第3章 灵敏度分析

在以前的讨论中,假定模型中的各系数(参数)均为常数,但实践中这些系数往往是估计或预测出来的。例如,市场条件发生变化则目标函数中的价值系数 c_j 就会发生变化,而 a_{ij} 往往会因工艺条件发生变化而改变,b_i 是根据资源投入后的经济效果决定的一种决策选择。因此,在实际应用中往往会提出这样的问题:当这些系数有一个或几个发生变化时,已求得的线性规划问题的最优解会有怎样的变化,或者这些系数在什么范围内变化时,线性规划问题的最优解或最优基不变?

当这些系数发生变化时当然可以用单纯形表从头计算,但这样做很麻烦,而且没有必要。因为单纯形法迭代时,每次运算都和基变量的系数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有关,所以可以把发生变化的个别系数经一定计算后直接填入最终单纯形表中,并进行检验和分析,可按表 3-1 中的几种情况进行处理。

表 3-1

原问题	对偶问题	结论或继续计算的步骤
可行解	可行解	表中的解仍为最优解
可行解	非可行解	用单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	可行解	用对偶单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	非可行解	引入人工变量,编制新的单纯形表,求最优解

3.1 基础知识

1. 价值系数 c_k 的变化分析

考虑检验数 $\sigma_k = c_k - \sum_{i=1}^{m} c_{r_i} a_{r_i k}$。可以分别就 c_k 是对应的非基变量和基变量两种情况来讨论。

1) 若 c_k 是非基变量的系数

设 c_k 变化为 $c_k+\Delta c_k$,这时它在最终单纯形表中对应的检验数为

$$\sigma'_k = (c_k + \Delta c_k) - \sum_{i=1}^{m} c_{r_i} a_{r_i k} = \sigma_k + \Delta c_k$$

只要 $\sigma'_k \leqslant 0$,即 $\Delta c_k \leqslant -\sigma_k$,则最优解不变;否则,将最终单纯形表中的检验数 σ_k 用 σ'_k 取代,继续单纯形法的表格计算。

2) 若 c_s 是基变量的系数

设 c_s 变化为 $c_s+\Delta c$,那么

$$\sigma'_j = c_j - \sum_{r_i \neq s} c_{r_i} a_{r_i j} - (c_s + \Delta c_s) a_{sj} = \sigma_j - \Delta c_s a_{sj}$$

若要求原最优解保持不变，则必须满足 $\sigma_j' \leqslant 0$，即当 $a_{sj} < 0$ 时，$\Delta c_s \leqslant \sigma_j / a_{sj}$；当 $a_{sj} > 0$ 时，$\Delta c_s \geqslant \sigma_j / a_{sj}$，$\forall j$。所以，$\Delta c_s$ 的可变化范围是

$$\max_j\{\sigma_j / a_{sj} \mid a_{sj} > 0\} \leqslant \Delta c_s \leqslant \min_j\{\sigma_j / a_{sj} \mid a_{sj} < 0\}$$

2. 右端项 *b* 的变化分析

设分量 b_r 变化为 $b_r + \Delta b_r$，并假设规划问题的其他系数都保持不变，根据前面的讨论，此时最优解的基变量由 $\boldsymbol{X_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 变化为 $\boldsymbol{X}_B' = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{X_B} + \boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{b}$，其中 $\Delta b = (0, \cdots, \Delta b_r, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$。只要 $\boldsymbol{X}_B' \geqslant 0$，则最优基不变，即基变量保持，只有值的变化；否则，需要利用对偶单纯形法继续计算。

3. 增加一个变量

增加变量 x_{n+1}，则有相应的 $\boldsymbol{P}_{n+1}$、c_{n+1}。那么，计算出

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_{n+1}, \quad \sigma_{n+1} = c_{n+1} - \sum_{i=1}^{m} c_{r_i} a_{r_i, n+1}$$

将它们填入最优单纯形表，若 $\sigma_{n+1} \leqslant 0$，则最优解不变；否则，进一步用单纯形法求解。

4. 增加一个约束条件

增加一个约束之后，应把最优解带入新的约束，若满足则最优解不变，否则填入最优单纯形表作为新的一行，引入一个新的非负变量(原约束若是小于等于形式可引入非负松弛变量，否则引入非负人工变量)，并通过矩阵行变换把对应基变量的元素变为 0，进一步用单纯形法或对偶单纯形法求解。

5. 灵敏度分析

LINGO 软件提供了一个专门用来进行灵敏度分析的命令，用该命令产生当前模型的灵敏度分析报告：研究当目标函数的价值系数和约束右端项在什么范围内变化(此时假定其他系数不变)时，最优基保持不变。

灵敏度分析是在求解模型时做出的，因此在求解模型时灵敏度分析应是处于激活状态，但是默认是不激活的。激活灵敏度分析的步骤如下。

(1) 从 LINGO 软件的主窗口运行 LINGO|Options，如图 3-1 所示。

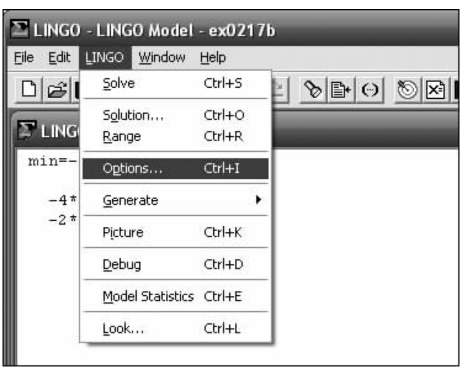

图 3-1

（2）选择 General Solver 选项卡。

（3）在 Dual Computations 下拉列表框中，选择 Prices and Ranges 选项，如图 3-2 所示。

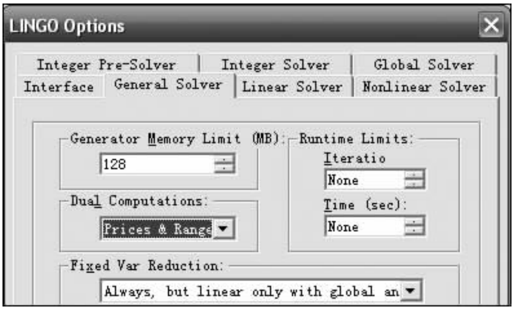

图 3-2

灵敏度分析耗费相当多的求解时间，因此当速度很关键时，就没有必要激活它。

3.2 上机实践

1. 实践目的

掌握用 LINGO 进行灵敏度分析的方法。

2. 实践要求

（1）要求能够用 LINGO 软件进行灵敏度分析。

（2）能够运用灵敏度分析的结果对一些简单的问题进行经济分析。

3. 需用仪器设备

PC 586 上以计算机、Windows 环境、LINGO 软件。

4. 实践步骤

（1）开机进入 Microsoft Windows。

（2）启动 LINGO，进入默认的模型窗口。

（3）按实践内容的要求，利用 LINGO 软件求解以下模型或实际问题。

（4）求解案例 1。

（5）在选做题 1～3 中任选一题，完成建模、求解及灵敏度分析全过程。

5. 实践内容

（1）某公司用甲、乙和丙三种资源生产 A、B 和 C 3 种产品，生产数据如表 3-2 所示。

表 3-2

	每件 A 产品	每件 B 产品	每件 C 产品	现有资源总数
甲资源	8	6	1	48
乙资源	4	2	1.5	20
丙资源	2	1.5	0.5	8
成品单价	60	30	20	

若要求 B 产品的生产量不超过 5 件，如何安排 3 种产品的生产可使利润最大？

解：用 x_1、x_2 和 x_3 分别表示 3 种产品的生产量，建立 LP 模型，并输入到 LINGO 程序窗口中。程序清单如下：

激活灵敏度分析并求解此模型。这时，查看报告窗口(Reports Window)，可以看到如下的计算结果。

```
Global optimal solution found at iteration:           3
  Objective value:                                     280.0000
                        Variable          Value        Reduced Cost
                           x1          2.000000         0.000000
                           x2          0.000000         5.000000
                           x3          8.000000         0.000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1         280.0000          1.000000
                              2         24.00000          0.000000
                              3         0.000000          10.00000
                              4         0.000000          10.00000
                              5         5.000000          0.000000
```

结果的第一行表示 3 次迭代后得到全局最优解。第二行表示最优目标值为 280。Value 给出最优解中各变量的值，即 $x_1=2$、$x_2=0$、$x_3=8$。

Reduced Cost 列出最优单纯形表中判别数所在行的变量的系数，表示当变量有微小变动时，目标函数的变化率。其中基变量的 Reduced Cost 值应为 0，对于非基变量 x_j，相应的 Reduced Cost 值表示当某个变量 x_j 增加一个单位时目标函数减少的量(max 型问题)。

本例中，变量 x_2 对应的 Reduced Cost 值为 5，表示当非基变量 x_2 的值从 0 变为 1 时（此时假定其他非基变量保持不变，但为了满足约束条件，基变量显然会发生变化），最优的目标函数值＝280－5＝275。

Slack or Surplus 列给出松弛变量的值：第 1 行松弛变量＝280（模型的第一行表示目标函数，所以第二行对应模型的第一个约束条件）；第 2～5 行的松弛变量值分别为 24、0、0 和 5。

Dual Price（对偶价格）列表示当对应约束有微小变动时，目标函数的变化率。输出结果中对应于每一个约束有一个对偶价格。若其数值为 p，表示对应约束中不等式右端项若增加 1 个单位，目标函数将增加 p 个单位（max 型问题）。显然，如果在最优解处约束正好取等号（也就是“紧约束”，也称为有效约束或起作用约束），对偶价格值才可能不是 0。本例中，第 3 行和第 4 行是紧约束，对应的对偶价格值为 10，表示当紧约束

3）$4x_1+2x_2+1.5x_3\leqslant 20$

变为 3）$4x_1+2x_2+1.5x_3\leqslant 21$

时，目标函数值＝280＋10＝290。对第 4 行也类似。

对于非紧约束（如本例中第 2 行和第 5 行是非紧约束），Dual Price 的值为 0，表示对应约束中不等式右端项的微小扰动不影响目标函数。

灵敏度分析的结果为

```
Ranges in which the basis is unchanged:
                          Objective Coefficient Ranges
                           Current         Allowable        Allowable
         Variable        Coefficient        Increase          Decrease
            x1          60.00000         20.00000         4.000000
            x2          30.00000         5.000000         INFINITY
            x3          20.00000         2.500000         5.000000
                             Righthand Side Ranges
              Row            Current          Allowable          Allowable
                               RHS            Increase           Decrease
               2          48.00000          INFINITY          24.00000
               3          20.00000          4.000000          4.000000
               4          8.000000          2.000000          1.333333
               5          5.000000          INFINITY          5.000000
```

目标函数中 x_1 变量原来的费用系数为 60，允许增加（Allowable Increase）20、允许减少（Allowable Decrease）4，说明当变量 x_1 的费用系数在［60－4，60＋20］＝［56，80］范围变化时，最优基保持不变。对 x_2、x_3 变量，可以类似解释。由于此时约束没有变化（只是目标函数中某个费用系数发生变化），所以最优基保持不变的意思也就是最优解不变（当然，由于目标函数中费用系数发生了变化，所以最优值会变化）。

第 2 行（对应于模型的第 1 个约束条件）中右端项（Right Hand Side，RHS）原来为 48，当它在［48－24，48＋∞）＝［24，∞）范围变化时，最优基保持不变。第 3～5 行可以类似解释。不过由于此时约束发生变化，最优基即使不变，最优解、最优值也会发生变化。

灵敏度分析结果表示的是最优基保持不变的系数范围。当然，也可以通过灵敏度分析结果进一步确定当目标函数的费用系数和约束右端项发生小的变化时，最优基和最优解、最优值如何变化，在此不再举例说明。

针对以上的求解及灵敏度分析结果，回答下列问题。

① 产品 A 的单价由 60 变为 58 时，公司的总利润为________。

② 若现有的甲资源只有 30 个单位，则产品 A、B、C 的生产量分别是多少？公司的总利润是多少？

③ 产品 A 的单价由 60 变为 50 时，修改原 LINGO 程序，运行后的结果如下（手写或将打印的结果粘贴在此处，仅写出目标函数值和决策变量值即可）：

④ 丙资源的总数由 8 变为 6，修改原 LINGO 程序，重新运算后输出的灵敏度分析信息如下（手写或将打印的结果粘贴在此处）：

(2) 某公司准备以甲、乙、丙 3 种原料生产 A、B、C、D、E 5 种型号的产品，每一单位产品对各原料的消耗系数及价格系数等已知条件如表 3-3 所示。

表　3-3

产品 原料	A	B	C	D	E	资源限量
甲	1	2	3	3	0	600
乙	4	3	2	1	1	400
丙	1	3	0	1	3	500
单位产品价格	8	4	6	3	9	

① 为解决“在现有原料量限制下，如何安排 A、B、C、D、E 5 种产品的产量，使总销售收入最大”这一问题，可用一线性规划模型，令 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 依次表示各型号产品的计划产量，则模型如下(记为模型 I)：

② 求解以上模型的 LINGO 程序清单如下(手写或将打印的结果粘贴在此处)：

③ 激活灵敏度分析并求解此模型，计算机输出的结果如下(手写或将打印的结果粘贴在此处，仅写出目标函数值和决策变量的值即可)：

④ 查看报告窗口(Reports Window),即通过单击菜单项 LINGO→Range 可以看到如下的计算结果(手写或将打印的结果粘贴在此处,即写出灵敏度分析信息):

⑤ 根据以上的计算结果可知,该问题的最优生产方案是 A 产品的产量为________,B 产品的产量为________,C 产品的产量为________,D 产品的产量为________,E 产品的产量为________,总销售收入为________。

按此方案生产,现有的甲、乙、丙 3 种原料中,还有剩余的原料是________,剩余量为________。

产品 C 的价格在________范围内波动时,原生产方案不变。

资源乙的数量在________范围内变化时,原问题的最优基保持不变。

⑥ 模型 I 的对偶问题模型为

从原问题的计算结果可以看出,对偶问题的最优解为________,最优目标函数值为________。

案例：某公司生产 3 种产品 A1、A2、A3，它们在 B1、B2 两种设备上加工，并耗用 C1、C2 两种原材料，已知生产单位产品耗用的工时和原材料以及设备和原材料的每天最多可使用量如表 3-4 所示。

表 3-4

资　源	产品 A1	产品 A2	产品 A3	每天最多可使用量
设备 B1（min）	1	2	1	430
设备 B2（min）	3	0	2	460
原料 C1（kg）	1	4	0	420
原料 C2（kg）	1	1	1	300
每件利润（元）	30	20	50	

已知每天对产品 A2 的需求不低于 70 件，对 A3 不超过 240 件。经理会议讨论如何增加公司收入，提出了以下建议。

① 产品 A3 提价，使每件利润增至 60 元，但市场销量将下降为每天不超过 210 件。

② 原材料 C2 是限制产量增加的因素之一，如果通过别的供应商提供补充，每千克价格将比原供应商高 20 元。

③ 设备 B1 和 B2 每天可各增加 40min 的使用时间，但需相应支付额外费用各 350 元。

④ 产品 A2 的需求增加到每天 100 件。

⑤ 产品 A1 在设备 B2 上的加工时间可缩短到每件 2min，但每天需额外支出 40 元。

分别讨论上述各条建议的可行性，哪些可直接利用“灵敏度分析报告”中的信息，哪些需要重新规划求解？

解：假设 3 种产品 A1、A2、A3 每天产量为 x_1、x_2、x_3 件，则原问题的线性规划模型为

$$\max Z = 30x_1 + 20x_2 + 50x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 430 & (1) \\ 3x_1 + 2x_3 \leqslant 460 & (2) \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 420 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 300 & (4) \\ x_2 \geqslant 70 & (5) \\ x_3 \leqslant 240 & (6) \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 & (7) \end{cases}$$

求解以上模型的 LINGO 程序清单如下(手写或将打印的结果粘贴在此处)：

运行结果如下(手写或将打印的结果粘贴在此处,仅保留目标函数和决策变量的值):

从结果可以看出,产品 A1 每天生产________件,产品 A2 每天生产________件,产品 A3 每天生产________件,每天的总利润为________。

灵敏度分析的结果如下(手写或将打印的结果粘贴在此处):

① 若产品 A3 提价,使每件利润增至 60 元,但市场销量将下降为每天不超过 210 件,可将目标函数修改为________。

约束条件(6)修改为________。

其他约束条件不变。重新计算可得:$z^* =$________,$x^* =$________。

因此,此建议________(可以/不宜)采纳。

② 从计算结果中可以看出,原材料 C2 的对偶价格为________,所以 C2 每千克价格将比原供应商高 20 元的时候,公司的利润将________(增加/减少/不变)。因此此建议________(可以采用/不予采用)。

③ 设备 B1 的对偶价格为________,使用时间在________范围内变化时最优基保持不变,所以增加设备 B1 的时间 40min ________(会/不会)给公司带来利润;对于设备 B2,对偶价格为________,使用时间的变化范围为________,所以设备 B2 的使用时间增加 40min 公司的利润变化不能通过灵敏度分析得出公司的最后利润,经计算得到,设备 B2 的使用时间增加 40min,公司所获得的利润为________,所以不能增加公司的总利润,该条建议不宜采纳。

④ 若产品 A2 的需求增加到每天 100 件,则可将约束条件(5)修改为________,其他均不改变,重新计算可得:$z^* =$________,$x^* =$________。所以此建议________(可以/不宜)采纳。

⑤ 若产品 A1 在设备 B2 上的加工时间可缩短到每件 2min,则可将原模型中的约束条件(2)修改为________,其他约束及目标函数不变,重新计算可知,最佳的总利润和生产方案

均不变。但由于改变工艺后,每天需额外支出 40 元,因此该建议不宜采纳。

选做题 1:某工厂生产 A1、A2 两种型号的产品都必须经过零件装配和检验两道工序。如果每天可用于零件装配的工时只有 100h,可用于检验的工时只有 120h,各型号产品每件需占用各工序的工时数和可获得的利润如表 3-5 所示。

表 3-5

工序 \ 产品	A1	A2	可用工时(h)
装配	2	3	100
检验	4	2	200
利润(元/件)	1	4	

① 试求获得最大利润的生产计划。

② 对产品 A1 的利润进行灵敏度分析。

③ 对装配工序的工时进行灵敏度分析。

④ 如工厂试制了 A3 型产品,每件 A3 型产品需装配工时 4h,检验工时 2h,可获利润 5 元,那么该产品是否应投入正式生产?

要求:另加附页,将手写或打印的求解过程及结果等粘贴在此处。

选做题 2：一个工厂用 3 种原材料生产 5 种产品，有关数据如表 3-6 所示。

表　3-6

产品 / 原材料	每万件产品所用原材料(斤)					可利用原材料数(斤)
	A	B	C	D	E	
甲	1	2	1	0	1	10
乙	1	0	1	3	2	24
丙	1	2	2	2	3	21
利润(万元/万件)	8	20	10	20	21	

① 试确定最优生产计划，并求 3 种原材料的影子价格，其经济意义是什么？

② 对目标函数的系数 c_1、c_4 进行灵敏度分析。

③ 对约束条件的常数项 b_1、b_2 进行灵敏度分析。

④ 如引进新产品 F，已知生产 F 一个单位(万件)要利用原材料甲、乙、丙分别为 1 斤、2 斤、1 斤，而每单位 F 产品可获利 10 万元，问产品 F 是否有利于投产？它的利润是多少时才有利于投产？

⑤ 如新增加煤耗不许超过 20t 的限制，而生产每单位 A、B、C、D、E 产品需用煤 3t、2t、1t、2t、1t，问：是否需要改变原来的生产计划？

⑥ 若 D 产品对 3 种原材料的消耗由 0、3、2 变化为 0、2.5、1，问：可获利润是多少？

要求：另加附页，将手写或打印的求解过程及结果等粘贴在此处。

选做题 3：某饲料公司生产鸡混合饲料，每千克饲料所需营养质量要求如表 3-7 所示。

表　3-7

营养成分	肉用种鸡国家标准	肉用种鸡公司标准	产蛋鸡标准
代谢能	2.7～2.8Mcal/kg	≥2.7Mcal/kg	≥2.65Mcal/kg
粗蛋白	135～145g/kg	135～145g/kg	≥15g/kg
粗纤维	≤50g/kg	≤45g/kg	≤25g/kg
赖氨酸	≥5.6g/kg	≥5.6g/kg	≥6.8g/kg
蛋氨酸	≥2.5g/kg	≥2.6g/kg	≥6g/kg
钙	23～40g/kg	≥30g/kg	≥33g/kg
有机磷	4.6～6.5g/kg	≥5g/kg	≥3g/kg
食盐	3.7g/kg	3.7g/kg	3g/kg

公司计划使用的原料有玉米、小麦、麦麸、米糠、豆饼、菜籽饼、鱼粉、槐叶粉、DL-蛋氨酸、骨粉、碳酸钙和食盐 12 种。各原料的营养成分含量及价格如表 3-8 所示。

表　3-8

序号	原料	单价 元/kg	代谢能 Mcal/kg	粗蛋白 g/kg	粗纤维 g/kg	赖氨酸 g/kg	蛋氨酸 g/kg	钙 g/kg	有机磷 g/kg	食盐 g/kg
1	玉米	0.68	3.35	78	16	2.3	1.2	0.7	0.3	
2	小麦	0.72	3.08	114	22	3.4	1.7	0.6	0.34	
3	麦麸	0.23	1.78	142	95	6.0	2.3	0.3	10	
4	米糠	0.22	2.10	117	72	6.5	2.7	1.0	13	
5	豆饼	0.37	2.40	402	49	24.1	5.1	3.2	5	
6	菜籽饼	0.32	1.62	360	113	8.1	7.1	5.3	8.4	
7	鱼粉	1.54	2.80	450		29.1	11.8	63	27	
8	槐叶粉	0.38	1.61	170	108	10.6	2.2	4	4	
9	DL-蛋氨酸	23					980			
10	骨粉	0.56						300	140	
11	碳酸钙	1.12						400		
12	食盐	0.42								1000

公司根据原料来源，还要求 1t 混合饲料中原料含量为玉米不低于 400kg，小麦不低于 100kg，麦麸不低于 100kg，米糠不超过 150kg，豆饼不超过 100kg，菜籽饼不低于 30kg，鱼粉不低于 50kg，槐叶粉不低于 30kg，DL-蛋氨酸、骨粉、碳酸钙适量。

① 按照肉用种鸡公司标准，求 1kg 混合饲料中每种原料各配多少，成本最低，建立数学

模型并求解。

② 按照肉用种鸡国家标准，求 1kg 混合饲料中每种原料各配多少，成本最低。

③ 公司采购了一批花生饼，单价是 0.6 元/千克，代谢能到有机磷的含量分别为 2.4、38、120、0、0.92、0.15、0.17，求肉用种鸡成本最低的配料方案。

④ 求产蛋鸡的最优饲料配方方案。

⑤ 公司考虑未来鱼粉、骨粉和碳酸钙将要涨价，米糠将要降价，价格变化率都是原价的 10%，试对两种产品配方方案进行灵敏度分析。

说明：以上 5 个问题独立求解和分析，如在问题③中只加花生饼，其他方案则不加花生饼。

要求：另加附页，将手写或打印的求解过程及结果等粘贴在此处。

第4章 整数规划与运输问题

4.1 基础知识

1. 整数规划的求解方法

按整数规划约束条件，其可行解肯定在线性规划问题的可行域内且为整数点。故整数规划问题的可行解集是一个有限集。因此，可将可行集内的整数点一一找出，比较各点的目标函数值，使得目标函数值取最大值(或最小值)的整数点即为最优解，此法称为**完全枚举法**或**穷举法**。

穷举法对于决策变量很少、约束条件不是很多的整数规划的求解是可用的，但对于大规模整数规划问题是不可取的。目前，应用较为广泛的求解整数规划方法主要有**分枝定界法**和**割平面法**等，对于特别的0-1整数规划问题，一般有**隐枚举法**和**匈牙利法**等。

1) 分枝定界法

分枝定界法是由Land Doig和Dakin等人于20世纪60年代初提出的，可用于解纯整数规划或混合整数规划问题。

分枝定界法的基本思路如下。

(1) 先不考虑整数约束，解(IP)的松弛问题(LP)。

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$(\text{LP})\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0, & (j=1,2,\cdots,m) \end{cases}$$

可能得到以下情况之一。

① 若(LP)没有可行解，则(IP)也没有可行解，停止计算。

② 若(LP)有最优解，并符合(IP)的整数条件，则(LP)的最优解即为(IP)的最优解，停止计算。

③ 若(LP)有最优解，但不符合(IP)的整数条件，转入下一步。

为讨论方便，设(LP)的最优解为

$$\boldsymbol{X}^{(0)} = (b_1', b_2', \cdots, b_r', \cdots, b_m', 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \text{目标函数最优值为 } Z^{(0)},$$

其中，$b_i'(i=1,2,\cdots,m)$不全为整数。

(2) 定界。

记(IP)的目标函数最优值为Z^*，以$Z^{(0)}$作为Z^*的上界，记为$\bar{Z}=Z^{(0)}$。再用观察法找得一个整数可行解X'，并以其相应的目标函数值Z'作为Z^*的下界，记为$\underline{Z}=Z'$，也可以令$\underline{Z}=-\infty$，则有$\underline{Z}\leqslant Z^*\leqslant\bar{Z}$。

(3) 分枝。

在(LP)的最优解 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 中，任选一个不符合整数条件的变量，例如 $x_r=b'_r$(不为整数)，以 $[b'_r]$ 表示不超过 b'_r 的最大整数。构造两个约束条件

$$x_r \leqslant [b'_r] \quad 和 \quad x_r \geqslant [b'_r]+1$$

将这两个约束条件分别加入问题(IP)，形成两个子问题(IP_1)和(IP_2)，再解这两个问题的松弛问题(LP_1)和(LP_2)。

(4) 修改上、下界。

按照以下两条规则进行。

① 在各分枝问题中，找出目标函数值最大者作为新的上界。

② 从已符合整数条件的分枝中，找出目标函数值最大者作为新的下界。

(5) 比较与剪枝。

各分枝的目标函数值中，若有小于 $\underline{Z}$ 者，则剪掉此枝，表明此子问题已经探清，不必再分枝了，否则继续分枝。

如此反复进行，直到得到 $\underline{Z}=Z^*=\overline{Z}$ 为止，即得最优解 X^*。

2) 割平面法

割平面法是 R. E. Gomory 提出来的，所以又称为 Gomory 的割平面法。如同分枝定界法一样，割平面法仍然是在线性规划方法基础上进行的，其计算步骤如下。

(1) 用单纯形法求解(IP)对应的松弛问题(LP)。

① 若(LP)没有可行解，则(IP)也没有可行解，停止计算。

② 若(LP)有最优解，并符合(IP)的整数条件，则(LP)的最优解即为(IP)的最优解，停止计算。

③ 若(LP)有最优解，但不符合(IP)的整数条件，转入下一步。

(2) 做割平面方程。

从(LP)的最优解中，任选一个不为整数的分量 x_r，将最优单纯形表中该行的系数 a'_{rj} 和 b'_r 分解为整数部分(小于该数的最大整数)和小数部分之和，并以该行为源行，按下式做割平面方程：

$$f_r-\sum_{j=m+1}^{n} f_{rj}x_j \leqslant 0$$

其中，f_r 为 b'_r 的小数部分，f_{rj} 为 a'_{rj} 的小数部分。

(3) 将所得的割平面方程作为一个新的约束条件置于最优单纯形表中(同时增加一个单位列向量)，用对偶单纯形法求出新的最优解，返回(1)。

3) 0-1 型整数规划的求解方法

穷举法是人们最容易想到的求解 0-1 型整数规划的一种方法，即检查变量取值为 0 或 1 的每一种组合，比较目标函数值以求得最优解。这种方法需要检查变量取值的 2^n 个组合，对于变量个数 n 较大时，这几乎是不可能的。因此需要设计一些方法，只检查变量取值的组合的一部分，就能求得问题的最优解。这样的方法称为**隐枚举法**(Implicit Enumeration)。

隐枚举法的步骤如下。

第一步：重排 x_i 的顺序。当问题是求极大值时，使目标函数中 x_i 的系数是递增（不减）的；当问题是求极小值时，使目标函数中 x_i 的系数是递减（不增）的。

第二步：将目标函数所有可能的取值按照从大到小的顺序排列（对于极小化问题则按照从小到大的顺序排列），并按此顺序排列对应的变量取值组合；对于这组排列好的变量取值组合，从第 1 个组合开始，判断该组合是否满足所有的约束条件，若全部满足则该组合即为最优解，停止检验；否则检验下一个组合，直到有一个组合满足全部的约束条件为止。

2. 利用 LINGO 软件求解整数规划

与线性规划模型相比，整数规划模型仅比其多了全部或部分决策变量是整数的约束，是一类特殊的线性规划。因此，利用 LINGO 软件同样可以很容易地求得整数规划问题的最优解。

在 LINGO 软件中有两个函数@gin(x)和@bin(x)，前者限制 x 为整数，后者限制 x 为 0 或 1。因此，求解整数规划问题时，只要在求解其松弛问题的 LINGO 程序中加入整数约束即可。

3. 求解平衡运输问题的表上作业法

1）运输问题的数学模型

运输问题的一般提法：

已知有 m 个生产地点 A_1、A_2、…、A_m，可供应某种物资，其供应量分别为 a_1、a_2、…、a_m。有 n 个销地 B_1、B_2、…、B_n，其需求量分别为 b_1、b_2、…、b_n。设从产地 A_i 到销地 B_j 的单位运费为 c_{ij}（$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$），问如何调运可使总运费最少？

设 x_{ij} 为从产地 A_i 到销地 B_j 的运输量，则一般运输问题的数学模型可写成

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant (=) a_i, \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = (\leqslant) b_j, \forall j$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \forall i,j$$

2）求解平衡运输问题的表上作业法

表上作业法是单纯形法在求解运输问题时的一种简化方法，其实质是单纯形法。但具体计算和术语有所不同。表上作业法是用于求解产销平衡的标准运输问题的有效方法，其计算步骤可概括如下。

第一步：求初始基本可行解（初始调运方案），即在（$m\times n$）产销平衡表上给出 $m+n-1$ 个数字格（$m\times n$ 产销平衡运输问题的基变量数为 $m+n-1$）。常用的方法有最小元素法、元素差额法（Vogel 近似法）、左上角法等；

第二步：求各非基变量的检验数，即在表上计算空格的检验数，判别是否达到最优解。

如果已是最优解，则停止计算，否则转到第三步。

第三步：确定换入变量和换出变量，找出新的基本可行解。在表上用闭回路法调整。

第四步：重复第二步和第三步，直到得到最优解为止。

4. 运输问题的变体

1）求极大值问题

设数学模型为

$$\max Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$$

第一种方法：将极大化问题转化为极小化问题。设极大化问题的运价表为 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，用一个较大的数 $M(M\geqslant\max\{c_{ij}\})$去减每一个 c_{ij} 得到矩阵 $\boldsymbol{C}'=(c'_{ij})_{m\times n}$，其中 $c'_{ij}=M-c_{ij}\geqslant 0$，将 $\boldsymbol{C}'$ 作为极小化问题的运价表，用表上用业法求出最优解，目标函数值为 $Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij}$。

2）不平衡运输问题

当总产量与总销量不相等时，称为不平衡运输问题。这类运输问题在实际中常常碰到，它的求解方法是将不平衡问题化为平衡问题再按平衡问题求解。

（1）当产大于销时，即 $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$，数学模型为

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \quad i = 1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$$

由于总产量大于总销量，必有部分产地的产量不能全部运送完，必须就地库存，即每个产地设一个仓库，库存量为 $x_{i,n+1}(i=1,2,\cdots,m)$，总的库存量为

$$b_{n+1} = x_{1,n+1} + x_{2,n+1} + \cdots + x_{m,n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

b_{n+1} 作为一个虚设的销地 $\boldsymbol{B}_{n+1}$ 的销量。各产地 A_i 到 B_{n+1} 的运价为零，即 $c_{i,n+1}=0(i=1,2,\cdots,m)$。则平衡问题的数学模型为

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad i = 1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1,2,\cdots,n+1$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n,n+1$$

具体求解时，只要在运价表右端增加一列 $\boldsymbol{B}_{n+1}$，运价为 0，销量为 b_{n+1} 即可。

（2）当销大于产时，即 $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$，数学模型为

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_j \quad j = 1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$$

由于总销量大于总产量，故一定有些需求地不完全满足，这时虚设一个产地 A_{m+1}，产量为 $a_{m+1} = x_{m+1,1} + x_{m+1,2} + \cdots + x_{m+1,n} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$。$x_{m+1,j}$ 是 A_{m+1} 运到 B_j 的运量，也是 B_j 不能满足需要的数量。A_{m+1} 到 B_j 的运价为零，即 $c_{m+1,j} = 0(j = 1,2,\cdots,n)$。销大于产问题的数学模型为

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \; i = 1,2,\cdots,m+1$$

$$\sum_{j=1}^{m+1} x_{ij} = b_j \; j = 1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,m+1; j = 1,2,\cdots,n$$

具体计算时，在运价表的下方增加一行 $\boldsymbol{A}_{m+1}$，运价为零，产量为 a_{m+1} 即可。

5. 指派问题

1）指派问题的数学模型

典型的指派问题可以描述为：设有 m 个人，计划做 n 项工作，其中第 i 个人做第 j 项工作的收益（或所耗费的时间）为 c_{ij}。现求一种指派方式，使得每个人最多只能完成一项工作，并使总收益最大（或总时间最少）。类似的还有：有 m 项加工任务，怎样指派到 n 台机床上分别完成的问题；有 m 条航线，怎样指定 n 艘船去航行问题等。

从问题的形式来看，指派问题是运输问题的特例，也可以看成 0-1 规划问题。引入变量 x_{ij}，其取值只能是 1 或 0，令

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当指派第 } i \text{ 人去完成第 } j \text{ 项任务}\\ 0 & \text{当不指派第 } i \text{ 人去完成第 } j \text{ 项任务}\end{cases}$$

当问题要求极小化时，数学模型为

$$\min Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \tag{4-1}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=(\leqslant)1 \quad (i=1,2,\cdots,m)(\text{每个人最多完成一项工作}) & (4\text{-}2)\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=(\leqslant)1 \quad (j=1,2,\cdots,n)(\text{每项工作最多由一人完成}) & (4\text{-}3)\\ x_{ij}=0\text{ 或 }1 \quad (i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n) & (4\text{-}4)\end{cases}$$

(1) 当任务数等于总人数时，式(4-2)和式(4-3)均取"="号。

(2) 若任务数小于人数，式(4-2)改为"⩽"号，式(4-3)取"="号。

(3) 若任务数大于人数，式(4-2)取"="号，式(4-3)取"⩽"号。

(4) 如果第 p 项任务可由 k 个人完成，将式(4-3)中第 p 项任务的约束修改为

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ip}=k$$

其他约束不变。

(5) 如果第 q 个人需要完成 l 项任务，将式(4-2)中第 q 个人的约束修改为

$$\sum_{j=1}^{n}x_{qj}=l$$

其他约束不变。

2) 求解指派问题的匈牙利法

标准指派问题是 0-1 规划的特例，也是运输问题的特例，当然可以用整数规划、0-1 规划或运输问题的解法去求解。这就如同用单纯形法求解运输问题一样是不合算的。

库恩(W. W. Kuhn)于 1955 年提出了指派问题的解法，他引用了匈牙利数学家康尼格(D. Konig)一个关于矩阵中 0 元素的定理：系数矩阵中独立 0 元素的最多个数等于能覆盖所有 0 元素的最少直线数。此解法称为**匈牙利法**。以后在方法上虽有不断改进，但仍沿用此名称。匈牙利法求解的是总任务数和总人数相等的标准指派问题。

用匈牙利法求解此指派问题的步骤如下。

第一步：变换指派问题的系数矩阵(c_{ij})为(b_{ij})，使在(b_{ij})的各行各列中都出现 0 元素，即

(1) 从(c_{ij})的每行元素都减去该行的最小元素。

(2) 再从所得新系数矩阵的每列元素中减去该列的最小元素。

第二步：进行试指派，以寻求最优解。

在(b_{ij})中找尽可能多的独立 0 元素，若能找出 n 个独立 0 元素，就以这 n 个独立 0 元素对应解矩阵(x_{ij})中的元素为 1，其余为 0，这就得到最优解。找独立 0 元素，常用的步骤为

(1) 从只有一个 0 元素的行(列)开始，给这个 0 元素加圈，记作◎。然后划去◎所在列(行)的其他 0 元素，记作∅；这表示这列所代表的任务已指派完，不必再考虑别人了。