = 1$ 。选择 $y = 1$ 将自动满足 $-g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq My$ 。因此, 如果没有满足 $f > 0$, 那么 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的值将没有限制, $g < 0$ 和 $g \geq 0$ 的情况都有可能出现。

例如, 如果所有 x_{ij} 都必须等于 0 或 1, 有以下的限制条件:

$$\text{如果 } x_{11} = 1, \quad \text{那么 } x_{21} = x_{31} = x_{41} = 0$$

则可以把它转化为

$$\text{如果 } x_{11} > 0, \quad \text{那么 } x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 0 \text{ 或 } -x_{21} - x_{31} - x_{41} \geq 0$$

定义 $f = x_{11}$, $g = -x_{21} - x_{31} - x_{41}$, 则可以用下面的约束条件表示原约束:

$$\begin{cases} x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq My \\ x_{11} \leq M(1-y) \\ y = 0 \quad \text{或} \quad 1 \end{cases}$$

由于 f 和 $-g$ 永远都不会超过 3, 所以可以选择 $M = 3$, 然后把下列约束条件添加到原始的模型中即可:

$$\begin{cases} x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 3y \\ x_{11} \leq 3(1-y) \\ y = 0 \quad \text{或} \quad 1 \end{cases}$$

* 7. 整数规划和分段线性函数

分段线性函数不是线性函数,所以人们可能认为不能使用线性规划求解涉及这些函数的最优化问题。但是,利用 0-1 型变量,可以把分段线性函数表示成线性形式。

假设一个分段线性函数 $f(x)$ 有间断点 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 。对于某个 $k(k=1, 2, \dots, n-1)$, 有 $b_k \leq x \leq b_{k+1}$, 因此对于某个数 $z_k(0 \leq z_k \leq 1)$, 可以把 x 记作

$$x = z_k b_k + (1 - z_k) b_{k+1}$$

由于当 $b_k \leq x \leq b_{k+1}$ 时 $f(x)$ 是线性的, 所以可以把 $f(x)$ 写成

$$f(x) = z_k f(b_k) + (1 - z_k) f(b_{k+1})$$

下面介绍利用线性约束条件和 0-1 变量表示分段线性函数的方法。

第一步: 在最优化问题中出现 $f(x)$ 的地方, 用

$$z_1 f(b_1) + z_2 f(b_2) + \dots + z_n f(b_n)$$

代替 $f(x)$ 。

第二步: 在问题中添加下列约束条件:

$$\begin{cases} z_1 \leq y_1 \\ z_2 \leq y_1 + y_2 \\ z_3 \leq y_2 + y_3 \\ \vdots \\ z_{n-1} \leq y_{n-2} + y_{n-1} \\ z_n \leq y_{n-1} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} y_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^n z_i = 1$$

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} z_i b_i$$

$$y_i = 0 \text{ 或 } 1, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$z_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

例 3.13(具有分段线性函数的 IP) Euing 是由公司利用两种石油(石油 1 和石油 2)生产两种汽油(汽油 1 和汽油 2)。每加仑汽油 1 至少必须含有 50% 的石油 1。每加仑汽油 2 至少必须含 60% 的石油 1。每加仑汽油 1 的售价是 12 美分、汽油 2 的售价为 14 美分。目前有 500 加仑石油 1 和 1000 加仑石油 2。可以按下列价格最多购买 1500 加仑石油 1: 第一批 500 加仑, 每加仑 25 美分; 下一批 500 加仑, 每加仑 20 美分; 再下一批 500 加仑, 每加仑 15 美分。表述一个可以使公司利润最大的 IP。

解: 设 x 为石油 1 的购买数量, x_{ij} 为用于生产汽油 j 的石油 i 的数量, 则公司的利润为

$$12(x_{11} + x_{21}) + 14(x_{12} + x_{22}) - c(x)$$

其中,

$$c(x) = \begin{cases} 25x & (0 \leq x \leq 500) \\ 20x + 2500 & (500 \leq x \leq 1000) \\ 15x + 7500 & (1000 \leq x \leq 1500) \end{cases}$$

由于 $c(x)$ 的间断点是 0、500、1000 和 1500，所以可以按下列步骤将其线性化。

第一步：用 $c(x) = z_1 c(0) + z_2 c(500) + z_3 c(1000) + z_4 c(1500)$ 代替 $c(x)$ 。

第二步：添加下列约束条件：

$$\begin{cases} x = 0z_1 + 500z_2 + 1000z_3 + 1500z_4 \\ z_1 \leq y_1 \\ z_2 \leq y_1 + y_2 \\ z_3 \leq y_2 + y_3 \\ z_4 \leq y_3 \\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1, y_2, y_3 = 0 \text{ 或 } 1 \\ z_1, z_2, z_3, z_4 \geq 0 \end{cases}$$

综上，该问题的数学模型如下。

目标函数：

$$\max Z = 12(x_{11} + x_{21}) + 14(x_{12} + x_{22}) - c(x)$$

约束条件：

除了上面第二步所建的约束外，其他的约束条件还有如下。

公司最多可以使用 $x + 500$ 加仑的石油 1: $x_{11} + x_{12} \leq x + 500$ 。

公司最多可以使用 1000 加仑的石油 2: $x_{21} + x_{22} \leq 1000$ 。

汽油 1 至少必须含有 50% 的石油 1: $x_{11} / (x_{11} + x_{21}) \geq 0.5$ 。

汽油 2 至少必须含有 60% 的石油 1: $x_{12} / (x_{12} + x_{22}) \geq 0.6$ 。

如果某模型的目标函数或约束条件中含有非线性函数，可以先将此非线性函数分段线性化，然后采用以上的方法，从而可以将模型变成线性模型。

以上列举了七类引入 0-1 变量的实际问题。在经济管理的实践中，人们经常通过引入 0-1 变量来使问题简化，为解决实际问题提供方便。

3.1.6 0-1 型整数规划的求解方法

将 0-1 型整数规划的变量改为 $0 \leq x_j \leq 1$ 并且为整数，就可以用分枝定界法或割平面法求解。由于 0-1 型整数规划问题的特殊性，用下面的方法求解更简单。

穷举法是人们最容易想到的求解 0-1 型整数规划的一种方法，即检查变量取值为 0 或 1 的每一种组合，比较目标函数值以求得最优解。如两个变量，变量全部的组合解为 (0, 0)，(0, 1)，(1, 0)，(1, 1) 4 个，将 4 种组合代入约束条件得到可行解，然后将可行解代入目标函数求出最优解。这种方法需要检查变量取值的 2^n 个组合，对于变量个数 n 较大时，这几乎是不可能的。因此需要设计一些方法，只检查变量取值的组合的一部分，就能求得问题的最优解。这样的方法称为隐枚举法 (Implicit Enumeration)。

隐枚举法是在穷举法的基础上进行的改进,对于求极大值问题的基本步骤如下。

第一步: 寻找一个初始可行解 X_0 , 得到目标值的下界 Z_0 (最小值问题则为上界)。

第二步: 按照穷举法列出 2^n 个变量取值的组合, 当组合解 X_j 对应的目标函数值 Z_j 小于 Z_0 (max) 时, 则认为不可行; 当 Z_j 大于等于 Z_0 (max) 时, 再检验是否满足约束条件, 得到 0-1 整数规划的可行解。

第三步: 依据 Z_j 的值确定最优解。

这里的下界 Z_0 是可以动态移动的, 当某个 Z_j 大于 Z_0 时则将 Z_j 作为新的下界。

下面通过一个例题来说明隐枚举法的求解过程。

例 3.14 用隐枚举法求解下列 0-1 整数规划问题。

$$\begin{aligned} \max Z = & -3x_1 - 7x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{s. t. } & \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 1 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 + 4x_4 \geq 6 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 \geq 5 \\ x_j = 0, 1 \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \end{aligned}$$

解: (1) 通过观察法得到 $(1, 1, 1, 0)^T$ 是该问题的一个可行解, 对应的目标函数值为 -9 , 则 $Z_0 = -9$ 是该整数规划问题的下界。

(2) 列出变量取值 0 和 1 的组合, 共 $2^4 = 16$ 个, 分别代入约束条件判断是否可行。首先判断约束条件 1 是否满足, 如果满足, 接下来判断其他约束, 否则认为不可行, 计算过程如表 3-17 所示。

(3) 由表 3-17 可知, 该 0-1 整数规划问题的最优解为 $X = (1, 0, 1, 0)^T$, 最优值为 $Z = -2$ 。

选择不同的初始可行解, 计算量会不一样。一般地, 当目标函数求最大值时, 首先考虑目标函数系数最大的变量等于 1; 当目标函数求最小值时, 先考虑目标函数系数最大的变量等于 0。

在表 3-17 的计算过程中, 当目标值等于 -2 时, 将其下界改为 -2 , 后续计算过程中目标函数小于 -2 的可以不必再去比较约束条件, 可以减少计算量。

表 3-17

j	X_j	约束 1	约束 2	约束 3	Z_j	j	X_j	约束 1	约束 2	约束 3	Z_j
1	(0,0,0,0)	×			0	9	(1,0,0,0)	✓	×		-3
2	(0,0,0,1)	×			-1	10	(1,0,0,1)	✓	×		-4
3	(0,0,1,0)	✓	✓	×	1	11	(1,0,1,0)	✓	✓	✓	-2
4	(0,0,1,1)	×			0	12	(1,0,1,1)				-3
5	(0,1,0,0)	×			-7	13	(1,1,0,0)				-10
6	(0,1,0,1)	×			-8	14	(1,1,0,1)				-11
7	(0,1,1,0)	×			-6	15	(1,1,1,0)	✓	✓	✓	-9
8	(0,1,1,1)	×			-7	16	(1,1,1,1)				-10