

第3章

随机过程

学习目的：为通信系统可靠性研究打下理论基础。

学习要求：理解随机过程的概念，掌握平稳、高斯、窄带随机过程的统计特性；熟悉白噪声及其通过线性系统的响应。

“随机信号”是指变化没有规律或取值大小无法预知的信号，其特点是不能用一个确定的数学表达式加以描述，如话筒送出的音频信号、摄像机输出的视频信号、热噪声等。

由于信源发出的信号相对于信宿而言必须有一定的不可预知性或随机性，也就是说信号要携带一定的信息量，所以，在实际通信系统中传输的信号都是随机信号。另外，通信系统中的噪声大小、信道特性的起伏等也都是随时间随机变化的，因此，可把随机信号与噪声纳入到一个特殊的时间过程——“随机过程”中加以分析与研究。

3.1 随机变量与随机过程

3.1.1 随机变量与分布函数

1. 随机变量

通过不同取值表达一个随机试验中各种不同结果的变量被称为随机变量(random variable)。通常，用大写字母表示随机变量，用小写字母表示其取值。例如在掷硬币试验中，设出现正面用一个变量 X 的取值“1”表示，出现背面用其取值“0”表示，显然， X 取“1”或“0”是随机的，因此， X 就是一个随机变量，其取值为 0 或 1。若随机变量的取值个数有限，就被称为离散随机变量；若可能的取值充满某一有限或无限区间，则该变量就是连续随机变量。

2. 分布函数与概率密度

设随机变量 X 的取值为 x ，则定义 $P(X \leq x)$ 为随机变量 X 的概率分布函数(distribution function)，记作 $F(x)$ ，即有

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (3.1-1)$$

注意，这里 X 的取值 x 可以离散也可以连续。

若一连续随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 对于一个非负函数 $f(x)$ 有下式成立

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (3.1-2)$$

则称 $f(x)$ 是随机变量 X 的概率密度函数 (probability function), 简称“概率密度”。显然, 式(3.1-2)可改写为

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) \quad (3.1-3)$$

也就是说, 概率密度函数是分布函数的导函数。

若有两个随机变量 X 和 Y , 则把两个事件 $P(X \leq x)$ 和 $P(Y \leq y)$ 同时出现的概率定义为二维随机变量 (X, Y) 的二维分布函数, 记作 $F(x, y)$, 即有

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (3.1-4)$$

若 $F(x, y)$ 可表示为

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy \quad (3.1-5)$$

则称 $f(x, y)$ 是二维随机变量 (X, Y) 的二维概率密度函数。式(3.1-5)可改写为

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) \quad (3.1-6)$$

若二维概率密度函数满足

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y) \quad (3.1-7)$$

则称随机变量 X 和 Y 是统计独立的。其中

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

3.1.2 随机过程与分布函数

我们知道, 一个随机信号在产生过程中, 因其取值无法预知, 所以也就无法对其进行分析研究, 但在一个给定的时间段内, 其已经出现的波形却是一个确定的信号且满足一些统计规律。因此, 人们把一个信源在不同时间段内产生的 n 个不同的确定波形或 n 个相同信源在同一时间段内产生的 n 个不同的确定波形称作样本函数, 并放在一起进行研究, 从而可以了解信源产生的随机信号的一些统计特性。这里, n 个样本函数一起被称为一个随机过程 (stochastic process)。显然, 随机过程可以认为是随机信号或噪声的数学模型, 而随机信号则是随机过程中任一个样本函数随时间推移的产生过程。因此, 对随机信号的研究就转化为对随机过程的研究。

通常, 一个随机过程可表示为 $\xi(t, \zeta)$, 它表明随机过程既是时间 t 的函数, 也是随机试验可能结果 ζ (随机变量) 的函数。比如 $\xi(t, \phi) = A \sin(\omega t + \phi)$ 就是一个以初相作为随机变量的随机过程。为方便计, 随机过程可简记为 $\xi(t)$ 。

随机过程的概念可从以下两个方面加以理解。

(1) 把随机过程看成对应不同随机试验结果的时间过程的集合。例如, 设有 n 台性能完全相同、工作条件也完全相同的接收机同时工作, 并用 n 台示波器同时观测并记录这些接收机的输出噪声波形 (或对一台接收机, 在 n 个不同时间段进行观测记录)。测试结果表明, 尽管设备和测试条件相同, 但是所记录的 n 条随时间起伏变化的波形却形态各异 (如图 3-1(a) 所示的 $x_1(t), \dots, x_n(t)$), 这说明每台接收机输出的噪声电压随时间的变化规律都是不可预知的, 是随机噪声。但是, 测试结果的每一个记录 (图 3-1(a) 中的一个波形) 都是一个确定的时间函数 $x_i(t)$, 我们称之为样本函数或随机过程的一次实现。全部样本函数构成的总体

$\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ 就是一个随机过程, 见图 3-1(b)。简言之, 一个随机过程是所有样本函数的集合, 记作 $\xi(t)$ 。

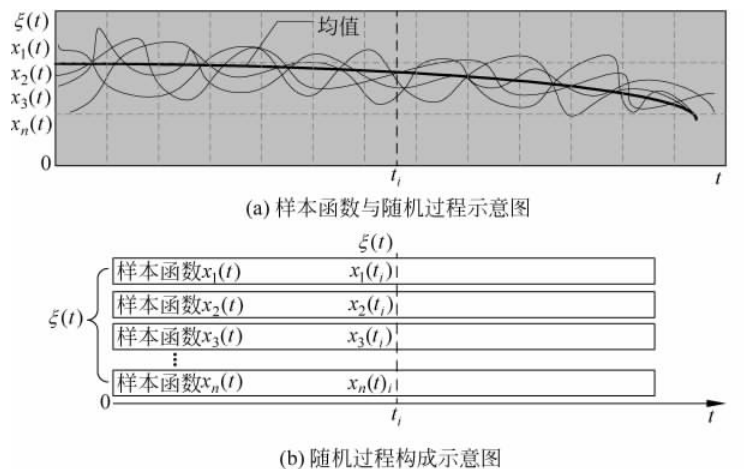


图 3-1 样本函数与随机过程

(2) 随机过程可看成是随机变量概念的延伸, 即随机过程是依赖参量 t 的随机变量 $\xi(t)$ 。因为在任意一个给定时刻 t_1 上, 每一个样本函数 $x_i(t)$ 都有一个确定的数值 $x_i(t_1)$, 但是由于每个样本 $x_i(t)$ 的出现和如何变化都是不可预知的 (这正是随机过程随机性的体现), 所以, 全体样本 $\xi(t)$ (即随机过程) 在 t_1 时刻 (任意时刻) 的取值 $\{x_i(t_1), i=1, 2, \dots, n\}$ 就是一个随机变量或随机信号, 记为 $\xi(t_1)$ 。因此, 随机过程还可看作是一组在时间进程中处于不同时刻随机变量的集合。

综上所述, 随机过程可看作是所有样本函数的集合, 也可认为是一簇随机变量的集合。这两个概念的本质是一样的, 但后一种可把分析随机过程的问题转化为分析随机变量的问题, 因而更便于理论分析。同时, 可以得到如下结论:

- (1) 若 t 和 ζ 均为变量时, $\xi(t)$ 是一个时间函数簇。
- (2) 若 t 为变量, ζ 不变时, $\xi(t)$ 是一个确定的时间函数。
- (3) 若 t 不变, ζ 为变量时, $\xi(t)$ 是一个随机变量。
- (4) 若 t 和 ζ 均不变时, $\xi(t)$ 是一个确定值。

从“信号与系统”课程中我们知道, 确知信号的分析要以微积分、傅氏级数、傅氏变换、拉氏变换及 z 变换等为主要工具, 而对随机过程的研究却主要涉及概率论与统计理论知识。不论是确知信号还是随机过程, 我们关心的主要问题都是它们随时间或随频率的变化特性。

在研究随机过程时, 我们必须透过表面的偶然性找出其必然的内在规律, 并以统计理论描述这些规律。也就是说, 随机过程是从偶然性中寻找必然性的一种数学方法。

由于随机过程 $\xi(t)$ 是一个随机变量簇, 所以其统计特性可用分布函数或概率密度函数来描述。

对于任意给定时刻 t_1 , 随机过程是一个随机变量 $\xi(t_1)$ 。我们把 $\xi(t_1)$ 小于或等于某一数值 x_1 的概率 $P[\xi(t_1) \leq x_1]$, 记作

$$F_1(x_1, t_1) = P[\xi(t_1) \leq x_1] \quad (3.1-8)$$

并称它为随机过程 $\xi(t)$ 的一维分布函数。

如果 $F_1(x_1, t_1)$ 对 x_1 的偏导存在, 即有

$$\frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1, t_1) \quad (3.1-9)$$

则称 $f_1(x_1, t_1)$ 为 $\xi(t)$ 的一维概率密度函数。

从式(3.1-8)和式(3.1-9)可见, 一维分布函数或一维概率密度函数仅仅描述了随机过程在任一瞬间的统计特性, 对随机过程的描述还不够全面和充分。因此, 需要加大观察或研究的时间点数。

对于任意给定的 t_1 和 t_2 时刻, 把 $\xi(t_1) \leq x_1$ 和 $\xi(t_2) \leq x_2$ 同时成立的概率

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2\} \quad (3.1-10)$$

称为随机过程 $\xi(t)$ 的二维分布函数。例如在掷骰子随机过程中, 第 i 次的点数小于等于 4 的概率就是一个一维分布函数; 第 i 次和第 $i+1$ 次的点数都小于等于 4 的概率就是一个二维分布函数。

如果

$$\frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) \quad (3.1-11)$$

存在, 则称 $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 为 $\xi(t)$ 的二维概率密度函数。

同理, 任意给定 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, 则 $\xi(t)$ 的 n 维分布函数被定义为

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} \quad (3.1-12)$$

如果

$$\frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

存在, 则称其为 $\xi(t)$ 的 n 维概率密度函数。

显然, 在随机过程 $\xi(t)$ 存在的时间域内, n 越大或两个相邻观察时刻的时间间隔越小, 对随机过程统计特性的描述就越全面、越充分。

3.1.3 随机过程的数字特征

虽然分布函数和概率密度函数可以很好地描述或表征随机过程, 但在大多数情况下, 随机过程的 n 维分布函数或概率密度函数不容易或不需要确定。因此, 人们常用随机过程的数字特征来描述随机过程的主要特性, 以降低随机过程的研究难度。对于通信系统而言, 这样做不仅可以满足其研究需求而且也便于计算和测量。

随机过程的数字特征是由随机变量的数字特征推广得到的, 其中最常用的是均值、方差和相关函数。

1. 均值(数学期望)

随机过程 $\xi(t)$ 的均值(average)或称数学期望(mathematic expectation)被定义为

$$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x, t) dx \quad (3.1-13)$$

这是因为在任意给定时刻 t_1 的取值 $\xi(t_1)$ 是一个随机变量, 其概率密度函数为 $f_1(x_1, t_1)$, 则 $\xi(t_1)$ 的均值为

$$E[\xi(t_1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_1(x_1, t_1) dx_1$$

由于 t_1 是任取的, 所以可以把 t_1 直接写为 t , x_1 改为 x , 这时上式就变为随机过程在任意时刻 t 的均值, 即式(3.1-13)。

显然, $\xi(t)$ 的均值 $E[\xi(t)]$ 是时间的确定函数, 常记作 $a(t)$, 它表示随机过程的 n 个样本函数曲线的摆动中心(如图 3-1(a)中粗线所示)。

2. 方差

随机过程的方差(variance)被定义为

$$D[\xi(t)] = E\{[\xi(t) - a(t)]^2\} \quad (3.1-14)$$

$D[\xi(t)]$ 常记为 $\sigma^2(t)$ 。这里也把任意时刻 t_1 直接写成了 t 。因为

$$\begin{aligned} D[\xi(t)] &= E[\xi^2(t) - 2a(t)\xi(t) + a^2(t)] \\ &= E[\xi^2(t)] - 2a(t)E[\xi(t)] + a^2(t) \\ &= E[\xi^2(t)] - a^2(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x, t) dx - [a(t)]^2 \end{aligned} \quad (3.1-15)$$

所以, 方差等于均方值与均值平方之差, 表示随机过程在时刻 t 对于均值 $a(t)$ 的偏离程度。

数学期望表示一个随机过程中所有样本的趋向值, 而方差则表示所有样本的值与趋向值的误差大小。例如在射击中, 把 8 环定为 n 次射击的趋向值, 可类比为数学期望; 而 n 次射击的结果与趋向值的平均误差(如 2 环), 可比喻为方差。

3. 相关函数

从第 2 章可知, 相关函数可以描述一个确知信号本身或者与另一确知信号之间波形的关联程度, 其实, 相关函数(correlation function)的概念更多地用于随机过程的分析与研究之中。

均值和方差都只与随机过程的一维概率密度函数有关, 它们只是描述了随机过程在各个孤立时刻的特征, 却不能反映随机过程内在的联系。为了衡量随机过程在任意两个时刻上获得的随机变量之间的关联程度(例如第一次射击的成绩和第二次之间的关系大小), 常采用协方差函数 $B(t_1, t_2)$ 或相关函数 $R(t_1, t_2)$ 描述随机过程。

随机过程 $\xi(t)$ 的协方差函数被定义为

$$\begin{aligned} B(t_1, t_2) &= E\{[\xi(t_1) - a(t_1)][\xi(t_2) - a(t_2)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (3.1-16)$$

式中, $a(t_1)$ 和 $a(t_2)$ 分别是在 t_1 和 t_2 时刻得到的 $\xi(t)$ 的均值; $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 为 $\xi(t)$ 的二维概率密度函数。

随机过程 $\xi(t)$ 的相关函数被定义为

$$R(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\xi(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (3.1-17)$$

式中, $\xi(t_1)$ 和 $\xi(t_2)$ 分别是在 t_1 和 t_2 时刻观测 $\xi(t)$ 得到的随机变量。可以看出, $R(t_1, t_2)$ 是两个变量 t_1 与 t_2 的确定函数。 $R(t_1, t_2)$ 与 $B(t_1, t_2)$ 之间有着如下确定的关系

$$B(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - a(t_1)a(t_2) \quad (3.1-18)$$

若随机过程的均值为 0, 则 $B(t_1, t_2)$ 与 $R(t_1, t_2)$ 完全相同。即使均值不为 0, 但由于其为常数, 所以, 两者所描述的随机过程的特征也是一致的, 今后将常用 $R(t_1, t_2)$ 。

如果把相关函数的概念引申到两个或更多个随机过程中, 就可得到互相关函数(例如甲乙两人射击过程之间的关联度)。设 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 分别表示两个随机过程, 则它们的互相关函数被定义为

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\eta(t_2)] \quad (3.1-19)$$

显然, 由于 $R(t_1, t_2)$ 是衡量同一随机过程关联程度的, 所以被称为自相关函数。若 $t_2 > t_1$, 并令 $\tau = t_2 - t_1$, 则自相关函数 $R(t_1, t_2)$ 可表示为 t_1 和 τ 的函数 $R(t_1, t_1 + \tau)$ 。

利用数字特征分析通信系统中的随机过程, 是对随机过程研究方法的简化, 也是在科学研究中经常要用到的一种避繁就简思路的具体体现。

3.2 平稳随机过程

通信系统中的信号和噪声大多都可视为平稳随机过程。平稳随机过程是一种应用广泛的随机过程, 具有一些简单实用的特性, 可以为研究通信系统提供更为简洁的分析方法。

3.2.1 平稳随机过程的定义

若随机过程 $\xi(t)$ 的任意有限维分布函数与时间起点无关, 也就是说, 对于任意的正整数 n 和所有实数 Δ , 有

$$\begin{aligned} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta, \dots, t_n + \Delta) \end{aligned} \quad (3.2-1)$$

则称该随机过程是在严格意义下的平稳随机过程, 简称严平稳随机过程。

该定义表明, 平稳随机过程的统计特性不随时间的推移而改变。它的一维分布函数与时间 t 无关, 即

$$f_1(x_1, t_1) = f_1(x_1) \quad (3.2-2)$$

而其二维分布函数只与时间间隔 $\tau = t_2 - t_1$ 有关, 即

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; \tau) \quad (3.2-3)$$

显然, 随着概率密度函数的简化, 平稳随机过程 $\xi(t)$ 的一些数字特征也可以相应地得到简化, 其均值和自相关函数分别为

$$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_1(x_1) dx_1 = a \quad (3.2-4)$$

$$R(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\xi(t_1 + \tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R(\tau) \quad (3.2-5)$$

可见, 平稳随机过程 $\xi(t)$ 具有以下简明的特点:

(1) 均值与 t 无关, 为常数 a ;

(2) 自相关函数只与时间间隔 $\tau = t_2 - t_1$ 有关, 即 $R(t_1, t_1 + \tau) = R(\tau)$ 。

实际中常用这两个条件来判断随机过程的平稳性, 并把同时满足这两个条件的随机过程定义为广义平稳随机过程。显然, 严平稳随机过程必定是广义平稳的, 反之不一定成立。以后讨论的随机过程若无特殊说明, 均假定是广义平稳随机过程, 简称平稳过程。

【例题 3-1】 设一个振荡器的输出为随机相位余弦波 $\xi(t) = A\cos(\omega_c t + \theta)$, 其中, A 和 ω_c 均为常数; θ 是在 $[0, 2\pi]$ 内均匀分布的随机变量。

(1) 画出 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 时的样本函数波形。

(2) 判断 $\xi(t)$ 的平稳性。

【解】 (1) 振荡器的输出是一个随机过程, 样本函数是一个初相随机的余弦波。波形见图 3-2。

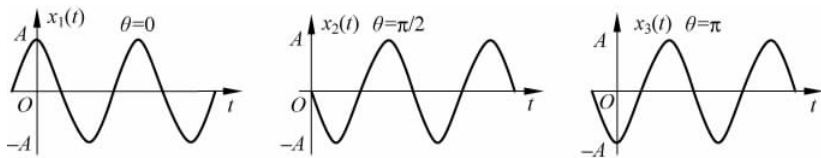


图 3-2 例题 3-1 图

可见, 三个样本函数的取值是确知的。这类随机过程被称为“确定的随机过程”, 其特点是, 可以借助以前任意时间段的样本函数值推测出样本函数的未来值。

(2) $\xi(t)$ 的数学期望(均值)为

$$\begin{aligned} a(t) &= E[\xi(t)] = E[A\cos(\omega_c t + \theta)] \\ &= AE[\cos\omega_c t \cos\theta - \sin\omega_c t \sin\theta] \\ &= A\cos\omega_c t E[\cos\theta] - A\sin\omega_c t E[\sin\theta] = 0 \end{aligned}$$

其中, $E[\cos\theta] = \int_0^{2\pi} (\cos\theta) f(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos\theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$; 同理 $E[\sin\theta] = 0$ 。

自相关函数为

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E[\xi(t_1)\xi(t_2)] \\ &= E[A\cos(\omega_c t_1 + \theta) \cdot A\cos(\omega_c t_2 + \theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} E[\cos(\omega_c t_2 - \omega_c t_1) + \cos(\omega_c t_2 + \omega_c t_1 + 2\theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos\omega_c(t_2 - t_1) + \frac{A^2}{2} \{ \cos\omega_c(t_2 + t_1) E[\cos 2\theta] - \sin\omega_c(t_2 + t_1) E[\sin 2\theta] \} \\ &= \frac{A^2}{2} \cos\omega_c(t_2 - t_1) = \frac{A^2}{2} \cos\omega_c \tau = R(\tau) \end{aligned}$$

其中, $\tau = t_2 - t_1$ 。可见, $\xi(t)$ 的均值为常数, 而自相关函数只与时间间隔 τ 有关, 故知 $\xi(t)$ 是广义平稳过程。

3.2.2 各态历经性

随机过程的数字特征(均值、相关函数)是对随机过程所有样本函数的统计平均, 而在实

际应用中常常很难测得大量的样本。因此,人们自然会提出这样一个问题:能否利用从一次试验中得到的一个样本函数 $x(t)$ 来决定平稳过程的数字特征呢? 回答是肯定的。

平稳过程在满足一定条件下具有一个有趣且有用的特性,称为各态历经性(遍历性)。

假设 $x(t)$ 是平稳过程 $\xi(t)$ 的任意一次实现(样本),由于它是时间的确定函数,可以求得它的时间平均值。其时间均值和时间相关函数分别被定义为

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \\ \overline{R(\tau)} &= \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau) dt\end{aligned}\quad (3.2-6)$$

如果平稳过程使下式成立

$$\begin{cases} a = \bar{a} \\ R(\tau) = \overline{R(\tau)} \end{cases}\quad (3.2-7)$$

也就是说,若平稳过程的统计平均值等于它的任一次实现的时间平均值,则称该平稳过程具有各态历经性。

“各态历经”的含义是:随机过程中的任意一次实现都经历了随机过程的所有可能状态。

因此,在求解各态历经过程的统计平均值(均值或自相关函数等)时,无须作多次考察,只需用一次实现的“时间平均”值代替过程的“统计平均”值即可,从而使测量和计算问题大为简化。用一句成语来诠释,就是:窥一斑可见全豹。

注意:具有各态历经的随机过程一定是平稳过程,反之不一定成立。在通信系统中所遇到的随机过程,一般均能满足各态历经条件。

【例题 3-2】 求证例题 3-1 随机相位余弦波 $\xi(t) = A\cos(\omega_c t + \theta)$ 的各态历经性。

【解】 根据式(3.2-6)可得 $\xi(t)$ 的时间平均值(时间均值和时间相关函数)为

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\cos(\omega_c t + \theta) dt = 0 \\ \overline{R(\tau)} &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\cos(\omega_c t + \theta) \cdot A\cos[\omega_c(t + \tau) + \theta] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{A^2}{2T} \left\{ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\omega_c \tau dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\omega_c t + \omega_c \tau + 2\theta) dt \right\} \\ &= \frac{A^2}{2} \cos\omega_c \tau\end{aligned}$$

与例题 3-1 的统计平均值比较,有下式成立:

$$\begin{cases} \bar{a} = E[\xi(t)] \\ \overline{R(\tau)} = E[\xi(t)\xi(t+\tau)] = R(\tau) \end{cases}$$

这表明时间平均等于统计平均。因此,随机相位余弦波是各态历经的。

“各态历经性”的重要意义在于:在一个复杂系统的分析过程中,只需要找到一种状态下的解,就可以了解全部状态下的系统活动特性,从而大大降低了系统分析的复杂程度。

3.2.3 平稳随机过程的自相关函数

自相关函数是表征平稳过程特性的一个重要函数,它不仅可以用来描述平稳过程的数字特征,还与平稳过程的谱特性有着内在的联系(详见 3.2.4 节)。

设 $\xi(t)$ 为实平稳随机过程,则它的自相关函数

$$R(\tau) = E[\xi(t)\xi(t+\tau)] \quad (3.2-8)$$

具有如下主要特性:

$$(1) R(0) = E[\xi^2(t)] \quad (\xi(t) \text{ 的平均功率}) \quad (3.2-9)$$

$$(2) R(\tau) = R(-\tau) \quad (\tau \text{ 的偶函数}) \quad (3.2-10)$$

上述特性可直接由定义式(3.2-8)验证。

$$(3) |R(\tau)| \leq R(0) \quad (R(\tau) \text{ 的上界}) \quad (3.2-11)$$

即 $R(\tau)$ 在 $\tau=0$ 时有最大值。考虑一个非负式 $E[\xi(t) \pm \xi(t+\tau)]^2 \geq 0$ 即可证明此关系。

$$(4) R(+\infty) = E^2[\xi(t)] = a^2 \quad (\xi(t) \text{ 的直流功率}) \quad (3.2-12)$$

这是因为

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} R(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} E[\xi(t)\xi(t+\tau)] = E[\xi(t)] \cdot E[\xi(t+\tau)] = E^2[\xi(t)]$$

上式利用了当 $\tau \rightarrow +\infty$ 时, $\xi(t)$ 与 $\xi(t+\tau)$ 没有任何依赖关系,即统计独立特性。

$$(5) R(0) - R(+\infty) = \sigma^2 \quad (3.2-13)$$

σ^2 是方差,表示平稳过程 $\xi(t)$ 的平均功率。当均值为 0 时,有 $R(0) = \sigma^2$ 。

3.2.4 平稳随机过程的功率谱密度

因为随机过程的样本是功率型信号,所以,其频谱特性可以用功率谱密度加以表述。

对于任意的功率信号 $f(t)$,其功率谱密度定义为

$$P_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} \quad (3.2-14)$$

式中, $F_T(\omega)$ 是 $f(t)$ 的截短函数 $f_T(t)$ (见图 3-3) 所对应的频谱函数。

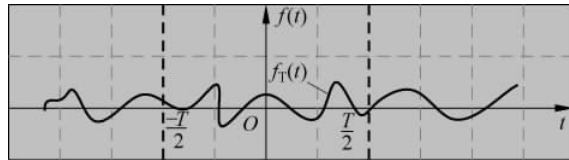


图 3-3 截短函数 $f_T(t)$

不妨把 $f(t)$ 看成是平稳过程 $\xi(t)$ 的一个样本,则每个样本的功率谱密度都可用式(3.2-14)表示。通常,不同样本具有不同的功率谱密度 $P_f(f)$,因此,某一样本的功率谱密度不能作为过程的功率谱密度,而过程的功率谱密度应看作是所有样本功率谱的统计平均,即

$$P_\xi(\omega) = E[P_f(\omega)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{E[|F_T(\omega)|^2]}{T} \quad (3.2-15)$$

式(3.2-15)给出了平稳过程 $\xi(t)$ 的功率谱密度 $P_\xi(\omega)$ 定义。但直接用它计算功率谱密度却

并不简单。那么,如何方便地求得功率谱 $P_{\xi}(\omega)$ 呢?

由第2章可知,非周期功率型确知信号的自相关函数与其功率谱密度是一对傅氏变换。这种关系对平稳随机过程也成立,即平稳过程的功率谱密度 $P_{\xi}(\omega)$ 与其自相关函数 $R(\tau)$ 也是一对傅氏变换关系,即有

$$\begin{cases} P_{\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\xi}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} P_{\xi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\xi}(f) e^{j2\pi f\tau} df \end{cases} \quad (3.2-16)$$

简记为

$$R(\tau) \leftrightarrow P_{\xi}(\omega) \quad \text{或} \quad R(\tau) \leftrightarrow P_{\xi}(f)$$

以上关系被称为维纳—辛钦定理,是联系频域和时域分析方法的基本关系式。由此关系式可以得到以下结论。

(1) 平稳过程的平均功率为

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\xi}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\xi}(f) df \quad (3.2-17)$$

该式不仅指出了用自相关函数表示功率谱密度的方法,同时还给出了平稳过程平均功率的频域计算方法,而式 $R(0) = E[\xi^2(t)]$ 是时域计算方法。

(2) 功率谱密度 $P_{\xi}(\omega)$ 具有非负性和实偶性,即有 $P_{\xi}(\omega) \geq 0$ 和 $P_{\xi}(-\omega) = P_{\xi}(\omega)$ 。

【例题 3-3】 求随机相位余弦波 $\xi(t) = A \cos(\omega_c t + \theta)$ 的功率谱密度和功率。

【解】 在例题 3-1 中,我们已经证明随机相位余弦波 $\xi(t)$ 是一个平稳过程,并且求出其相关函数为

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos\omega_c \tau$$

根据平稳随机过程的相关函数与功率谱密度是一对傅里叶变换的结论,即 $R(\tau) \leftrightarrow P_{\xi}(\omega)$, 并利用

$$\cos\omega_c \tau \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$$

可得随机相位余弦波的功率谱密度为

$$P_{\xi}(\omega) = \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$$

而平均功率为

$$P = R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\xi}(\omega) d\omega = \frac{A^2}{2}$$

将此例与例题 2-5 比较可知,由于功率谱密度中不含有相位信息,所以随机相位余弦波和确知相位余弦波的功率谱密度是相同的,当然自相关函数也相同。

3.3 高斯随机过程

高斯随机过程(gauss process),也称正态(normal)随机过程,是通信领域中最重要也最常见的一种随机过程。现实中的噪声大多都是高斯型的,例如通信系统中的热噪声。

3.3.1 高斯随机过程的定义

如果随机过程 $\xi(t)$ 的任意 n 维 ($n=1, 2, \dots$) 分布均服从正态分布, 则称它为正态或高斯随机过程。其 n 维概率密度函数表示为

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n |B|^{-\frac{1}{2}}} \exp \left[\frac{-1}{2|B|} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |B|_{jk} \left(\frac{x_j - a_j}{\sigma_j} \right) \left(\frac{x_k - a_k}{\sigma_k} \right) \right] \quad (3.3-1)$$

式中 $a_k = E[\xi(t_k)]$; $\sigma_k^2 = E[\xi(t_k) - a_k]^2$; $|B|$ 为系数矩阵 (也称为归一化协方差矩阵) 的行列式, 即

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & 1 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad (3.3-2)$$

$|B|_{jk}$ 是行列式 $|B|$ 中元素 b_{jk} 的代数余子式 (b_{jk} 为归一化协方差函数), 而

$$b_{jk} = \frac{E\{[\xi(t_j) - a_j][\xi(t_k) - a_k]\}}{\sigma_j \sigma_k} \quad (3.3-3)$$

3.3.2 高斯随机过程的特性

(1) 由式(3.3-1)可以看出, 高斯过程的 n 维分布只依赖各个随机变量的均值、方差和归一化协方差。因此, 对于高斯过程, 只需研究它的数字特征即可。

(2) 广义平稳的高斯过程也是严平稳的。因为, 若高斯过程是广义平稳的, 即其均值与时间无关, 协方差函数只与时间间隔有关而与时间起点无关, 则其 n 维分布也与时间起点无关, 故它也是严平稳的。

(3) 如果高斯过程在不同时刻的取值是不相关的, 即对所有 $j \neq k$ 有 $b_{jk} = 0$, 这时式(3.3-1)可简化为

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp \left[-\frac{(x_k - a_k)^2}{2\sigma_k^2} \right] \\ = f(x_1, t_1) f(x_2, t_2) \cdots f(x_n, t_n) \quad (3.3-4)$$

这表明, 如果高斯过程在不同时刻的取值是不相关的, 那么它们也是统计独立的。

(4) 高斯过程经过线性变换后生成的过程仍是高斯过程。也可以说, 若线性系统的输入为高斯过程, 则系统的输出也是高斯过程。

上述特性对通信系统的分析非常重要。例如, 一个随机过程通过线性系统时, 若它是高斯过程, 则根据特性(4)可知线性系统的输出过程也是高斯过程; 由特性(1)可知, 高斯过程的一维分布仅取决于其均值和方差。

3.3.3 高斯随机变量

高斯过程在任一时刻上的取值是一个正态分布的随机变量, 也称高斯随机变量, 其一维概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.3-5)$$

式中,参数 a 和 σ^2 分别为高斯随机变量的均值和方差。 $f(x)$ 的波形见图 3-4。结合式(3.3-5)可以看出 $f(x)$ 有以下特性:

(1) $f(x)$ 对称于 $x=a$ 这条直线, 即有 $f(a+x) = f(a-x)$;

(2) 由特性(1)和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, 可得

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2} \quad (3.3-6)$$

(3) a 表示分布中心; σ 称为标准偏差, 表示集中程度, $f(x)$ 图形将随着 σ 的减小而变高和变窄。当 $a=0, \sigma=1$ 时, 称为标准正态分布, 即有

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (3.3-7)$$

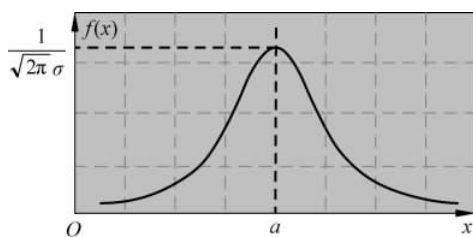


图 3-4 正态分布的概率密度

在通信系统的性能分析中,常需要计算高斯随机变量 X 小于或等于某个值 b 的概率 $P(X \leq b)$, 为此,把正态分布的概率密度 $f(x)$ 的积分定义为正态分布函数, 则有

$$F(b) = P(X \leq b) = \int_{-\infty}^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] dx \quad (3.3-8)$$

这个积分的值无法用闭合形式计算, 需要通过变量代换, 将式(3.3-8)右端用一些可在数学手册上查出其函数值的特殊函数表示。例如, 若令 $t = (x-a)/\sqrt{2}\sigma$, 有 $dx = \sqrt{2}\sigma dt$, 则式(3.3-8)变成

$$F(b) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{b-a}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{b-a}{\sqrt{2}\sigma}\right), \quad b \geq a \quad (3.3-9)$$

$$F(b) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{b-a}{\sqrt{2}\sigma}}^0 e^{-t^2} dt = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{b-a}{\sqrt{2}\sigma}\right), \quad b < a \quad (3.3-10)$$

式中, $\operatorname{erf}(x)$ 被称为误差函数, 其定义为

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (3.3-11)$$

它是自变量的递增函数, 且有 $\operatorname{erf}(0) = 0, \operatorname{erf}(\infty) = 1, \operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$ 。

$\operatorname{erfc}(x)$ 被称为互补误差函数, 其定义为

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad (3.3-12)$$

它是自变量的递减函数, 且有 $\operatorname{erfc}(0) = 1, \operatorname{erfc}(+\infty) = 0, \operatorname{erfc}(-x) = 2 - \operatorname{erfc}(x)$ 。对于

$x > a$, 互补误差函数与高斯概率密度函数曲线尾部下的面积成正比。当 x 大时(实际应用中只要 $x > 2$), 互补误差函数可以近似为

$$\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{1}{x\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad (3.3-13)$$

另一种经常用于表示高斯曲线尾部下的面积的函数记为 $Q(x)$, 其定义为

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x \geq 0 \quad (3.3-14)$$

借助该函数可以计算概率 $P(X > b) = Q\left(\frac{b-a}{\sigma}\right)$ 。

比较式(3.3-12)与式(3.3-14), 可得

$$Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (3.3-15)$$

和

$$\operatorname{erfc}(x) = 2Q(\sqrt{2}x) \quad (3.3-16)$$

利用互补误差函数的特性, 不难得到 $Q(x)$ 函数的特性:

$$(1) Q(-x) = 1 - Q(x), x \geq 0;$$

$$(2) Q(0) = \frac{1}{2} \text{ 及 } Q(+\infty) = 0。$$

在分析通信系统的抗噪声性能时, 经常会用到以上几个特殊函数, 并且可以通过查 $Q(x)$ 函数表或 $\operatorname{erf}(x)$ 函数表(见附录 B) 求出函数值。在没有函数表的情况下, 可以利用互补误差函数的近似公式, 式(3.3-13) 求出函数值。

3.4 平稳随机过程通过线性系统

有了上述随机过程的基本理论, 下面就可以研究当一个平稳过程通过线性系统时, 其输出过程是否也平稳? 输入过程与输出过程的统计关系如何? 如何求输出过程的均值及自相关函数等问题。

随机过程通过线性系统的分析方法是建立在确知信号通过线性系统的研究基础之上的。设线性系统的冲激响应为 $h(t)$, 频率响应为 $H(\omega)$, 输入信号为 $v_i(t)$, 则输出信号 $v_o(t)$ 为

$$v_o(t) = h(t) * v_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) v_i(t - \tau) d\tau \quad (3.4-1)$$

相应的傅氏变换为

$$V_o(\omega) = H(\omega) V_i(\omega) \quad (3.4-2)$$

如果把 $v_i(t)$ 看作是输入随机过程的一个样本, 则 $v_o(t)$ 就是输出随机过程的一个样本。那么, 当输入随机过程为 $\xi_i(t)$ 时, 对于 $\xi_i(t)$ 的每个样本 $[v_{i,n}(t), n=1, 2, \dots]$, 系统的输出都有一个 $[v_{o,n}(t), n=1, 2, \dots]$ 与其相对应, 它们之间满足式(3.4-2), 而所有 $[v_{o,n}(t), n=1, 2, \dots]$ 的集合构成输出随机过程 $\xi_o(t)$, 因此, 输入与输出随机过程也应满足式(3.4-2), 即有

$$\xi_o(t) = h(t) * \xi_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \xi_i(t - \tau) d\tau \quad (3.4-3)$$

式(3.4-1)和式(3.4-3)对应的系统示意图见图 3-5。

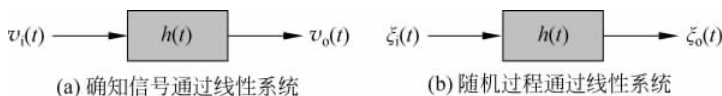


图 3-5 确知信号和随机过程通过线性系统示意图

在假设输入过程 $\xi_i(t)$ 是平稳的, 其均值为 a , 自相关函数为 $R_i(\tau)$, 功率谱密度为 $P_i(\omega)$ 的前提下, 可以利用关系式(3.4-3)求输出过程 $\xi_o(t)$ 的统计特性, 即它的均值、自相关函数、功率谱以及概率分布。

1. 输出过程 $\xi_o(t)$ 的均值

对式(3.4-3)两边做统计平均运算, 有

$$E[\xi_o(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\xi_i(t-\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)E[\xi_i(t-\tau)]d\tau$$

设输入过程是平稳的, 则有 $E[\xi_i(t-\tau)] = E[\xi_i(t)] = a$ (常数), 于是

$$E[\xi_o(t)] = a \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau = aH(0) \quad (3.4-4)$$

式中, $H(0)$ 是线性系统在 $f=0$ 处的频率响应, 即直流增益。因此输出过程的均值 $E[\xi_o(t)]$ 是一个常数。

2. 输出过程 $\xi_o(t)$ 的自相关函数

根据自相关函数的定义, 输出过程的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_o(t_1, t_1 + \tau) &= E[\xi_o(t_1)\xi_o(t_1 + \tau)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\xi_i(t_1 - \alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta)\xi_i(t_1 + \tau - \beta)d\beta\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)h(\beta)E[\xi_i(t_1 - \alpha)\xi_i(t_1 + \tau - \beta)]d\alpha d\beta \end{aligned}$$

根据输入过程的平稳性, 有

$$E[\xi_i(t_1 - \alpha)\xi_i(t_1 + \tau - \beta)] = R_i(\tau + \alpha - \beta)$$

于是

$$R_o(t_1, t_1 + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)h(\beta)R_i(\tau + \alpha - \beta)d\alpha d\beta = R_o(\tau) \quad (3.4-5)$$

式(3.4-5)表明, 输出过程的自相关函数仅仅是时间间隔 τ 的函数。由式(3.4-4)和式(3.4-5)可知, 若线性系统的输入过程是平稳的, 那么输出过程也是平稳的。

3. 输出过程 $\xi_o(t)$ 的功率谱密度

对式(3.4-5)进行傅氏变换, 有

$$\begin{aligned} P_o(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_o(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)h(\beta)R_i(\tau + \alpha - \beta)d\alpha d\beta \right] e^{-j\omega\tau}d\tau \end{aligned}$$

对上式进行变量代换, 令 $\tau' = \tau + \alpha - \beta$, 则有

$$P_o(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) e^{j\omega\alpha} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta) e^{-j\omega\beta} d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} R_i(\tau') e^{-j\omega\tau'} d\tau'$$

即

$$P_o(\omega) = H^*(\omega) \cdot H(\omega) \cdot P_i(\omega) = |H(\omega)|^2 P_i(\omega) \quad (3.4-6)$$

式(3.4-6)给出了求解线性时不变系统输出随机过程功率谱密度的简单方法。

4. 输出过程 $\xi_o(t)$ 的概率分布

通常,在已知输入过程概率分布的情况下,总可以通过式(3.4-4)来确定输出过程的概率分布。一种常见的情况是,如果线性系统的输入过程是高斯型的,则输出过程也是高斯型的。更一般地说,高斯过程经线性变换后仍为高斯过程(数字特征可能不同)。

3.5 窄带随机过程

若随机过程 $\xi(t)$ 的谱密度集中在中心频率 f_c 附近相对较窄的通频带范围 Δf 内,即满足 $\Delta f \ll f_c$ 条件,且 f_c 远离零频率点,则称该 $\xi(t)$ 为窄带随机过程。实际通信系统多为窄带通型的。通过窄带系统的信号或噪声必然是窄带随机过程。一个典型的窄带随机过程的谱密度和样本函数见图 3-6。可见,窄带随机过程的一个样本波形如同一个包络和相位随机缓变的正弦波。因此,窄带随机过程 $\xi(t)$ 可用下式表示

$$\xi(t) = a_\xi(t) \cos[\omega_c t + \varphi_\xi(t)], \quad a_\xi(t) \geq 0 \quad (3.5-1)$$

式中, $a_\xi(t)$ 及 $\varphi_\xi(t)$ 分别是窄带随机过程 $\xi(t)$ 的随机包络和随机相位; ω_c 是正弦波的中心角频率。显然, $a_\xi(t)$ 及 $\varphi_\xi(t)$ 的变化相对于载波 $\cos\omega_c t$ 的变化要缓慢得多。

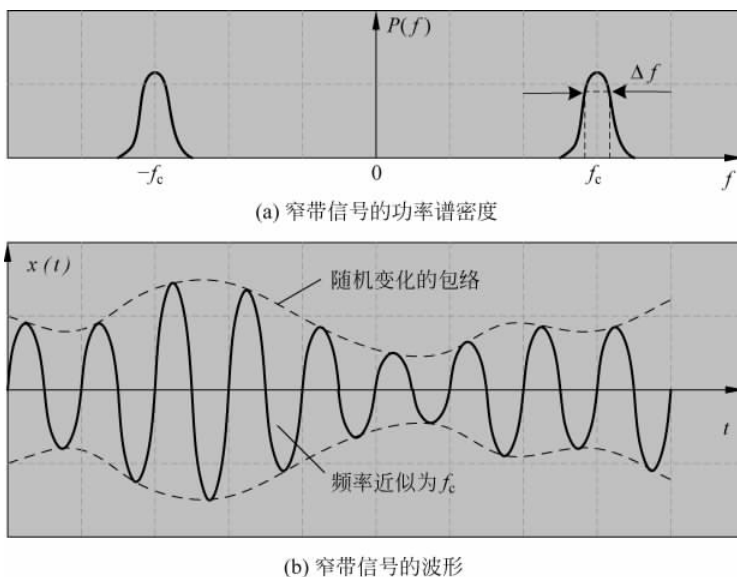


图 3-6 窄带过程的频谱(功率谱)和波形示意图

将式(3.5-1)进行三角函数展开,可以改写为

$$\xi(t) = \xi_c(t) \cos\omega_c t - \xi_s(t) \sin\omega_c t \quad (3.5-2)$$

式中

$$\xi_c(t) = a_\xi(t) \cos \varphi_\xi(t) \quad (3.5-3)$$

$$\xi_s(t) = a_\xi(t) \sin \varphi_\xi(t) \quad (3.5-4)$$

这里的 $\xi_c(t)$ 和 $\xi_s(t)$ 分别称为 $\xi(t)$ 的同相分量和正交分量。由式(3.5-1)和式(3.5-2)看出, $\xi(t)$ 的统计特性可以由 $a_\xi(t)$ 和 $\varphi_\xi(t)$ 或 $\xi_c(t)$ 和 $\xi_s(t)$ 的统计特性确定; 反之亦然。作为一个特别有用的例子, 假设 $\xi(t)$ 是一个均值为 0, 方差为 σ_ξ^2 的平稳高斯窄带过程, 我们来分析 $\xi_c(t)$ 和 $\xi_s(t)$ 以及 $a_\xi(t)$ 和 $\varphi_\xi(t)$ 的统计特性。

3.5.1 $\xi_c(t)$ 和 $\xi_s(t)$ 的统计特性

对式(3.5-2)求数学期望

$$E[\xi(t)] = E[\xi_c(t)] \cos \omega_c t - E[\xi_s(t)] \sin \omega_c t \quad (3.5-5)$$

因为 $\xi(t)$ 平稳且均值为零, 即 $E[\xi(t)] = 0$, 所以, 由式(3.5-5)得到

$$E[\xi_c(t)] = 0, \quad E[\xi_s(t)] = 0 \quad (3.5-6)$$

由自相关函数的定义式(3.2-8)和式(3.5-2), 可得 $\xi(t)$ 的自相关函数

$$\begin{aligned} R_\xi(t, t+\tau) &= E[\xi(t)\xi(t+\tau)] \\ &= R_c(t, t+\tau) \cos \omega_c t \cos \omega_c(t+\tau) \\ &\quad - R_{cs}(t, t+\tau) \cos \omega_c t \sin \omega_c(t+\tau) \\ &\quad - R_{sc}(t, t+\tau) \sin \omega_c t \cos \omega_c(t+\tau) \\ &\quad + R_s(t, t+\tau) \sin \omega_c t \sin \omega_c(t+\tau) \end{aligned} \quad (3.5-7)$$

式中, $R_c(t, t+\tau) = E[\xi_c(t)\xi_c(t+\tau)]$, $R_{cs}(t, t+\tau) = E[\xi_c(t)\xi_s(t+\tau)]$,

$$R_{sc}(t, t+\tau) = E[\xi_s(t)\xi_c(t+\tau)], R_s(t, t+\tau) = E[\xi_s(t)\xi_s(t+\tau)].$$

因为 $\xi(t)$ 是平稳的, 故有

$$R_\xi(t, t+\tau) = R(\tau)$$

这就要求式(3.5-7)的右端与时间 t 无关, 而仅与 τ 有关。因此, 若令 $t=0$, 式(3.5-7)仍应成立, 它变为

$$R_\xi(\tau) = R_c(t, t+\tau) \cos \omega_c \tau - R_{cs}(t, t+\tau) \sin \omega_c \tau \quad (3.5-8)$$

因与时间 t 无关, 以下两式自然成立

$$\begin{aligned} R_c(t, t+\tau) &= R_c(\tau) \\ R_{cs}(t, t+\tau) &= R_{cs}(\tau) \end{aligned}$$

所以, 式(3.5-8)变为

$$R_\xi(\tau) = R_c(\tau) \cos \omega_c \tau - R_{cs}(\tau) \sin \omega_c \tau \quad (3.5-9)$$

再令 $t = \frac{\pi}{2\omega_c}$, 同理可知, 式(3.5-7)变为

$$R_\xi(\tau) = R_s(\tau) \cos \omega_c \tau + R_{sc}(\tau) \sin \omega_c \tau \quad (3.5-10)$$

其中应有

$$\begin{aligned} R_s(t, t+\tau) &= R_s(\tau) \\ R_{sc}(t, t+\tau) &= R_{sc}(\tau) \end{aligned}$$

由以上分析可知, 若窄带过程 $\xi(t)$ 是平稳的, 则 $\xi_c(t)$ 和 $\xi_s(t)$ 也必然是平稳的。

进一步分析, 式(3.5-9)和式(3.5-10)应同时成立, 故有

$$R_c(\tau) = R_s(\tau) \quad (3.5-11)$$

$$R_{cs}(\tau) = -R_{sc}(\tau) \quad (3.5-12)$$

式(3.5-11)表明,同相分量 $\xi_c(t)$ 和正交分量 $\xi_s(t)$ 具有相同的自相关函数。根据互相关函数的特性,应有

$$R_{cs}(\tau) = R_{sc}(-\tau)$$

将上式代入式(3.5-12),可得

$$R_{sc}(\tau) = -R_{sc}(-\tau) \quad (3.5-13)$$

式(3.5-13)表明 $R_{sc}(\tau)$ 是 τ 的奇函数,因此

$$R_{sc}(0) = 0 \quad (3.5-14)$$

同理可证

$$R_{cs}(0) = 0 \quad (3.5-15)$$

于是,由式(3.5-9)及式(3.5-10)得到

$$R_{\xi}(0) = R_c(0) = R_s(0) \quad (3.5-16)$$

即

$$\sigma_{\xi}^2 = \sigma_c^2 = \sigma_s^2 \quad (3.5-17)$$

这表明 $\xi(t)$ 、 $\xi_c(t)$ 和 $\xi_s(t)$ 具有相同的平均功率或方差(因为均值为 0)。

另外,因为平稳过程的特性与 t 变量无关,故由式(3.5-2)可得

$$\xi(t_1) = \xi_c(t_1) \quad t = t_1 = 0$$

$$\xi(t_2) = -\xi_s(t_2) \quad t = t_2 = \frac{\pi}{2\omega_c}$$

因为 $\xi(t)$ 是高斯过程,所以 $\xi_c(t_1)$ 、 $\xi_s(t_2)$ 一定是高斯随机变量,从而 $\xi_c(t)$ 、 $\xi_s(t)$ 也是高斯过程。根据式(3.5-15)可知, $\xi_c(t)$ 与 $\xi_s(t)$ 在 $\tau=0$ 处互不相关,又由于它们是高斯型的,所以 $\xi_c(t)$ 与 $\xi_s(t)$ 也是统计独立的。

基于上述分析,可得到一个重要结论:

一个均值为零,方差为 σ_{ξ}^2 的平稳高斯窄带过程 $\xi(t)$,它的同相分量 $\xi_c(t)$ 和正交分量 $\xi_s(t)$ 同样是平稳高斯过程,且均值皆为零,方差等于 σ_{ξ}^2 。另外,在同一时刻 t_i 上得到的 $\xi_c(t_i)$ 和 $\xi_s(t_i)$ 是互不相关的或统计独立的(因为是高斯过程)。

3.5.2 $a_{\xi}(t)$ 和 $\varphi_{\xi}(t)$ 的统计特性

由 3.5.1 节分析可知, ξ_c 和 ξ_s 的联合概率密度函数应为

$$f(\xi_c, \xi_s) = f(\xi_c) \cdot f(\xi_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\xi}^2} \exp\left[-\frac{\xi_c^2 + \xi_s^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right] \quad (3.5-18)$$

设 a_{ξ} 、 φ_{ξ} 的联合概率密度函数为 $f(a_{\xi}, \varphi_{\xi})$,则根据概率论知识有

$$f(a_{\xi}, \varphi_{\xi}) = f(\xi_c, \xi_s) \left| \frac{\partial(\xi_c, \xi_s)}{\partial(a_{\xi}, \varphi_{\xi})} \right|$$

根据式(3.5-3)和式(3.5-4)在 t 时刻随机变量之间的关系

$$\begin{cases} \xi_c = a_{\xi} \cos \varphi_{\xi} \\ \xi_s = a_{\xi} \sin \varphi_{\xi} \end{cases}$$

可以求得

$$\left| \frac{\partial(\xi_c, \xi_s)}{\partial(a_\xi, \varphi_\xi)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_c}{\partial a_\xi} & \frac{\partial \xi_s}{\partial a_\xi} \\ \frac{\partial \xi_c}{\partial \varphi_\xi} & \frac{\partial \xi_s}{\partial \varphi_\xi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_\xi & \sin \varphi_\xi \\ -a_\xi \sin \varphi_\xi & a_\xi \cos \varphi_\xi \end{vmatrix} = a_\xi$$

于是

$$f(a_\xi, \varphi_\xi) = a_\xi f(\xi_c, \xi_s) = \frac{a_\xi}{2\pi\sigma_\xi^2} \exp\left[-\frac{(a_\xi \cos \varphi_\xi)^2 + (a_\xi \sin \varphi_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right] = \frac{a_\xi}{2\pi\sigma_\xi^2} \exp\left[-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right] \quad (3.5-19)$$

注意, 这里 $a_\xi \geq 0$, 而 φ_ξ 在 $(0, 2\pi)$ 内取值。

利用概率论中边际分布概念, 将 $f(a_\xi, \varphi_\xi)$ 对 φ_ξ 积分, 可求得包络 a_ξ 的一维概率密度函数

$$f(a_\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a_\xi, \varphi_\xi) d\varphi_\xi = \int_0^{2\pi} \frac{a_\xi}{2\pi\sigma_\xi^2} \exp\left[-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right] d\varphi_\xi = \frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2} \exp\left[-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right], \quad a_\xi \geq 0 \quad (3.5-20)$$

可见, a_ξ 服从瑞利分布。同理, 将 $f(a_\xi, \varphi_\xi)$ 对 a_ξ 积分, 可求得相位 φ_ξ 的一维概率密度函数

$$\begin{aligned} f(\varphi_\xi) &= \int_0^{+\infty} f(a_\xi, \varphi_\xi) da_\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2} \exp\left(-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right) da_\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \varphi_\xi \leq 2\pi \end{aligned} \quad (3.5-21)$$

可见, φ_ξ 服从均匀分布。

综上所述, 又得到一个重要结论:

一个均值为零, 方差为 σ_ξ^2 的窄带平稳高斯过程 $\xi(t)$, 其包络 $a_\xi(t)$ 的一维分布是瑞利分布, 相位 $\varphi_\xi(t)$ 的一维分布是均匀分布, 并且就一维分布而言, $a_\xi(t)$ 与 $\varphi_\xi(t)$ 是统计独立的, 即有

$$f(a_\xi, \varphi_\xi) = f(a_\xi) \cdot f(\varphi_\xi) \quad (3.5-22)$$

3.6 正弦波加窄带高斯噪声

在许多调制通信系统中, 传输的是用正弦波作载波的已调信号。当已调信号通过信道时总会受到噪声的干扰。为了减少噪声影响, 可在解调器前端设置一个带通滤波器, 以滤除信号频带以外的噪声。这样, 带通滤波器的输出就是正弦波已调信号与窄带高斯噪声的混合波形。因此, 了解该合成波的统计特性具有重要的实际意义。

设正弦波加窄带高斯噪声的混合信号为

$$r(t) = A \cos(\omega_c t + \theta) + n(t) \quad (3.6-1)$$

式中, A 和 ω_c 均假定为确知量; θ 是在 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机相位; $n(t) = n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t$ (见式(3.5-2)) 为窄带高斯噪声, 其均值为零, 方差为 σ_n^2 。于是有

$$\begin{aligned} r(t) &= [A \cos \theta + n_c(t)] \cos \omega_c t - [A \sin \theta + n_s(t)] \sin \omega_c t \\ &= z_c(t) \cos \omega_c t - z_s(t) \sin \omega_c t \\ &= z(t) \cos[\omega_c t + \varphi(t)] \end{aligned} \quad (3.6-2)$$

式中

$$z_c(t) = A \cos \theta + n_c(t) \quad (3.6-3)$$

$$z_s(t) = A \sin \theta + n_s(t) \quad (3.6-4)$$

$r(t)$ 的包络和相位分别为

$$z(t) = \sqrt{z_c^2(t) + z_s^2(t)}, \quad z \geq 0 \quad (3.6-5)$$

$$\varphi(t) = \arctan \frac{z_s(t)}{z_c(t)}, \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \quad (3.6-6)$$

我们关心的是 $r(t)$ 的包络和相位的统计特性。利用 3.5.2 节的结果, 如果 θ 值已给定, 则 z_c, z_s 是相互独立的高斯随机变量, 且有

$$E[z_c] = A \cos \theta$$

$$E[z_s] = A \sin \theta$$

$$\sigma_c^2 = \sigma_s^2 = \sigma_n^2$$

因此, 在给定相位 θ 条件下的 z_c 和 z_s 的联合概率密度函数为

$$f\left(z_c, \frac{z_s}{\theta}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}[(z_c - A \cos \theta)^2 + (z_s - A \sin \theta)^2]\right\}$$

然后, 根据 z_c, z_s 与 z, φ 之间的随机变量关系

$$\begin{cases} z_c = z \cos \varphi \\ z_s = z \sin \varphi \end{cases}$$

并利用与 3.5 节分析 $a_\varepsilon, \varphi_\varepsilon$ 相似的方法, 最终可以求得 $r(t)$ 的包络 z 的概率密度函数为

$$f(z) = \frac{z}{\sigma_n^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2}(z^2 + A^2)\right] I_0\left(\frac{Az}{\sigma_n^2}\right), \quad z \geq 0 \quad (3.6-7)$$

这个概率密度函数称为广义瑞利分布, 又称莱斯(Rice)分布。式(3.6-7)中的 $I_0(x)$ 为零阶修正贝塞尔函数, 当 $x \geq 0$ 时, $I_0(x)$ 是单调上升函数, 且有 $I_0(0) = 1$ 。

3.7 白噪声和带限噪声

由于通信系统中常见的热噪声近似为白噪声, 且热噪声的取值恰好服从高斯分布。所以, 在分析通信系统的抗噪声性能时, 常用高斯白噪声作为信道中的噪声模型。另外, 因为实际信道或滤波器的带宽有限, 故其输出的噪声变为带限噪声。

3.7.1 白噪声

白噪声是指其功率谱密度在所有频率上为一常数的噪声, 常用 $n(t)$ 表示。其功率谱密度可表示为

$$P_n(f) = \frac{n_0}{2} (\text{W/Hz}), \quad (-\infty < f < +\infty) \quad (3.7-1)$$

其曲线见图 3-7(a), 其中 n_0 为常数。

对式(3.7-1)取傅氏反变换, 可得到白噪声的自相关函数

$$R(\tau) = \frac{n_0}{2} \delta(\tau) \quad (3.7-2)$$

见图 3-7(b), 对于所有的 $\tau \neq 0$ 都有 $R(\tau) = 0$, 这表明白噪声仅在 $\tau = 0$ 时才相关, 而在任意两个时刻(即 $\tau \neq 0$)的随机变量都是不相关的。如果白噪声取值的概率分布服从高斯分布,

则称为高斯白噪声。高斯白噪声在任意两个不同时刻上的随机变量,不仅是互不相关的而且还是统计独立的。

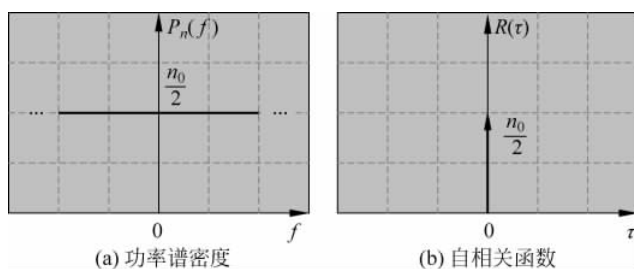


图 3-7 白噪声的功率谱密度和自相关函数

3.7.2 带限噪声

带限噪声是指频带受限的一类噪声,有低通和带通两种形式。

低通形式:白噪声通过低通滤波器或低通信道时,输出的噪声被称为低通白噪声,也用 $n(t)$ 表示。

假设理想低通滤波器具有模为 1,截止频率为 $|f| \leq f_H$ 的传输特性,则低通白噪声对应的功率谱密度为门函数形式,即

$$P_n(f) = \begin{cases} \frac{n_0}{2} & |f| \leq f_H \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (3.7-3)$$

自相关函数为抽样函数形式,即

$$R(\tau) = n_0 f_H \frac{\sin(2\pi f_H \tau)}{2\pi f_H \tau} \quad (3.7-4)$$

对应的曲线见图 3-8。

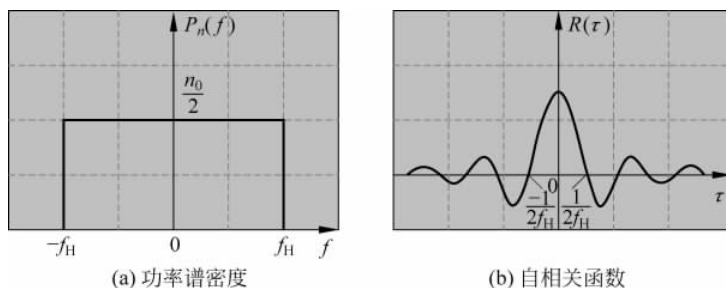


图 3-8 带限白噪声的功率谱和自相关函数

带通形式:白噪声通过带通滤波器或带通信道时,其输出的噪声称为带通白噪声,仍用 $n(t)$ 表示。

设理想带通滤波器的传输特性为

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f_c - \frac{B}{2} \leq |f| \leq f_c + \frac{B}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

式中, f_c 为中心频率; B 为通带宽度。

则其输出噪声的功率谱密度为

$$P_n(f) = \begin{cases} \frac{n_0}{2}, & f_c - \frac{B}{2} \leq |f| \leq f_c + \frac{B}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.7-5)$$

自相关函数为

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-f_c - \frac{B}{2}}^{-f_c + \frac{B}{2}} \frac{n_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df + \int_{f_c - \frac{B}{2}}^{f_c + \frac{B}{2}} \frac{n_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df \\ &= n_0 B \frac{\sin(\pi B\tau)}{\pi B\tau} \cos(2\pi f_c \tau) \end{aligned} \quad (3.7-6)$$

对应的曲线见图 3-9。

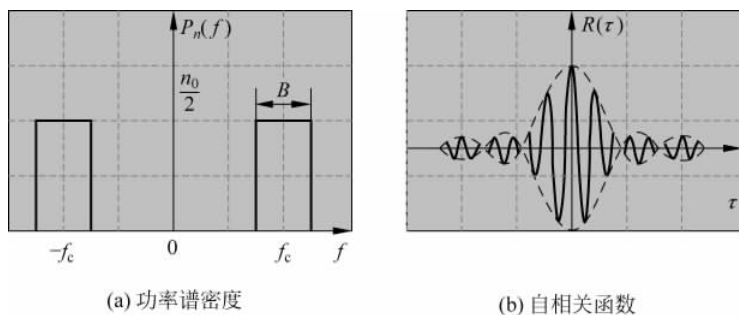


图 3-9 带通白噪声的功率谱和自相关函数

通常,将 $B \ll f_c$ 的带通滤波器称为窄带(narrow-band)滤波器,相应地把带通白噪声称为窄带白噪声,其表达式和统计特性与 3.5 节所描述的窄带随机过程相同,即有

$$n(t) = n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \quad (3.7-7)$$

$$E[n(t)] = E[n_c(t)] = E[n_s(t)] = 0 \quad (3.7-8)$$

$$\sigma_n^2 = \sigma_c^2 = \sigma_s^2 \quad (3.7-9)$$

式(3.7-9)表明 $n_s(t)$ 、 $n_c(t)$ 和 $n(t)$ 具有相同的平均功率(因为均值为 0),根据图 3-9 所示的功率谱密度曲线,很容易求出 $n(t)$ 的平均功率为

$$N = n_0 B \quad (3.7-10)$$

该式在第 5 章和第 8 章分析通信系统的抗噪声性能时非常有用。但应注意,这里 B 是指理想矩形的带通滤波器的带宽,而对于实际的带通滤波器, B 应是等效噪声带宽(见 4.5 节)。

【例题 3-4】 设均值为零、功率谱密度为 $P_n(f) = \frac{n_0}{2}$ 的高斯白噪声,通过如图 3-10 所示的 RC 低通滤波器。试求: (1) 输出噪声的功率谱密度 $P_y(f)$ 和自相关函数 $R_y(\tau)$; (2) 输出噪声的一维概率密度函数 $f_y(x)$ 。

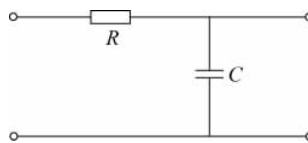


图 3-10 例题 3-4 图

【解】 (1) 由式(3.4-6)可得输出噪声的功率谱密度

$$P_y(f) = P_n(f) \cdot |H(f)|^2 = \frac{n_0}{2} \cdot \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2} = \frac{n_0}{2} \cdot \frac{1}{2RC} \frac{\frac{2}{RC}}{\frac{1}{R^2C^2} + (2\pi f)^2}$$

利用 $e^{-a|\tau|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$ 和式(3.2-16), 可得输出噪声的自相关函数

$$R_y(\tau) = \frac{n_0}{4RC} \exp\left(-\frac{|\tau|}{RC}\right)$$

(2) 根据高斯过程通过线性系统后的输出仍为高斯过程的结论, 可知输出噪声的均值为 0, 方差等于

$$\sigma^2 = R_y(0) = \frac{n_0}{4RC}$$

故由式(3.3-5)得输出噪声的一维概率密度函数为

$$f_y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = \sqrt{\frac{2RC}{\pi n_0}} \exp\left(-\frac{2RC}{n_0}x^2\right)$$

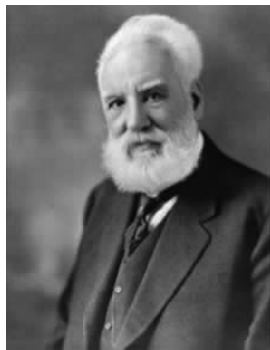
评注: 高斯过程通过线性系统后的输出仍为高斯过程, 但数字特征可能有所变化。

至此, 我们已经了解了分析随机过程的一些基本概念和方法。这些概念和方法将在后面的章节中用于分析通信系统的性能。

3.8 小知识——贝尔

亚历山大·格雷厄姆·贝尔(1847—1942年), 1847年生于苏格兰爱丁堡市。由于父亲是语言生理、语言矫正和聋哑教学方面的专家, 所以贝尔从小就对语音复制很感兴趣。

1869年, 22岁的贝尔受聘为美国波士顿大学语言学教授, 担任声学讲座的主讲, 并开始发明电话。他曾试图用连续振动的曲线来使聋哑人看出“话”来, 没有成功, 但在实验中发现了一个有趣现象: 每次电流通断时, 线圈会发出类似于莫尔斯电码的“滴答”声。这引起贝尔大胆的设想: 如果能用电流强度模拟出声音的变化不就可以用电流传递语音了吗? 于是, 他辞去了教授职务, 一心扎入发明电话的试验中。经过两年的努力, 他与年轻的



电气工程师沃特森终于制成了两台粗糙的样机: 在圆筒底部的薄膜中央连接着插入硫酸的碳棒, 人说话时薄膜振动改变电阻使电流变化, 在接收处再利用电磁原理将电信号变回语音。但不幸的是试验失败了, 两人的声音是通过公寓的天花板而不是通过机器互相传递的。

正在冥思苦想之时, 窗外的吉他声提醒了他们: 送话器和受话器的灵敏度太低了! 于是, 他们连续两天两夜自制了音箱, 改进了机器, 然后开始实验。沃特森终于从受话器里听到了贝尔清晰的声音“沃特森先生, 快来呀! 我需要你”。这是 1875年 6月 2日傍晚, 当时贝尔 28岁, 沃特森 21岁。他们趁热打铁, 几经改进, 终于制成了世界上第一台实用的电

话机。

1876年3月3日(贝尔的29岁生日),贝尔的电话专利申请被美国批准。其实,在贝尔申请电话专利的同一天几小时后,另一位杰出的发明家艾利沙·格雷也为他的电话申请专利。由于这几个小时之差,美国最高法院裁定贝尔为电话的发明者。

贝尔获得专利权不久就在费拉德尔菲亚市百年纪念展览馆展出了他的电话。随后与同事一起于1877年7月成立了一家公司,即今日美国电话电报公司(AT&T)的祖先。

因发明电话而成为富翁的贝尔,不但从未中断过研究工作,还一直关心和帮助聋哑人。他的妻子就是他先前教授过的聋女。1882年贝尔加入美国籍,1942年去世,享年95岁。

3.9 思考题与习题

思考题

- 3-1 何谓随机过程?
- 3-2 均值和方差分别表征随机过程的什么特性?
- 3-3 自相关函数可以表征随机过程的什么特性?
- 3-4 严格(狭义)平稳过程的特点是什么? 广义平稳的特征是什么? 两者的关系如何?
- 3-5 各态历经性的含义是什么?
- 3-6 自相关函数有哪些特性? 每个特性的含义或意义是什么?
- 3-7 平稳过程的自相关函数与功率谱密度之间存在什么关系?
- 3-8 什么是高斯过程? 其主要特性有哪些?
- 3-9 简述互补误差函数 $\text{erfc}(x)$ 的定义、特性与应用。
- 3-10 如何简便地求解线性时不变系统输出过程的均值、功率谱密度和自相关函数?
- 3-11 什么是窄带随机过程?
- 3-12 窄带高斯过程的包络和相位分别服从什么概率分布?
- 3-13 窄带高斯过程的同相分量和正交分量的统计特性如何?
- 3-14 正弦波加窄带高斯噪声的合成包络服从什么分布?
- 3-15 什么是白噪声? 其频谱和自相关函数有什么特点? 白噪声通过理想低通或理想带通滤波器后的情况如何?

习题

3-1 设随机变量 X 和 Y 都是零均值、单位方差的高斯随机变量,且 X 和 Y 相互独立,试求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数。

3-2 设随机变量 X 和 Y 的关系为

$$Y = cX + d$$

式中, c 和 d 均为常数,且 $c > 0$ 。若 X 为零均值、单位方差的高斯随机变量,试求 Y 的概率密度函数。

3-3 设高斯随机变量 X 的均值为零,方差 $\sigma^2 = 4$,试求 $x > 2$ 的概率(x 表示随机变量 X 的取值)。

3-4 设随机过程 $Y(t) = X_1 \cos \omega_0 t - X_2 \sin \omega_0 t$, 若 X_1 与 X_2 是彼此独立且均值为 0、方差为 σ^2 的高斯随机变量, 试求:

(1) $E[Y(t)]$ 、 $E[Y^2(t)]$; (2) $Y(t)$ 的一维分布密度函数 $f(y)$; (3) $R(t_1, t_2)$ 和 $B(t_1, t_2)$ 。

3-5 已知 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是统计独立的平稳随机过程, 且它们的自相关函数分别为 $R_X(\tau)$ 和 $R_Y(\tau)$, 试求两者乘积 $Z(t) = X(t) \cdot Y(t)$ 的自相关函数和功率谱密度。

3-6 设有一个随机过程为

$$z(t) = m(t) \cos(\omega_c t + \theta)$$

式中, $m(t)$ 为广义平稳过程, 其自相关函数为 $R_m(\tau)$; 随机变量 θ 在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布, 且 θ 与 $m(t)$ 彼此统计独立。

(1) 证明 $z(t)$ 是广义平稳的; (2) 已知 $R_m(\tau) \Leftrightarrow P_m(\omega)$, 求 $z(t)$ 的功率谱密度 $P_z(\omega)$ 。

3-7 设噪声 $n(t)$ 的自相关函数为 $R_n(\tau) = \frac{k}{2} e^{-k|\tau|}$ (k 为常数), 试求其功率谱密度 $P_n(\omega)$ 及功率 N 。

3-8 设平稳随机过程 $X(t)$ 通过如图 3-10 所示的线性系统。设 $X(t)$ 的均值为 a , 自相关函数为 $R_X(\tau)$, 功率谱密度为 $P_X(\omega)$, 求:

- (1) 输出过程 $Y(t)$ 是否平稳;
- (2) $Y(t)$ 的功率谱密度。

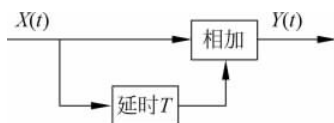


图 3-10 习题 3-8 图

3-9 一个中心频率为 f_c 、带宽为 B 的理想带通滤波器如图 3-11 所示。假设输入是均值为零功率谱密度为 $\frac{n_0}{2}$ 的高斯白噪声, 试求:

- (1) 滤波器输出噪声的自相关函数;
- (2) 滤波器输出噪声的平均功率;
- (3) 输出噪声的一维概率密度函数。

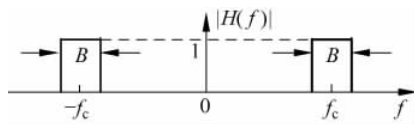


图 3-11 习题 3-9 图

3-10 一个 LR 低通滤波器见图 3-12, 假设输入是均值为零、功率谱密度为 $\frac{n_0}{2}$ 的高斯白噪声, 试求:

- (1) 输出噪声的功率谱密度和自相关函数;
- (2) 输出噪声的均值和方差。

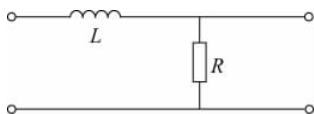


图 3-12 习题 3-10 图

3-11 设 $X(t)$ 是平稳随机过程, 其自相关函数 $R_X(\tau)$ 是周期为 2 的周期函数, 在区间 $(-1, 1)$ 上的截短函数表达式为

$$R_T(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|, & -1 < \tau < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求 $X(t)$ 的功率谱密度 $P_X(\omega)$, 并用图形表示 (提示: 把 $R_X(\tau)$ 看成是截短函数 $R_T(\tau)$ 与周期 T 为 2 的冲激序列 $\delta_T(\tau)$ 的卷积, 即 $R_X(\tau) = R_T(\tau) * \delta_T(\tau)$ 。