※专题 3

实数的完备性和一致连续性

一、主要考点

1. 基本概念和定理

(1) 闭区间套定理：设有闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$，若满足

① $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$；

② $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

存在唯一的实数 ξ 属于所有的闭区间(即$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\xi$)，且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$，则称$\{[a_n,b_n]\}$为闭区间套，简称区间套.

(2) 上、下确界.

上确界：设 E 为非空数集，$\exists\beta\in\mathbf{R}$，且

① $\forall x\in E$，有 $x\leqslant\beta$；

② $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in E$，有 $\beta-\varepsilon<x_0$.

则称 β 是 E 的上确界，记为 $\beta=\sup E$；

下确界：设 E 为非空数集，$\exists\alpha\in\mathbf{R}$，且

① $\forall x\in E$，有 $x\geqslant\alpha$；

② $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in E$，有 $x_0<\alpha+\varepsilon$.

则称 α 是 E 的下确界，记为 $\alpha=\inf E$.

(3) 确界定理：非空数集 E 有上界，则 E 有唯一的上确界；非空数集 E 有下界，则 E 有唯一的下确界.

(4) 开覆盖：设 S 为数轴上的点集，H 为开区间的集合(即 H 中每一个元素都是形如(a,b)的开区间). 若 S 中的任何一点都含在 H 中的至少一个开区间内，则称 H 为 S 的一个开覆盖，或简称 H 覆盖 S.

(5) 有限覆盖定理：设 H 为闭区间$[a,b]$的一个(无限)开覆盖，则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖$[a,b]$.

(6) 一致连续性：若 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上一致连续.

(7) 聚点：称 x_0 为 E 的一个聚点，如果 x_0 的任何邻域$\cup(x_0,\varepsilon)$都含有 E 的无限个点.

2. 一致连续性的判断

为了便于记忆，我们把函数的连续、一致连续和非一致连续对比如下.

(1) 连续：$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x: |x-a|<\delta$,有$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$,则 $f(x)$在点 a 连续.

(2) 一致连续：$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x_1, x_2 \in I: |x_1-x_2|<\delta$,有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$,则 $f(x)$在 I 上一致连续.

(3) 非一致连续：$\exists \varepsilon_0>0, \forall \delta>0, \exists x_1, x_2 \in I: |x_1-x_2|<\delta$,有$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant \varepsilon_0$,则 $f(x)$在 I 上非一致连续.

记忆窍门：①一致连续与非一致连续中的$\forall$和$\exists$刚好对调.

② 证明一致连续的关键是找到 δ,证明过程照搬定义即可,证明非一致连续的关键是找到 x_1 和 x_2(这个是难点),其次是找到 ε_0,证明过程也可以照搬定义.

二、应用举例

1. 闭区间套定理

例 3.1 判别下列闭区间列哪些是区间套,哪些不是.

(1) $\left\{\left[1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{2n}\right]\right\}$;　　(2) $\left\{\left[1-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{2n}\right]\right\}$;

(3) $\left\{\left[2-\frac{1}{n^2}, 2+\frac{1}{n^2}\right]\right\}$;　　(4) $\left\{\left[0, \frac{1}{n}\right]\right\}$;

(5) $\left\{\left[\frac{2n-1}{2n}, \frac{3n+1}{3n}\right]\right\}$;　　(6) $\left\{\left[1+\frac{1}{3n}, 1+\frac{1}{2n}\right]\right\}$.

解 是区间套的有(1)、(3)、(4)、(5);不是区间套的有(2)、(6).

2. 上、下确界

提问：E 的上、下确界是否是 E 的最大、最小值？答：不一定.

例 3.2 求以下数集 E 的上、下确界.

(1) $E=\{x \mid x^2<3\}$.

(2) $E=\{x \mid x=n!, n\in \mathbf{N}^+\}$.

(3) $E=\left\{x \mid x=1-\frac{1}{3^n}, n\in \mathbf{N}^+\right\}$.

(4) $E=\left\{x \mid x=\frac{(-1)^n}{n+1}, n\in \mathbf{N}^+\right\}$.

(5) $E=\{x \mid x$ 为$(0,1)$内的无理数$\}$.

(6) $E=\left\{x \mid x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n\in \mathbf{N}^+\right\}$.

(7) $E=\left\{x \mid x=n\sin\frac{n\pi}{4}, n\in \mathbf{N}^+\right\}$.

解 (1) 因为 $E=\{x \mid x^2<3\}=(-\sqrt{3},\sqrt{3})$,故 $\sup E=\sqrt{3}, \inf E=-\sqrt{3}$.

注意：此题中的 E 没有最大值和最小值,若将 E 改为 $E=\{x \mid x^2\leqslant 3\}$,则上确界和最大值都为$\sqrt{3}$,下确界和最小值都为$-\sqrt{3}$.

(2) 因为 $E=\{x \mid x=n!, n\in \mathbf{N}^+\}=\{1, 2!, 3!, \cdots, n!, \cdots\}$,故 $\inf E=1, \sup E=+\infty$.

(3) 此题中，x 随 n 的增大而单调递增，所以 $n=1$ 时，$x=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 为下确界，当 $n\to\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=1$ 为上确界. 故 $\sup E=1$，$\inf E=\frac{2}{3}$.

注意：此题中的 E 存在最小值为 $\frac{2}{3}$，但无最大值.

(4) 方法 1，把 E 的前几项写出来：$-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},-\frac{1}{6},\frac{1}{7},\cdots$，可以观察得出：$\sup E=\frac{1}{3}$，$\inf E=-\frac{1}{2}$.

方法 2，因为 $\left|(-1)^n\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}$ 为单调递减(当 $n\to\infty$ 时)，由 $(-1)^n$ 知，上、下确界出现在前两项. 故第一项为 $-\frac{1}{2}$ 是下确界，第二项为 $\frac{1}{3}$ 是上确界.

(5) 根据实数的稠密性知：$\sup E=1$，$\inf E=0$.

(6) 由于当 $n\to\infty$ 时，$x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 为单调递增，所以当 $n=1$ 时，x 为下确界，$\inf E=2$；$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 为上确界，$\sup E=\mathrm{e}$.

此处给出 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 当 $x>0$ 时为单调递增函数的证明.

首先用对数函数求导法可以求出 $f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]$，易知 $f'(x)$ 的符号由 $\varphi(x)=\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]$ 确定.

当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)=\frac{-1}{x(1+x)}+\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{-1}{x(1+x^2)}<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调下降.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]=0$，当 $x>0$ 时，$\varphi(x)>0$，于是 $f'(x)>0$. 故当 $x>0$ 时，$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 单调递增.

(7) $\inf E=-\infty$，$\sup E=+\infty$.

3. 聚点

例 3.3　求以下数集 E 的聚点.

(1) 若 $E=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbf{N}^+\right\}$，则聚点为点 0.

(2) 若 $E=\{$开区间 (a,b) 内的一切无理数点$\}$，则闭区间 $[a,b]$ 的每一点都是 E 的聚点.

(3) 若 $E=\mathbf{N}^+$，则 E 没有聚点.

(4) 若 $E=\{y\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，则 E 的所有聚点的集合为 $[0,+\infty)$.

(5) 若 $E=\left\{(-1)^n\frac{1}{2^n}\middle|n\in\mathbf{N}^+\right\}$,则 E 有唯一的聚点 $\xi=0$.

(6) 若 $E=\left\{(-1)^n+\frac{1}{2^n}\middle|n\in\mathbf{N}^+\right\}$,则 E 有两个聚点 $\xi_1=-1$ 和 $\xi_2=1$.

(7) 若 $E=\left\{\frac{(-1)^n}{n+1}\middle|n\in\mathbf{N}^+\right\}$,则 E 有唯一的聚点 $\xi=0$.

4. 开覆盖

例 3.4 设 $S=(0,1)$,$H=\left\{\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},1\right)\right\}$,问 H 能否覆盖 S?

解 显然,点$\frac{1}{2}$不能被 H 覆盖,故 H 不能覆盖 S.

例 3.5 设 $S=(0,1)$,$H=\left\{\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{3},1\right)\right\}$,问 H 能否覆盖 S?

解 画数轴可知,H 能覆盖 S.

例 3.6 设 $S=(0,1)$,$H=\left\{\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)\middle|n=1,2,3,\cdots\right\}$,问 H 能否覆盖 S?

解 因为 $H=\left\{\left(\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right),\cdots\right\}$,由数轴观察知,点$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,…没有被覆盖,故 H 不能覆盖 S.

例 3.7 设 $S=(0,1)$,$H=\left\{\left(\frac{1}{n+1},1\right)\middle|n=1,2,3,\cdots\right\}$,问 H 能否覆盖 S? 如果能,是有限覆盖还是无限覆盖?

解 因为 $H=\left\{\left(\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{1}{3},1\right),\left(\frac{1}{4},1\right),\left(\frac{1}{5},1\right),\cdots\right\}$,由数轴观察知,$H$ 能覆盖 S,且需要 H 中的所有开区间来覆盖,故为无限覆盖.

例 3.8 设 S 为闭区间$[0,1]$,$H=\left\{\left(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}\right)\middle|n=1,2,3,\cdots\right\}$,问 H 能否覆盖 S? 若将 S 改为 $S=\left(\frac{1}{100},1\right)$,$H$ 能否覆盖 S? 若能,是有限覆盖还是无限覆盖?

解 ① 因为 $S=[0,1]$包含了 0 和 1,而这两个点是不能被 H 覆盖的,故 H 不能覆盖 S.

② 若将 S 改为 $S=\left(\frac{1}{100},1\right)$,而 $H=\left\{\left(\frac{1}{3},1\right),\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right),\cdots,\left(\frac{1}{100},\frac{1}{98}\right),\cdots\right\}$,观察知,$H$ 的前 98 个开区间即可把 S 覆盖,故为有限覆盖.

5. 一致连续性

例 3.9 证明 $f(x)=x+\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续.

证 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}$,$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$,当$|x_1-x_2|<\delta$时,有$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2+\sin x_1-\sin x_2|\leqslant2|x_1-x_2|<\varepsilon$. $\left(\text{由 }2|x_1-x_2|<\varepsilon\text{,即}|x_1-x_2|<\frac{\varepsilon}{2}\text{知,取 }\delta=\frac{\varepsilon}{2}\right)$故 $f(x)$

在 **R** 上一致连续.

解题窍门：对 $|f(x_1)-f(x_2)|$ 进行放大时，最后必须出现 $|x_1-x_2|$，这样才能求出 δ.

$|\sin x_1-\sin x_2|\leqslant|x_1-x_2|$ 的原因为

$$|\sin x_1-\sin x_2|=\left|2\sin\frac{x_1-x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|$$
$$=|x_1-x_2|$$

这里还用到了一个知识点：当 $x\geqslant 0$ 时，$x\geqslant\sin x$.

例 3.10　证明 $f(x)=\sin\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

证　分为两个区间考虑.

在 $[1,+\infty)$ 上，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=2\varepsilon$，$\forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|\sin\sqrt{x_1}-\sin\sqrt{x_2}|\leqslant|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\left|\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}|x_1-x_2|<\varepsilon$，由 $\dfrac{1}{2}|x_1-x_2|<\varepsilon$，即 $|x_1-x_2|<2\varepsilon$ 知，取 $\delta=2\varepsilon$，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

又因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续.

综上，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

例 3.11　证明 $f(x)=\sin x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致连续.

证　$\exists\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，$\forall\delta>0$，取 $x_1=\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，$x_2=\sqrt{n\pi}$，使得 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，$\left(n>\dfrac{\pi}{16\delta^2}\right)$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|=1>\varepsilon_0$，$\left(\varepsilon_0\text{ 还可以取 }\varepsilon_0=\dfrac{1}{3},\varepsilon_0=\dfrac{1}{4}\text{ 等}\right)$故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致连续.

三、往年专升本试题汇总

1. 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上非一致连续.

证　$\exists\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}>0$，$\forall\delta>0$，$\exists\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\in(0,1)$ 满足 $\left|\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}\right|=\dfrac{1}{n(n+1)}<\dfrac{1}{n^2}<\delta$，$\left(n>\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}\right)$，但 $\left|f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)-f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|=n+1-n=1>\dfrac{1}{2}=\varepsilon_0$. 按定义知 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上非一致连续.

2. 若将第 1 题中的 $f(x)$ 改为 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$，那么该怎么证明呢？

证　$\exists\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，$\forall\delta>0$，$\exists x_1=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，$x_2=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\in(0,1)$，满足 $|x_1-x_2|=\left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right|=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}<\dfrac{1}{n}<\delta\left(\text{取 }n>\dfrac{1}{\delta}\right)$，但 $|f(x_1)-f(x_2)|=\left|f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)-f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right|=1>\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 内非一致

连续.

3. 若将第 1 题中的 $f(x)$ 改为 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，则 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ 在 $(0,1)$ 上一致连续吗?

解 显然，$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续. 所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致连续.

4. 若将第 1 题中的 $f(x)$ 改为 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$，请问 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ 在 $(0,1)$ 上一致连续吗?

证 $\exists \varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，$\forall \delta>0$，$\exists x_1=\sqrt{-\dfrac{1}{n}+1}$，$x_2=\sqrt{-\dfrac{1}{n+1}+1}\in(0,1)$，满足 $|x_1-x_2|=$
$$\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}=\frac{\dfrac{1}{n(n+1)}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n+1}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}<\frac{1}{n}<\delta\left(\text{取 } n>\frac{1}{\delta}\right)$$
，但 $|f(x_1)-f(x_2)|=1>\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续.

若将第 4 题中的区间改为 $(1,2)$ 时，则取 $x_1=\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$，$x_2=\sqrt{1+\dfrac{1}{n+1}}$.

注意：在证明非一致连续中，寻找 x_1 和 x_2 时，原则是 x_1 和 x_2 应靠近其间断点，且 $|x_1-x_2|\to 0$(当 $x\to\infty$ 时)，如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 中取 x_1、x_2 分别等于 $\dfrac{1}{n}$ 和 $\dfrac{1}{n+1}$，则 x_1，x_2 趋向于其间断点 $x=0$，且 $|x_1-x_2|\to 0$(当 $n\to\infty$ 时)，同样，如第 4 题 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ 中，取 x_1 和 x_2 应靠近其间断点 $x=1$，且 $|x_1-x_2|\to 0$(当 $n\to\infty$ 时). 另外一个原则是要找到 x_1 和 x_2 使得 $|f(x_1)-f(x_2)|$ 等于一个常数.

※习 题 3

1. 数集 $\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$ 的两个聚点为________.

2. 有限数集有聚点吗? ________.

3. 闭区间 $[a,b]$ 的全体聚点的集合是________.

4. 已知 $a_n=\dfrac{n^2}{2^n}$，则 $\sup\{a_n\}=$ ________，$\inf\{a_n\}=$ ________，$\{a_n\}$ 的聚点为________.

5. 设 $H=\left\{\left(\dfrac{1}{n+2},\dfrac{1}{n}\right)\middle| n=1,2,\cdots\right\}$. 问：

(1) H 能否覆盖 $(0,1)$?

(2) 能否从 H 中选出有限个开区间覆盖① $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$；② $\left(\dfrac{1}{100},1\right)$?

6．设 f 定义在(a,b)上．证明：若对(a,b)内任一收敛数列$\{x_n\}$，极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$都存在，则 f 在(a,b)上一致连续．

7．求证下列函数在指定区间上一致连续：

（1）$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$(0<a\leqslant x<+\infty)$；　（2）$f(x)=\sqrt[3]{x}(x\geqslant 0)$．

8．求证下列函数在指定区间上不一致连续：

（1）$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}(0<x<1)$；　（2）$f(x)=\ln x(x>0)$．

习题 3 答案

1．$\xi_1=-1$；$\xi_2=1$．　2．没有．　3．$[a,b]$．　4．9/8；0；0．

5．(1)能；(2)①不能，②能．

6．假设 f 在(a,b)上不一致连续，则$\exists\varepsilon_0>0$，对$\delta>0$，总存在 x'，$x''\in(a,b)$，尽管$|x'-x''|<\delta$，但有$|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$．

令$\delta=\dfrac{1}{n}$，与它相应的两点记为 x_n'，$x_n''\in(a,b)$，尽管$|x_n'-x_n''|<\delta$，但有

$$|f(x_n')-f(x_n'')|\geqslant\varepsilon_0 \tag{1}$$

当 n 取遍所有正整数时，得数列$\{x_n'\}$，$\{x_n''\}\subset(a,b)$，由致密性定理，存在$\{x_n'\}$的收敛子列$\{x_{n_k}'\}$，设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}'=x_0$．又

$$|x_{n_k}'-x_{n_k}''|<\frac{1}{n_k}\Rightarrow|x_{n_k}''-x_0|\leqslant|x_{n_k}'-x_{n_k}''|+|x_{n_k}'-x_0|\to 0(k\to\infty)$$

即$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}''=x_0$．由(1)式有$|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|\geqslant\varepsilon_0$，令 $k\to\infty$，得

$$0=|\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}')-\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}'')|\geqslant\varepsilon_0$$

这与 $\varepsilon_0>0$ 相矛盾．所以 f 在(a,b)上一致连续．

7．(1) $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=a^2\varepsilon$，则当$|x_1-x_2|<a^2\varepsilon$ 时，有

$$\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=\left|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right|\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{a^2}<\varepsilon\quad(\forall x_1,x_2\geqslant a)$$

即得 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在$[a,+\infty)$上一致连续．

(2) 设 $x_2>x_1\geqslant 0$，则有

$$\sqrt[3]{x_2}=\sqrt[3]{(x_2-x_1)+x_1}\leqslant\sqrt[3]{x_2-x_1}+\sqrt[3]{x_1}$$

即有　$\sqrt[3]{x_2}-\sqrt[3]{x_1}\leqslant\sqrt[3]{x_2-x_1}$．于是，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon^3>0$，对$\forall x_1,x_2\geqslant 0$，当$|x_2-x_1|<\delta$ 时，有$|\sqrt[3]{x_2}-\sqrt[3]{x_1}|\leqslant\sqrt[3]{|x_2-x_1|}<\varepsilon$，即得 $f(x)$在 $x\geqslant 0$ 上一致连续．

8．(1) 取 $x_n'=\dfrac{1}{2n\pi}$，$x_n''=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}(n=1,2,\cdots)$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n''-x_n')=0$．而$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n'')-f(x_n'))=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$．于是 $f(x)$在$(0,1)$上不一致连续．

(2) 取 $x_n''=\mathrm{e}^{-n}$，$x_n'=\mathrm{e}^{-(n+1)}(n=1,2,\cdots)$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n''-x_n')=0$，而$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n'')-f(x_n')]=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$．由此推出 $f(x)$在$(0,+\infty)$上不一致连续．