第一部分

同步练习

第1章

函数与极限

1.1 内容提要

1.1.1 映射与函数

1. 映射的概念

设 X 和 Y 是两个非空集合，如果存在一个对应法则 f，使得对 X 中的每个元素 x，按照法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的**映射**，记作：$f:X\to Y$，并称 y 为元素 x 在映射 f 下的**像**，记作 $y=f(x)$，x 称为元素 y 的一个**原像**，集合 X 称为映射 f 的**定义域**，也记为 D_f，X 中所有元素的像组成的集合称为映射 f 的**值域**，通常记为 $Z(f)$，即 $Z(f)=\{y\,|\,y=f(x),x\in X\}$.

从映射的定义可以看到，映射 f 的值域是集合 Y 的一个子集，即 $Z(f)\subseteq Y$.

如果 $Z(f)=Y$，则称 f 为从 X 到 Y 的**满射**；若对 X 中的任意两个不同的元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为从 X 到 Y 的**单射**；若 f 既是满射又是单射，则称 f 为**一一映射**（或**双射**）.

映射又称为**算子**，根据集合 X 与 Y 的不同情形，映射有不同的习惯称谓，例如从非空集合 X 到数集 Y 的映射称为**泛函**，从非空数集 X 到它自身的映射称为**变换**，从实数集 X 到实数集 Y 的映射又称为**函数**.

2. 函数的概念

设 D 为一个非空实数集，如果存在一个对应法则 f，使得对于每一个 $x\in D$，都能由 f 唯一确定一个实数 y 与之对应，则称对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个**函数**，记作 $y=f(x)$，其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，实数集 D 称为函数的**定义域**，也可记为 $D(f)$或者 D_f. 集合$\{y\,|\,y=f(x),x\in D_f\}$ 称为函数的**值域**，一般记为 $Z(f)$或者 Z_f.

定义域和**对应法则**是函数的两要素，值域由定义域和对应法则确定. 两个函数相同的

充要条件是定义域与对应法则分别相同,因此判断两个函数是否相同,只需验证函数的定义域与对应法则是否分别相同,而与自变量、因变量的符号没有关系.

如果函数没有明确给出定义域,则其定义域一般默认为使得分析表达式有意义的自变量的取值范围.

函数的表示方法主要有公式法、图示法及表格法等,其中公式法是函数关系表示的一种主要形式.

3. 分段函数

根据函数的定义,在表示函数时,并不要求在整个定义域上都用一个数学表达式来表示.事实上,在很多问题中常常遇到一些在定义域的不同子集上具有不同表达式的情况,习惯上把这类函数叫作**分段函数**.

例如**符号函数**

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

是一个分段函数.

注 分段函数在其整个定义域上是一个函数,而不是几个函数.

1.1.2 函数的基本特性

函数的基本特性主要有四种,即奇偶性、单调性、周期性和有界性.

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 上关于原点对称,如果对于 $\forall x \in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**;如果对于 $\forall x \in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

奇函数的图像关于坐标原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称.需要注意的是:函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,因此如果函数的定义域关于原点不对称,则该函数不具有奇偶性.

奇、偶函数的一些常用结论如下:

(1) 常函数为偶函数;

(2) 有限个奇函数的代数和为奇函数,有限个偶函数的代数和为偶函数;

(3) 奇函数与偶函数的乘积为奇函数;

(4) 奇数个奇函数的乘积为奇函数,偶数个奇函数的乘积为偶函数.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在某个区间 D 上有定义,对于 $\forall x_1, x_2 \in D$,且 $x_1 < x_2$,有:

(1) 若 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 D 单调增加(单调递增);

(2) 若 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 D 单调减少(单调递减).

3. 周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在一个正数 T,使得对任意一个 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称该函数为**周期函数**. T 称为函数 $f(x)$的**周期**,满足上式的最小的正数 T_0 称为函数的**最小正周期**,通常我们所说的函数的周期指的是函数的最小正周期.

周期函数的一些常用结论:

(1) 若 $f(x)$的周期为 T,则 $f(ax+b)$的周期为$\frac{T}{|a|}(a\neq 0)$;

(2) 若 $f(x)$和 $g(x)$的周期均为 T,则 $f(x)\pm g(x)$也是周期为 T 的周期函数.

4. 有界性

设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义,若存在正数 M,使得对于 $\forall x\in D$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 D 上**有界**,否则称 $f(x)$在 D 上**无界**.

函数的有界性还可以通过另外一种形式来定义.

若存在实数 a 和 b,使得对 $\forall x\in D$,恒有 $a\leqslant f(x)\leqslant b$,则称函数 $f(x)$在 D 上有界,否则称 $f(x)$在 D 上**无界**,其中 a 称为函数的**下界**,b 称为函数的**上界**.

1.1.3 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f,值域为 Z_f. 如果对于 Z_f 中的每一个 y 值,都存在唯一的满足 $y=f(x)$的 $x\in D_f$ 与之对应,这样确定的以 y 为自变量,以 x 为因变量的函数,称为函数 $y=f(x)$的**反函数**,并记为 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上,一般将 $y=f(x)$的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

显然,反函数 $x=f^{-1}(y)$的定义域为 Z_f,值域为 D_f,且对任意的 $y\in Z_f$,有

$$f[f^{-1}(y)]=y,$$

对任意的 $x\in D_f$,有

$$f^{-1}[f(x)]=x.$$

单调函数一定存在反函数,且函数与反函数具有相同的单调性.

在同一坐标系下,函数 $y=f(x)$与其反函数 $x=f^{-1}(y)$的图像是重合的,$y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

1.1.4 复合函数

已知两个函数

$$y=f(u),\quad u\in D_f,\quad y\in Z_f,$$
$$u=g(x),\quad x\in D_g,\quad u\in Z_g,$$

若 $D_f\cap Z_g\neq\varnothing$,则可通过中间变量 u 将 $u=g(x)$代入 $y=f(u)$构成一个以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数 $y=f[g(x)]$,称 $y=f[g(x)]$为 $y=f(u)$与 $u=g(x)$的**复合函数**.

1.1.5 基本初等函数与初等函数

1. 初等函数的概念

常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数共六大类函数统称为**基本初等函数**.

由基本初等函数经有限次四则运算和(或)复合运算而得到的函数称为**初等函数**.

2. 双曲函数与反双曲函数

(1) 双曲正弦 $y=\mathrm{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2},x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) 双曲余弦 $y=\mathrm{ch}x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2},x\in(-\infty,+\infty)$;

(3) 双曲正切 $y=\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}},x\in(-\infty,+\infty)$;

(4) 反双曲正弦 $y=\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),x\in(-\infty,+\infty)$;

(5) 反双曲余弦 $y=\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),x\in[1,+\infty)$;

(6) 反双曲正切 $y=\mathrm{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x},x\in(-1,1)$.

1.1.6 极限的概念与性质

1. 数列的极限

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,恒有 $|u_n-A|<\varepsilon$ 成立.

注 在数列极限的定义中,一方面,$\varepsilon>0$ 要多小就可以多小,或者说可以任意地小;另一方面,ε 一旦给定,若存在一个正整数 N_0,使得当 $n>N_0$ 时,恒有 $|u_n-A|<\varepsilon$ 成立,则对任意一个大于 N_0 的正整数,都可以作为定义中的 N,即 N 与 ε 有关,但不唯一.

2. 函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists M>0$,当 $x>M$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists M>0$,当 $x<-M$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists M>0$,当 $|x|>M$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $0<x-x_0<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

(5) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $0<x_0-x<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

(6) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

注　上述函数极限的定义中的 M 和 δ 与 ε 有关系，但不唯一.

3. 极限的性质

(1)(唯一性)　若极限 $\lim Y$ 存在，则极限值唯一.

(2)(有界性)　如果 $\lim Y$ 存在，则 Y 是局部有界的. 特别地，若数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在，则 $\{u_n\}$ 不仅是局部有界的，而且是全局有界的.

(3)(保号性)　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$(或 $A<0$)，则 $f(x)$ 在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x)>0$[或 $f(x)<0$].

(4) 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，则有 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

(5) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x)\geqslant g(x)$(或 $f(x)\leqslant g(x)$)，则有 $A\geqslant B$(或 $A\leqslant B$).

注　这里的变量 Y 既可以表示数列，也可以表示函数，下同.

1.1.7　无穷小与无穷大

1. 无穷小的概念及其性质

以 0 为极限的变量称为**无穷小**(或**无穷小量**). 需要注意是，0 是一种特殊的无穷小. 无穷小的概念在整个微积分中有着重要的作用，需要读者引起重视.

无穷小有如下性质：

(1) 有限个无穷小的和是无穷小；

(2) 有界变量与无穷小的乘积是无穷小；

(3) $\lim Y=A\Leftrightarrow Y=A+\alpha$，其中 α 是无穷小(与 Y 同在一个变化过程中).

2. 无穷小的阶

设 α,β 是同一变化过程中的两个无穷小，则

(1) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α **高阶的无穷小**(或 α 是 β 比**低阶的无穷小**)，记作 $\beta=o(\alpha)$.

(2) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称 β 是与 α **同阶的无穷小**，记作 $\beta=O(\alpha)$. 特殊地，当 $c=1$ 时，称 β 与 α 是**等价的无穷小**，记作 $\alpha\sim\beta$.

(3) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$，$k>0$，则称 β 是关于 α 的 k **阶的无穷小**，记作 $\beta=O(\alpha^k)$.

3. 等价无穷小的性质

性质 1　设 α,β,γ 是同一变化过程中的无穷小，则

(1) 若 $\alpha\sim\beta$,则 $\beta\sim\alpha$;

(2) 若 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$,则 $\alpha\sim\gamma$.

性质 2 设 $\alpha,\beta,\bar{\alpha}$ 和 $\bar{\beta}$ 是同一变化过程中的无穷小,且 $\alpha\sim\bar{\alpha},\beta\sim\bar{\beta}$,$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$存在,则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\bar{\alpha}}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha}{\bar{\beta}}=\lim\dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$.

4. 无穷大的概念

如果在某个变化过程中,对于 $\forall M>0$,存在某个时刻,使得在该时刻以后恒有 $|Y|>M$ 成立,则称变量 Y 为**无穷大**(或**无穷大量**). 记作 $\lim Y=\infty$ 或 $Y\to\infty$. 具体地,有:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists$ 正整数 N,当 $n>N$ 时,恒有 $|u_n|>M$ 成立;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists X_0>0$,当 $|x|>X_0$ 时,恒有 $|f(x)|>M$ 成立;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)|>M$ 成立.

注 由于从本质上来讲,在相应的变化趋势下,无穷大的极限是不存在的,常用的极限运算法则不适用,因此无穷大的问题往往转化为无穷小来讨论.

5. 无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一的变化趋势下,无穷小与无穷大有如下关系:若变量 Y 为无穷大,则 $\dfrac{1}{Y}$ 为无穷小;若变量 Y 为无穷小($Y\neq0$),则 $\dfrac{1}{Y}$ 为无穷大.

1.1.8 极限的运算法则

1. 极限的四则运算法则

设极限 $\lim X,\lim Y$ 均存在,则

(1) $\lim(X\pm Y)$存在,且 $\lim(X\pm Y)=\lim X\pm\lim Y$;

(2) $\lim(X\cdot Y)$存在,且 $\lim(X\cdot Y)=\lim X\cdot\lim Y$;

(3) 若 $\lim Y\neq0$,则 $\lim\dfrac{X}{Y}$存在,且有 $\lim\dfrac{X}{Y}=\dfrac{\lim X}{\lim Y}$.

推论 1 若 $\lim X$ 存在,C 为常数,则 $\lim(CX)$存在,且 $\lim(C\cdot X)=C\cdot\lim X$.

推论 2 若 $\lim X$ 存在,k 为正整数,则 $\lim X^k$ 存在,且 $\lim(X^k)=(\lim X)^k$.

2. 复合函数的极限运算法则

设函数 $y=f[g(x)]$是由函数 $u=g(x)$与函数 $y=f(u)$复合而成,$y=f[g(x)]$在点 x_0 的某个去心邻域内有定义,若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$,$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,且 $g(x)$在 x_0 的某个去心邻域满足 $g(x)\neq u_0$,则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

1.1.9 极限存在准则与两个重要极限

1. 夹逼定理

如果变量 X,Y,Z 满足 $X\leqslant Y\leqslant Z$，且 $\lim X=\lim Z=A$（A 为某常数），那么 $\lim Y$ 也存在且 $\lim Y=A$.

2. 单调有界准则

（1）若数列$\{u_n\}$单调且有界，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 一定存在.

（2）设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个左邻域内单调且有界，则左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$一定存在.

注 对于自变量不同的变化过程（$x\to x_0^+,x\to+\infty,x\to-\infty$），都有相应的单调有界准则.

*（3）[柯西（Cauchy）收敛准则] 数列$\{u_n\}$收敛的充分必要条件是：对于$\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $m>N,n>N$ 时，有$|x_n-x_m|<\varepsilon$.

3. 数列与子数列的关系

从数列$\{u_n\}$中抽取无穷多项，在不改变原有次序的情况下构成的新数列称为数列$\{u_n\}$的**子数列**，简称**子列**. 记作$\{u_{n_k}\}$：$u_{n_1},u_{n_2},\cdots,u_{n_k},\cdots$. 其中 n_k 表示 u_{n_k} 在原数列$\{u_n\}$中的位置，k 表示 u_{n_k} 在子列中的位置.

数列$\{u_n\}$与子数列$\{u_{n_k}\}$之间的关系.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A\Leftrightarrow$ 对$\{u_n\}$的任何子数列$\{u_{n_k}\}$有$\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=A$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A\Leftrightarrow$偶数子列$\{u_{2k}\}$和奇数子列$\{u_{2k+1}\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k+1}=A$.

（3）当$\{u_n\}$是单调数列时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A\Leftrightarrow$存在某个子数列$\{u_{n_k}\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=A$.

4. 海涅（Heine）定理

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$对任何数列$\{x_n\}$，$x_n\to x_0(n\to\infty)$，且 $x_n\neq x_0$，有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

注 海涅定理给出了数列极限与函数极限之间的关系.

5. 两个重要公式

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 该极限属于$\dfrac{0}{0}$类型的未定式. 它可以推广到$\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或者$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$. 该极限属于 1^∞类型的未定式. 它可以推广到$\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}$.

1.1.10 函数的连续性

函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续的三个等价定义为：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$;

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,其中 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$;

(3) $\forall \varepsilon>0,\exists \delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立.

$y=f(x)$在某个区间内连续的定义.

如果函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内每一点处都连续,则称 $y=f(x)$在(a,b)内连续;如果 $y=f(x)$在(a,b)内连续且在 a 处右连续,则称 $y=f(x)$在$[a,b)$上连续.类似可以定义 $y=f(x)$在区间$(a,b]$和$[a,b]$上的连续性.

1.1.11 函数的间断点

1. 间断点的定义

若 $y=f(x)$在点 x_0 处出现如下三种情况之一,则称 x_0 为 $y=f(x)$的间断点。

(1) $y=f(x)$在点 x_0 处无定义;

(2) $y=f(x)$在点 x_0 处有定义,但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在;

(3) $y=f(x)$在点 x_0 处有定义,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

2. 间断点的类型

设 x_0 是 $f(x)$的间断点,且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在,则称 x_0 为 $f(x)$的**第一类间断点**,其中:

(1) **可去间断点**:$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$;

(2) **跳跃间断点**:$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

设 x_0 是 $f(x)$的间断点,且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$中至少有一个不存在,则称 x_0 为 $f(x)$的**第二类间断点**.

特殊地,若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$中至少有一个为$\infty$,则称 x_0 为**无穷间断点**.例如 $x=0$ 是 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$的第二类间断点中的无穷间断点.

1.1.12 连续函数的性质

1. 连续函数的四则运算

若函数 $f(x),g(x)$都在点 x_0 处连续,则 $f(x)\pm g(x),f(x)g(x),\dfrac{f(x)}{g(x)}[g(x_0)\neq 0]$在点 x_0 处也连续.

2. 复合函数的连续性

若 $y=f(u)$在点 u_0 处连续,$u=g(x)$在点 x_0 处连续且 $u_0=g(x_0)$,则 $y=f[g(x)]$在