

3.1 概述

3.1.1 振动的概念

质点或物体在外力的作用下,通过其平衡位置作往复运动,这种运动形式称为振动。振动是生产和生活中常见的物理现象。振动可以用位移与时间的关系曲线来表示。按照振动曲线是否具有重复性,可将振动分为周期性振动和非周期性振动。如果随着时间 t 的增长,时间-位移曲线出现重复的运动规律,那么这种运动被称为周期性振动,否则称为非周期性振动,如图 3-1 所示。

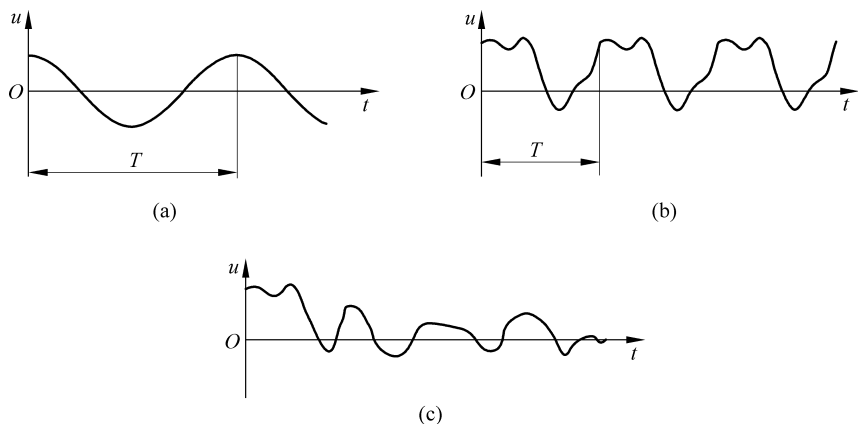


图 3-1 典型振动示意图

(a) 规则周期振动; (b) 不规则周期振动; (c) 非周期振动

运动规律重复出现的最短时间称为周期 T ,单位时间内的运动周期称为频率 f ,最大位移的绝对值称为振幅 u_0 。如图 3-2 所示,当一个质点 A 沿着半径为 a 的圆周由初相位角 ϵ 处以 ω 的速率运动时,它在 y 轴上的投影 A' 点正好在圆心的上下两侧作往复运动,其运动规律可表示为

$$y(t) = a \cos(\omega t + \epsilon) \quad (3-1)$$

圆频率 ω 、工程频率 f 和周期 T 可表示为

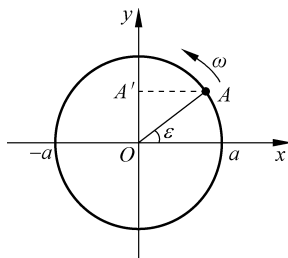


图 3-2 圆周上一点的运动规律

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3-2)$$

由式(3-1),可以求得振动时的速度和加速度

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -a\omega \sin(\omega t + \epsilon) = a\omega \cos\left(\omega t + \epsilon + \frac{\pi}{2}\right) \\ \ddot{y}(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t + \epsilon) = a\omega^2 \cos(\omega t + \epsilon + \pi) \end{cases} \quad (3-3)$$

最大加速度 $\ddot{y}_{\max}$ 、振动惯性力的幅值 $F_{\max}$ 为

$$\begin{cases} \ddot{y}_{\max} = a\omega^2 \\ \ddot{y}_{\max} = \frac{4\pi^2}{T^2}a = 4\pi^2 a f^2 \end{cases} \quad (3-4)$$

$$F_{\max} = m\ddot{y}_{\max} = 4\pi^2 m a f^2 \quad (3-5)$$

振动过程中的总能量 W 为动能和弹性势能之和,即

$$W = \frac{1}{2}m\dot{y}^2(t) + \frac{1}{2}ky^2(t) = \frac{1}{2}ka^2\cos^2(\omega t + \epsilon) + \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\omega t + \epsilon) \quad (3-6)$$

式中, k 为弹性系数,也可称作刚度。

由于圆频率 $\omega^2 = k/m$, 即 $k = m\omega^2$, 故式(3-6)可写成

$$W = \frac{1}{2}ka^2 [\cos^2(\omega t + \epsilon) + \sin^2(\omega t + \epsilon)] = \frac{1}{2}ka^2 = 2m\pi^2 a^2 f^2 \quad (3-7)$$

3.1.2 波动的概念

当振动由起振点向各个方向开始传播后,在某一时刻 τ , 振动所达到各点的轨迹称为波前。如图 3-3 所示, 振动相位相同的各点的轨迹称为波面, 振动传播的方向称为波线, 单位时间内振动传播的距离为波速 c , 振动在一个周期 T 内传播的距离, 即振动相位相同的两点间的最小距离称为波长 λ 。如果用 $x = a \cos \omega t$ 表示振动中心 O 点处的振动规律, 其中 x 为位移, a 为振幅, ω 为圆频率, t 为时间, 且振动传至离振动中心为 r 处的点 A 时经过的时间为 T , 则有 $\tau = r/c$ 。

当 $\tau = T$ 时, $r = \lambda$, 因此

$$T = \frac{\lambda}{c}, \quad \lambda = cT \quad (3-8)$$

考虑到上述关系, 若振动传播过程中未发生衰减, 则当波到达 A 点时, 由于 A 点开始振动的时间比 O 点晚 τ , 故 A 点处的振动为

$$x = a \cos \omega(t - \tau) \quad (3-9)$$

或写作

$$x = a \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = a \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{c} r \right) = a \cos \left(\omega t - 2\pi \frac{r}{\lambda} \right) \quad (3-10)$$

上式即为 x 方向上波传播的基本方程。

值得注意的是, 波动是振动状态在介质中的传播, 而不是质点的流动, 质点不会随着波

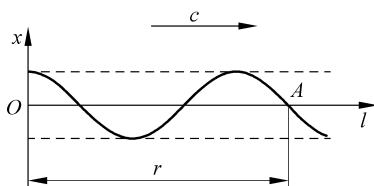


图 3-3 典型波动示意图

的传播发生流动,而只在平衡位置附近发生振动,因此波的传播是振动状态的传播,且与传播介质的特性密切相关。

本章我们重点介绍振动和波动的相关知识,波动部分将结合土介质中的波动问题在第5章和第6章中详细介绍。

3.2 单自由度体系的振动

3.2.1 自由振动与受迫振动

自由振动是指体系在无外部干扰力的情况下发生的振动,如果有干扰力的作用,则称为受迫振动(或强迫振动)。自由振动体系和受迫振动体系都可依照体系是否考虑阻尼进行划分,分为有阻尼振动体系和无阻尼振动体系。

由于无阻尼自由振动体系的振幅不发生衰减,因此体系会在惯性力和弹性力的作用下保持振动。对于有阻尼的自由振动体系,其振幅将随振动时间的增长而发生衰减,阻尼越大,衰减越快。

对于有外部荷载作用的受迫振动体系,如果外荷载是一个周期荷载,其频率为 θ ,则当此频率和振动体系的自由振动频率 ω 很接近或相同时,运动的振幅将随振次的增大而迅速增大,这就是常说的共振现象。在实际工程中,共振将导致振动幅度过大,这意味着土体的位移过大,因此在设计中应当避免发生共振。在无阻尼的理想条件下,共振的振幅理论上为无穷大。在有阻尼的情况下,虽然共振的振幅已经被大大削弱,但它仍对体系的安全性构成威胁。此外,在一般频率条件下,有阻尼体系作强迫振动时,阻尼的作用主要体现在瞬态反应中,随着时间的增加,振动体系趋于稳态振动。稳态振动是一种常见的运动形态,大多数的研究都基于稳态反应。以下主要对自由振动和受迫振动的稳态反应进行分析。

3.2.2 单自由度体系的振动方程

由于直接考虑多自由度体系较为复杂,而且多自由度体系问题有时可以简化为单自由度体系问题,因此下面先介绍单自由度体系的振动问题。

单自由度振动体系可由图3-4(a)表示。图中质点的质量为 m ,刚度系数为 k ,阻尼为 c ,杆件重量不计。假设在质点处施加一水平方向荷载 F ,则质点将离开平衡位置,在水平方向作简谐运动,相对于平衡位置产生位移 u 。质点的运动体系可以用图3-4(b)表示。

下面根据达朗贝尔原理,建立单自由度体系的动力平衡方程。质点的受力如图3-5所示,作用于质点上的力包括弹性恢复力 F_s 、阻尼力 F_D 、惯性力 F_I 以及外荷载 F 。

1. 弹性恢复力 F_s

由胡克定律可知,弹性力 F_s 的大小与质点位移 u 成正比,方向与位移方向正好相反,可表示为

$$F_s = -ku \quad (3-11)$$

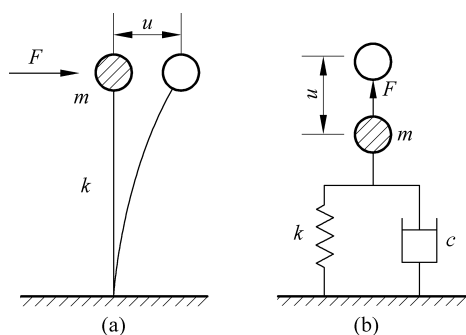


图 3-4 单自由度体系的振动

(a) 单自由度体系的振动形式；(b) 单自由度体系的运动模型

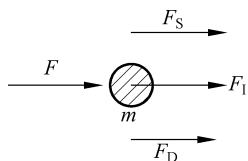


图 3-5 单自由度体系的受力分析

2. 阻尼力 F_D

阻尼力的大小与质点速度成正比,方向与速度 $\dot{u}$ 方向相反,可表示为

$$F_D = -c\dot{u} \quad (3-12)$$

3. 外荷载 F

外荷载 F 是直接作用在质点上的一个与时间 t 有关的动荷载,可表示为

$$F = m\ddot{u}_g \quad (3-13)$$

式中, $\ddot{u}_g$ 表示外荷载对体系作用的加速度。

4. 惯性力 F_I

惯性力是一种假想作用于质点上的力,其大小等于质量与加速度的乘积,与质点的位移成正比,方向与位移方向相反,可表示为

$$F_I = -m\ddot{u} \quad (3-14)$$

质点的动力平衡条件为

$$F_I + F_D + F_S + F = 0 \quad (3-15)$$

将式(3-11)~式(3-14)代入式(3-15),可得

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = m\ddot{u}_g \quad (3-16)$$

令自振频率为

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (3-17)$$

引入黏性阻尼比 $\zeta = c/c_r$, c_r 为临界阻尼系数,有

$$\zeta = \frac{c}{c_r} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (3-18)$$

则式(3-16)可写为

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = \ddot{u}_g \quad (3-19)$$

上式即为单自由度体系的动力平衡方程。

3.2.3 单自由度体系的自由振动

自由振动体系无外荷载作用,即 $F(t)=0$,因此 $\ddot{u}_g=0$,式(3-19)改写为

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (3-20)$$

可以看出,该式实际上为齐次常微分方程,其解的形式如下:

$$u = A e^{\alpha t} \quad (3-21)$$

式中, A 为常数, α 为特征方程的根。

式(3-20)的特征方程为

$$\alpha^2 + 2\zeta\omega\alpha + \omega^2 = 0 \quad (3-22)$$

特征方程的解为

$$\alpha_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega \pm \sqrt{4\zeta^2\omega^2 - 4\omega^2}}{2} = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3-23)$$

由于特征值的解中含有根式,阻尼比的大小会影响根式的计算结果,以下将对阻尼比进行分类讨论。

1. 低阻尼体系

当 $\zeta < 1$ 时,该体系为低阻尼体系。低阻尼体系中,特征方程的两个根(见式(3-23))均为复数,即

$$\alpha_{1,2} = -\zeta\omega \pm i\omega\sqrt{1-\zeta^2} \quad (3-24)$$

此时微分方程的解为

$$u = e^{-\zeta\omega t} (A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t) \quad (3-25)$$

式中, $\omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$; A_1, A_2 为常数,可由初始条件确定。当 $t=0$ 时,初始位移 u_0 是给定的,而初速度为零,即

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \dot{u}(t)|_{t=0} = 0 \quad (3-26)$$

则有

$$A_1 = u_0, \quad A_2 = \frac{\zeta\omega u_0}{\omega_d} \quad (3-27)$$

$$u = e^{-\zeta\omega t} \left(u_0 \cos\omega_d t + \frac{\zeta\omega u_0}{\omega_d} \sin\omega_d t \right) \quad (3-28)$$

利用三角函数变换,上式写作

$$u = u_0 e^{-\zeta\omega t} \frac{\cos(\omega_d t - \psi)}{\cos\psi} \quad (3-29)$$

式中, ψ 为相位角,其定义为

$$\tan\psi = \frac{\omega\zeta}{\omega_d} = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3-30)$$

式(3-29)是一个衰减函数,随着时间 t 的增加,位移幅值将逐渐减小。

2. 超阻尼体系(过阻尼体系)

当阻尼比 $\zeta > 1$ 时,特征方程的两个根均为实数,即

$$\alpha_{1,2} = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3-31)$$

此时方程(3-22)的解为

$$u = u_0 \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} e^{-\omega_1 t} - u_0 \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} e^{-\omega_2 t} \quad (3-32)$$

式中, ω_1 和 ω_2 为两个参数, 分别为

$$\omega_1 = \omega(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \quad (3-33)$$

$$\omega_2 = \omega(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \quad (3-34)$$

由式(3-32)可以看出, 超阻尼体系的运动不再表现为振动, 而是随着时间 t 的增大逐渐趋近于零。

3. 临界阻尼体系

临界阻尼体系指的是阻尼比 $\zeta = 1$ 的体系, 此时特征方程有两个相等的实根, 即

$$\alpha_{1,2} = -\omega \quad (3-35)$$

方程(3-22)的解为

$$u = (A_1 + A_2 t) e^{-\omega t} \quad (3-36)$$

式中, A_1 、 A_2 是需要由初始条件确定的两个常数。

由初始条件(3-26), 得到位移的解为

$$u = u_0(1 + \omega t) e^{-\omega t} \quad (3-37)$$

可以看出, 此时的运动也不再呈振动形式, 而是随着时间 t 的增加而趋于零。

三种阻尼水平下单自由度体系的自由振动如图 3-6 所示。

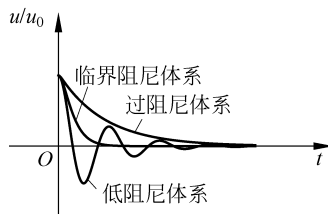


图 3-6 三种阻尼水平下单自由度体系的自由振动情况

3.2.4 单自由度体系的受迫振动

受迫振动也称强迫振动, 指外荷载持续作用于质点上时, 体系发生的振动。在 3.2.3 节中, 介绍了质点上无外荷载作用的情况, 而在大多数动力问题分析中, 常常存在外荷载。当有外荷载作用时, 体系的振动特性将与自由振动的特性有所不同。

1. 简谐荷载

简谐荷载可表示为

$$F = F_0 \sin \theta t \quad (3-38)$$

式中, θ 为外荷载的振动频率。

其动力平衡方程为

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = \frac{F_0}{m} \sin \theta t \quad (3-39)$$

由初始条件

$$u = u(0), \quad \dot{u} = \dot{u}(0) \quad (3-40)$$

可得式(3-39)的全解为

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) + C \sin \theta t + D \cos \theta t \quad (3-41)$$

式中, $\omega_d = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$; A, B, C, D 为常数, 可由初位移和初速度确定。

式(3-41)给出的位移解实际上包括瞬态反应(前两项)和稳态反应(后两项)两个部分, 在振动片刻后, 前者会迅速衰减至可忽略的水平, 因此通常只考虑后者, 下面对稳态反应进行详细分析。将稳态反应部分的位移解 $u(t) = C \sin \theta t + D \cos \theta t$ 代入式(3-39), 可得

$$[(\omega^2 - \theta^2)C - 2\zeta\omega\theta D] \sin \omega t + [2\zeta\omega\theta C + (\omega^2 - \theta^2)D] \cos \omega t = \frac{F_0}{m} \sin \theta t \quad (3-42)$$

由此可得

$$\begin{cases} (\omega^2 - \theta^2)C - 2\zeta\omega\theta D = \frac{F_0}{m} \\ 2\zeta\omega\theta C + (\omega^2 - \theta^2)D = 0 \end{cases} \quad (3-43)$$

由体系刚度系数 $k = \omega^2 m$, 上式可写作

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)C - 2\zeta \frac{\theta}{\omega} D = \frac{F_0}{k} \\ 2\zeta \frac{\theta}{\omega} C + \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)D = 0 \end{cases} \quad (3-44)$$

求解该方程组可得

$$C = \frac{F_0}{k} \frac{1 - \theta^2/\omega^2}{(1 - \theta^2/\omega^2)^2 + (2\zeta\theta/\omega)^2} \quad (3-45)$$

$$D = \frac{F_0}{k} \frac{-2\zeta\theta/\omega}{(1 - \theta^2/\omega^2)^2 + (2\zeta\theta/\omega)^2} \quad (3-46)$$

由此得到简谐荷载作用下有阻尼体系的稳态反应为

$$u(t) = \frac{F_0}{k} \frac{[1 - (\theta^2/\omega^2)] \sin \theta t - (2\zeta\theta/\omega) \cos \theta t}{(1 - \theta^2/\omega^2)^2 + (2\zeta\theta/\omega)^2} \quad (3-47)$$

由三角函数变换, 可将上式改写为

$$u = u_0 \sin(\theta t - \psi) \quad (3-48)$$

式中, u_0 为位移振幅, 即

$$u_0 = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \theta^2/\omega^2)^2 + (2\zeta\theta/\omega)^2}} \quad (3-49)$$

相位角 ψ 表示为

$$\tan \psi = \frac{c\theta/k}{1 - m\theta^2/k} \quad (3-50)$$

有时为了将动力特性与静力特性进行比较, 需要计算动力放大系数。动力放大系数可由荷载频率为零的条件得到, 即令 $\theta = 0$, 此时静位移 u_{st} 为

$$u_{st} = \frac{F_0}{k} \quad (3-51)$$

则动力放大系数为

$$\beta = \frac{u_0}{u_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \theta^2/\omega^2)^2 + (2\zeta\theta/\omega)^2}} \quad (3-52)$$

由于体系的质量 m 常可忽略,则位移幅值和相位角可写为

$$u_0 \big|_{m=0} = \frac{F_0/k}{\sqrt{1 + (c\theta/k)^2}} \quad (3-53)$$

$$\tan\psi \big|_{m=0} = \frac{c\theta}{k} \quad (3-54)$$

不同阻尼比的体系动力放大系数与频比的关系如图 3-7 所示,相位角与频比的关系如图 3-8 所示。

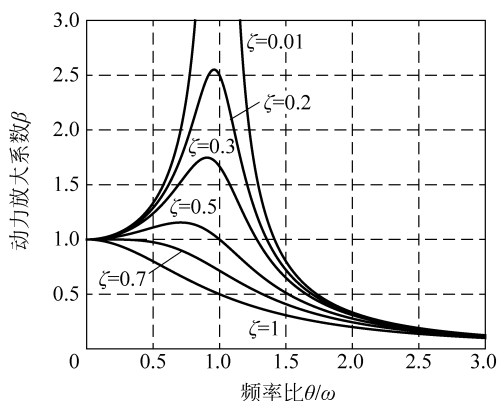


图 3-7 不同阻尼水平下的动力放大系数

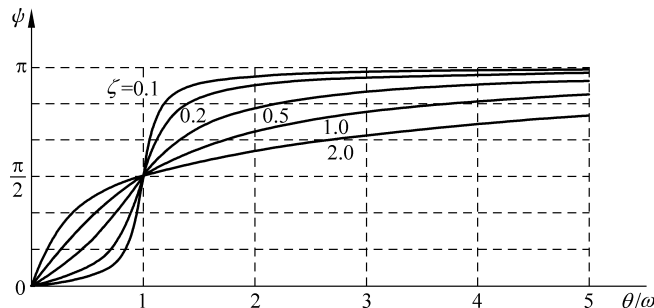


图 3-8 单自由度体系受迫振动发生位移的相位角

2. 任意荷载(杜哈梅积分)

图 3-9 所示为任意荷载的时程曲线,对荷载 $F(t)$ 在时域内进行微分, $F(t)$ 就可分为无数个脉冲,每个脉冲的作用时间为 $d\tau$ 。显然,在任意时刻 τ ,大小为 $F(t)d\tau$ 的脉冲反应为 $[F(t)d\tau]h(t-\tau)$,其中 $h(t-\tau)$ 为单位脉冲反应函数,它表示体系在单位脉冲量作用时的反应,其表达式为

$$h(t-\tau) = u(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)], \quad t \geq \tau \quad (3-55)$$

体系在时刻 t 的反应为从荷载开始作用到 t 时刻时所有脉冲反应之和,即

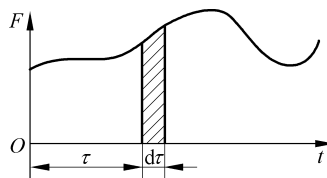


图 3-9 任意荷载的时程曲线

$$u(t) = \int_0^t F(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3-56)$$

上式为任意荷载作用下线性动力体系的解,通常称作卷积积分。

将单位脉冲响应函数式(3-55)代入卷积积分,可得

$$u = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (3-57)$$

上式即为杜哈梅积分式。当阻尼比很小,即 $\zeta \ll 1$ 时,上式变为

$$u = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau)] d\tau \quad (3-58)$$

由杜哈梅积分可以求解任意荷载作用下体系的振动反应。由于式(3-58)的形式十分复杂,一般不考虑其解析解,通常采用数值方法求解。

3. 共振

共振是振动体在周期性变化的外力作用下,当外荷载的频率与振动体系的固有频率很接近或相等,或等于整数倍时,振幅急剧增大的现象。发生共振时体系的振幅处于峰值。由图 3-7 可以看出,位移振幅峰值出现的位置,对应的振幅曲线斜率为零,即

$$\frac{du_0}{d\theta} = 0: \frac{\theta}{\omega} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \Rightarrow \theta = \omega \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (3-59)$$

如果体系的阻尼系数很小,当荷载的振动频率非常接近体系自振频率时,位移振幅为最大,即发生共振现象。

如果体系的阻尼系数较大,体系的自振频率会相对较小,特别地,在临界阻尼水平下,体系的自振频率为零,这意味着临界阻尼抑制了振动的发生。

如果体系的阻尼系数很大,比如过阻尼体系,此时体系将不会发生共振。

由于在土木工程中,大多数情况下阻尼比小于 0.25,共振频率非常接近自振频率,因此可以认为当荷载的振动频率非常接近或等于体系的自振频率时,体系即发生共振,即

$$\theta = \omega \quad (3-60)$$

共振时的动力放大系数为

$$\beta = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3-61)$$

4. 耗散功

下面分析一个完整振动周期内的能量耗散情况。外荷载 F 在一个振动周期内做的功为

$$W = \int_{\omega t=0}^{2\pi} F \frac{du}{dt} dt \quad (3-62)$$

假设外荷载是一个简谐荷载,将式(3-38)和式(3-48)代入上式可得

$$W = \pi F_0 u_0 \sin\phi \quad (3-63)$$

定义能量耗散率 D 为单位时间内的能量耗散,由于一个周期 T 的时间为 $2\pi/\theta$,则

$$D = \frac{W}{T} = \frac{1}{2} F_0 u_0 \theta \sin \psi \quad (3-64)$$

可以看出,能量的耗散速度与荷载的大小、位移幅值以及频率有关。将位移幅值 u_0 和相位角 ψ 的表达式(3-53)和式(3-54)代入式(3-63),则有

$$W = \pi c \theta u_0^2 \quad (3-65)$$

特别地,在静力条件下,即 $\theta=0$ 时,或不考虑阻尼,即 $c=0$ 时,无能量耗散,体系的运动不发生衰减。但是,当荷载频率 θ 非常大时,并不意味着能量的耗散会非常快,因为在高频条件下,体系的位移幅值 u_0 将会非常小,图 3-7 可以说明这一点。

3.3 多自由度体系的振动

前面讨论的是单自由度体系的振动问题,对于多层建筑、地基、土坝等研究对象,往往视为多自由度体系。多自由度体系的振动特性与单自由度体系有所不同。下面首先对两自由度体系进行分析,进而扩展到 n 个自由度体系的一般情况。

3.3.1 两自由度体系的振动方程

图 3-10 所示的两自由度体系中,两质点的质量分别为 m_1 、 m_2 ,侧向刚度分别为 k_1 、 k_2 ,阻尼系数分别为 c_1 、 c_2 ,两质点由不计重力的杆件支撑在刚性地面上。

当发生振动时,两质点离开平衡位置发生位移,位移量分别为 u_1 和 u_2 。如图 3-11 所示,作用于两质点的力包括弹性力、阻尼力、惯性力和外荷载。将体系视为线性结构,弹性力的大小与质点刚度和质点位移成正比。值得注意的是,此时 m_1 的受力不仅与连接地面和 m_1 的杆件有关,还与连接 m_1 和 m_2 的杆件有关,则弹性恢复力为

$$F_{S1} = F'_{S1} + F''_{S1} = k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2) \quad (3-66)$$

$$F_{S2} = k_2 (u_2 - u_1) \quad (3-67)$$

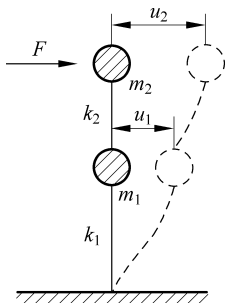


图 3-10 两自由度体系的振动情况

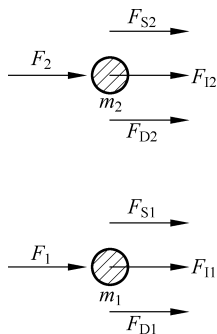


图 3-11 两自由度体系的受力分析

阻尼力与阻尼系数和质点速度有关,即

$$F_{D1} = c_1 \dot{u}_1 + c_2 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \quad (3-68)$$

$$F_{D2} = c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \quad (3-69)$$

惯性力与质量和加速度有关,即