第一部分

同步练习

第8章

空间解析几何与向量代数

8.1　知识要点

8.1.1　向量的概念及线性运算

1. 向量及其表示

(1) 向量：既有大小又有方向的量称为向量，记为 $\boldsymbol{a}$. 向量的大小称为向量的模，记作 $\|\boldsymbol{a}\|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$.

(2) 向量的表示：向量在几何上可用有向线段来表示，以点 M 为起点，点 N 为终点的有向线段是一个向量，记为 $\overrightarrow{MN}$. 数学上研究与起点无关的自由向量.

(3) 向量的坐标与模长：在空间直角坐标系下，设点 M 的坐标为 (a_1,b_1,c_1)，点 N 的坐标为 (a_2,b_2,c_2)，则向量 $\overrightarrow{MN}$ 的坐标为 $(a_2-a_1,b_2-b_1,c_2-c_1)$，该向量的模长为

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}.$$

(4) 方向余弦：向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}.$$

方向余弦满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

2. 向量的运算

(1) 加法与减法. 向量的加减法满足平行四边形法则，如图 8.1 所示：

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}.$$

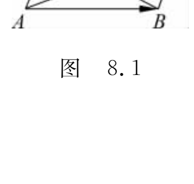

图　8.1

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$.

(2) 向量的数乘. 设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\lambda$ 为实数，则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,$

$\lambda a_y,\lambda a_z)$.

(3) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$,式中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

(4) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\theta\cdot\boldsymbol{e}_c$,其中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,$\boldsymbol{e}_c$ 为同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量,向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}_c$ 成右手系;$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积.

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right).$$

*(5) 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积为 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$,则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|$ 等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 为边的平行六面体的体积.

3. 向量间的关系

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$ 均为非零向量.

(1) 向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件为 $a_x=b_x,a_y=b_y,a_z=b_z$.

(2) $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$,式中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

(3) 射影表示式为:当 $\boldsymbol{a}\neq0$ 时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$;当 $\boldsymbol{b}\neq0$ 时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

(4) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

(5) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

(6) 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件为

$$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0.$$

8.1.2 曲面及其方程

曲面的一般方程为

$$F(x,y,z)=0 \text{ 或 } z=f(x,y) \text{ 等}.$$

(1) **球面**:一般方程为 $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$,常化为标准方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2,$$

其中 (x_0,y_0,z_0) 为球心;R 为半径.

（2）**旋转曲面**：$\begin{cases}F(y,z)=0\\x=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得曲面为 $F(y,\pm\sqrt{z^2+x^2})=0$，绕 z 轴旋转一周所得曲面为 $F(\pm\sqrt{y^2+z^2},z)=0$；类似可得其他坐标平面上的曲线绕同一坐标平面内的坐标轴旋转一周所得曲面的方程.

（3）**柱面**：方程 $F(x,y)=0$ 表示母线平行于 z 轴，准线为 $\begin{cases}F(x,y)=0\\z=0\end{cases}$ 的柱面；方程 $F(y,z)=0$ 表示母线平行于 x 轴，准线为 $\begin{cases}F(y,z)=0\\x=0\end{cases}$ 的柱面；方程 $F(z,x)=0$ 表示母线平行于 y 轴，准线为 $\begin{cases}F(z,x)=0\\y=0\end{cases}$ 的柱面.

（4）常见二次曲面的标准方程

椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$；

椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

椭圆抛物面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$；

双叶抛物面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$.

8.1.3　空间曲线及其方程

（1）两张曲面的交线为曲线. 其一般方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$.

（2）参数式方程为

$$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t).\end{cases}$$

这里为 t 参数.

（3）空间曲线在坐标平面上的投影

设 l：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，消去 z，得 $H(x,y)=0$，则曲线 $\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$ 为曲线 l 在 xOy 面上的投影. 在其余面上的投影方法类似.

8.1.4　平面及其方程

平面与三元一次方程一一对应.

1. 平面的点法式方程

过点 (x_0,y_0,z_0)，以非零向量 $\boldsymbol{r}=(A,B,C)$ 为法向量的平面方程为 $A(x-x_0)+$

$B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

2. 平面的一般式方程

在点法式方程中,令 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$,得到形如 $Ax+By+Cz+D=0$ 的方程.

3. 平面的截距式方程

平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距分别为 a,b,c,当 $abc\neq0$ 时,平面的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

4. 平面的三点式方程

设 $P_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3)$ 为平面上不共线的三点,则有平面方程

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

5. 两个平面之间的关系

设平面 $\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,其中 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 为平面的法向量;平面 $\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,其中 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ 为平面的法向量.

(1) 平行:$\pi_1 /\!/ \pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2(\lambda\neq0)\Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=0\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$;

(2) 垂直:$\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$;

(3) 相交:$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ 不成立;

(4) 重合:$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

6. 两平面的夹角

设平面 $\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,其中 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 为平面的法向量;平面 $\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,其中 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ 为平面的法向量.θ 为两平面的夹角,则

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

7. 点到平面的距离公式

点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

8. 两个平行平面之间的距离公式

设平面 $\pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$，平面 $\pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$，其中 $\boldsymbol{r}=(A,B,C)$ 为这两个平面的法向量. 则两个平面之间的距离为

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

8.1.5　直线及其表示

(1) 直线的一般式方程：两张平面交于一条直线，得直线方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}.$$

(2) 直线的点向式方程(标准式方程)：过点 $P(x_0,y_0,z_0)$，方向为 $\boldsymbol{\tau}=(m,n,p)$ 的直线方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

(3) 直线的参数式方程：点向式方程中，令 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$，得

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt,\end{cases}$$

其中 t 为参数.

(4) 两条直线之间的关系

设直线 $l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$，其中 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ 为直线的方向向量；直线 $l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$，其中 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$ 为直线的方向向量.

① 平行：$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 /\!/ \boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1=\lambda\boldsymbol{s}_2(\lambda\neq0) \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=0 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$；

② 垂直：$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

③ 两直线的夹角：记 θ 为两直线的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\,\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

(5) 点到直线的距离：直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{\tau}$，P 为 L 上一点，则点 Q 到直线 L 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{\tau}|}.$$

(6) 两条异面直线间的距离：M_1 为直线 L_1 上一点，M_2 为直线 L_2 上一点，L_1 与 L_2

的方向分别为$\boldsymbol{\tau}_1$与$\boldsymbol{\tau}_2$,则直线L_1和L_2的公垂线长

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2)|}{|\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2|}.$$

(7)直线与平面的关系

设平面π:$Ax+By+Cz+D=0$,其中$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为平面的法向量,直线l:$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$,其中$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$为直线的方向向量.

① 平行:$\pi /\!/ \boldsymbol{l}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$;

② 垂直:$\pi\perp\boldsymbol{l}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{s}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{s}(\lambda\neq0)\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}=0\Leftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$;

③ 直线在平面上:$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$,且$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

(8)过直线l:$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$的平面束方程是

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

或

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中λ和μ为参数.

注 第二个式子中不包含平面$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

8.2 典型例题分析

8.2.1 题型一 向量代数的相关问题

例 8.1 若$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$,$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$,式中$|\boldsymbol{m}|=2$,$|\boldsymbol{n}|=1$,$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})=\frac{\pi}{2}$,化简表达式$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+1$.

解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+1$

$=(4\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})\cdot(2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n})+3(4\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})-2(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})\cdot(2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n})+1$

$=16|\boldsymbol{m}|^2+9|\boldsymbol{n}|^2+1=16\times4+9\times1+1=74$.

例 8.2 设$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$为两个非零向量,λ为非零常数,若向量$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$垂直于向量$\boldsymbol{b}$,则$\lambda$等于(　　).

(A) $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}$;　　(B) $-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}$;　　(C) 1;　　(D) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

解 所给向量为抽象向量,宜用向量运算公式.如果$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$垂直于向量$\boldsymbol{b}$,因此应有$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$,整理得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=0$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda|\boldsymbol{b}|^2=0,$$

由于$\boldsymbol{b}$为非零向量,因而应有$\lambda=-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}$,故应选(B).

例 8.3　设 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2,\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，问 k 为何值时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形面积为 6.

解　由于

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(2-\boldsymbol{k})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),$$

平行四边形面积为 $A\times B$ 的模. 所以

$$6=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=|2-k|\cdot|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|2-k|\cdot 2,$$

即有 $k-2=\pm 3$，所以

$$k_1=5,\quad k_2=-1.$$

8.2.2　题型二　空间曲线与曲面的相关问题

例 8.4　求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $y+z=1$ 交线在 xOy 平面上投影方程.

解　从曲线方程 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ y+z=1\end{cases}$ 中消去 z，得曲线向 xOy 平面得投影柱面方程 $x^2+y^2+y=1$. 于是曲线在 xOy 平面得投影曲线的方程为

$$\begin{cases}x^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}\\ z=0\end{cases}.$$

例 8.5　求由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成立体在 xOy 面上的投影.

解　由方程 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 消去 z 得到 $x^2+y^2=1$. 这是一个母线平行于 z 轴的圆柱面，这恰好是半球面与锥面的交线 C 关于 xOy 面的投影柱面，因此交线 C 在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}.$$

这是 xOy 面上的一个圆，于是所求立体在 xOy 面上的投影，就是该圆在 xOy 面上所围的部分 $x^2+y^2\leqslant 1$.

例 8.6　求直线 $L:\begin{cases}x=1-2t\\ y=3+t\\ z=2-3t\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影.

解　在三个坐标面上的投影分别为

(1) 在 xOy 平面上：$\begin{cases}x=1-2t\\ y=3+t\\ z=0\end{cases}$；

(2) 在 xOz 平面 $\begin{cases}x=1-2t\\ y=0\\ z=2-3t\end{cases}$；

(3) 在 yOz 平面上$\begin{cases} x=0 \\ y=3+t \\ z=2-3t \end{cases}$.

8.2.3 题型三 平面方程的求解

例 8.7 求通过三平面 $2x+y-z=0$，$x-3y+z+1=0$ 和 $x+y+z-3=0$ 的交点，且平行于平面 $x+y+2z=0$ 的平面方程.

解 所求平面平行于 $x+y+2z=0$，所以该平面的法向量为$(1,1,2)$. 三平面的交点为

$$\begin{cases} 2x+y-z-2=0 \\ x-3y+z+1=0, \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$$

解得 $x=1,y=1,z=1$. 所以所求平面为

$$(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0,$$

即 $x+y+2z-4=0$.

例 8.8 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$，$M_2(0,1,-1)$且垂直于平面 $x+y+z-4=0$，求它的方程.

解 由已知条件知，向量$\overrightarrow{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2}=(-1,0,-2)$与平面 $x+y+z-4=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$的向量积$\overrightarrow{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2}\times\boldsymbol{n}$ 即为所求平面的法向量

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(2,-1,-1),$$

由点法式方程可知 $2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0$ 为所求平面.

例 8.9 求平面 $x-y+2z-6=0$ 与平面 $2x+y+z-5=0$ 的夹角，并判别坐标原点到哪个平面距离更近.

解 设 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,2)$，$\boldsymbol{n}_2=(2,1,1)$为两平面 π_1 与 π_2 的法向量，则 π_1 与 π_2 夹角余弦为

$$\cos\theta=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}\right|=\frac{|1\times2+(-1)\times1+2\times1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2},$$

故两平面夹角 $\theta=\frac{\pi}{3}$，原点到 π_1 与 π_2 距离分别为

$$d_1=\frac{|0-0+2\times0-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\sqrt{6},\quad d_2=\frac{|2\times0+0+0-5|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{6}},\quad d_1>d_2,$$

故平面 $2x+y+z-5=0$ 与原点距离更近.

8.2.4 题型四 直线方程的求解

例 8.10 求过点 $P(2,1,3)$且与直线 l：$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

解法 1 作平面 π 经过 P 点，且与直线 l 垂直，平面 π 的方程为