

第一部分 算 术

1. 数的概念与运算

(1) 数的概念与性质

1. (2003) 记不超过 10 的质数的算术平均数为 M , 则与 M 最接近的整数是 [].

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

答 C.

分析 本题主要考查了质数的概念及加法、除法运算.

由于不超过 10 的质数只有 2, 3, 5, 7, 它们的算术平均数为

$$M = \frac{2+3+5+7}{4} = 4.25,$$

所以与 M 最接近的整数是 4.

故正确选项为 C.

2. (2003) A, B, C, D, E 5 支球队相互进行循环赛, 现已知 A 队已赛过 4 场, B 队已赛过 3 场, C 队已赛过 2 场, D 队已赛过 1 场, 则此时 E 队已赛过 [].

A. 1 场

B. 2 场

C. 3 场

D. 4 场

答 B.

分析 本题主要考查了奇偶数的运算性质及选择题的一种特殊解法——排除法.

解法 1 由于两支球队进行一场比赛后, 两队的比赛场次数要各加 1, 所以 A, B, C, D, E 5 支球队的所有比赛场次之和一定是 2 的倍数, 即为偶数. 已知 A, B, C, D 4 队的比赛场次之和为 $4+3+2+1=10$, 所以 E 队的比赛场次只能是偶数, 这样就排除了选项 A, C. 又因为 A 队已赛过 4 场, 说明 A 队已赛完, 即 D 队已与 A 队赛完, 所以 E 队的比赛场次不能是 4, 不然 E 与 D 已赛过, 与 D 队已赛过 1 场矛盾. 这样选项 D 也被排除.

故正确选项为 B.

解法 2 本题也可以通过以下赛程表得到正确选项 B.

	A	B	C	D	E
A	×	已赛	已赛	已赛	已赛
B	已赛	×	已赛		已赛
C	已赛	已赛	×		
D	已赛			×	
E	已赛	已赛			×

已知 A 队已赛过 4 场,这 4 场只能是 A 队分别与 B, C, D, E 4 队进行比赛. 而 B 队已赛过 3 场,由于 D 队只赛一场且已与 A 队赛完,所以这 3 场只能是 B 队分别与 A, C, E 3 队进行比赛. 至此,赛程表完成.

3. (2009) 若将正偶数 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, … 依次排成一行:

246810121416…

则从左向右数的第 101 个数码是 [].

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答 A.

分析 本题主要考查了奇偶数的概念.

前 100 个正整数中有 50 个偶数,其中一位数字的有 4 个,即 2, 4, 6, 8; 两位数字的有 45 个,即 10, 12, 14, …, 98; 三位数字的有 1 个,即 100. 将它们按要求排成一行共有 97 位,所以从第 98 位开始依次是 102104…, 故第 101 个数码是 1.

故正确选项为 A.

4. (2011) 设 $S = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + 3^5 - 3^6 + 3^7$, 则 S 被 4 除的余数是 [].

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

答 C.

分析 本题主要考查了简单整数的除法及余数的概念.

由于

$$\begin{aligned} S &= 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + 3^5 - 3^6 + 3^7 = 3 + (-3^2 + 3^3) + (-3^4 + 3^5) + (-3^6 + 3^7) \\ &= 3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^4 + 2 \times 3^6, \end{aligned}$$

且 $3^2, 3^4, 3^6$ 除以 4 的余数均为 1, 所以 S 除以 4 的余数也为 1.

故正确选项为 C.

(2) 分数运算

1. (2003) 已知 $a = \frac{2001}{2002}, b = \frac{2002}{2003}, c = \frac{2003}{2004}$, 则 [].

A. $a > b > c$

B. $b > c > a$

C. $c > a > b$

D. $c > b > a$

答 D.

分析 本题主要考查了数的简单运算及判断两个数大小的常用方法.

解法 1 由于

$$\begin{aligned} b - a &= \frac{2002}{2003} - \frac{2001}{2002} = \frac{2002^2 - 2001 \times 2003}{2003 \times 2002} \\ &= \frac{2002^2 - (2002 - 1) \times (2002 + 1)}{2003 \times 2002} \\ &= \frac{1}{2003 \times 2002} > 0, \end{aligned}$$

所以 $b > a$. 类似地可知 $c > b$.

故正确选项为 D.

解法 2 由于

$$\frac{b}{a} = \frac{2002^2}{2001 \times 2003} = \frac{2002^2}{(2002-1)(2002+1)} = \frac{2002^2}{2002^2-1} > 1,$$

所以 $b > a$. 类似地可知 $c > b$.

解法 3 考虑函数 $f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$, 易知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调递增函数, 故

$$f(2002) < f(2003) < f(2004),$$

即 $c > b > a$.

2. (2008) $\frac{a}{b} = -\frac{3}{5}, \frac{b}{c} = -\frac{7}{9}, \frac{d}{c} = -\frac{5}{2}$, 则 $\frac{a}{d} = [\quad]$.

A. $-\frac{14}{75}$

B. $\frac{14}{75}$

C. $\frac{75}{14}$

D. $-\frac{75}{14}$

答 A.

分析 本题主要考查了分数的乘除运算.

因为 $\frac{a}{b} = -\frac{3}{5}, \frac{b}{c} = -\frac{7}{9}, \frac{d}{c} = -\frac{5}{2}$, 所以 $\frac{a}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{7}{9}\right) \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{14}{75}$.

故正确选项为 A.

3. (2011) 若 $\frac{a}{b} = 20, \frac{b}{c} = 10$, 则 $\frac{a+b}{b+c}$ 的值为 $[\quad]$.

A. $\frac{11}{21}$

B. $\frac{21}{11}$

C. $\frac{110}{21}$

D. $\frac{210}{11}$

答 D.

分析 本题主要考查了分数运算、简单表达式求值.

因为 $\frac{a}{b} = 20, \frac{b}{c} = 10$, 所以

$$\frac{a+b}{b+c} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{1 + \frac{c}{b}} = \frac{20+1}{1+\frac{1}{10}} = \frac{210}{11}.$$

故正确选项为 D.

4. (2015) 若实数 a, b, c 两两不相等, 则三个数 $\frac{a-b}{b-c}, \frac{b-c}{c-a}, \frac{c-a}{a-b}$ 中负数的个数是 $[\quad]$.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

答 C.

分析 本题考查了分子、分母的正负号与商的正负号之间的关系.

解法 1 不妨设 $a < b < c$, 则 $\frac{a-b}{b-c} > 0, \frac{b-c}{c-a} < 0, \frac{c-a}{a-b} < 0$. 所以 $\frac{a-b}{b-c}, \frac{b-c}{c-a}, \frac{c-a}{a-b}$ 三个数中有两个负数.

故正确选项为 C.

解法 2 取 $a = -1, b = 0, c = 1$, 代入得 $\frac{a-b}{b-c} = 1, \frac{b-c}{c-a} = -\frac{1}{2}, \frac{c-a}{a-b} = -2$, 有两个负数.

故正确选项为 C.

(3) 比与百分数的运算

1. (2006) 某型号的变速自行车主动轴有 3 个同轴的齿轮, 齿数分别为 48, 36 和 24, 后轴上有 4 个同轴的齿轮, 齿数分别是 36, 24, 16 和 12, 则这种自行车共可获得 [] 种不同的变速比.

A. 8

B. 9

C. 10

D. 12

答 A.

分析 本题主要考查两个数的比的大小.

主动轴上的三个齿轮的齿数分别与从动轴(后轴)上的四个齿轮的齿数做比, 得

$$\begin{aligned}\frac{48}{36} &= \frac{4}{3}, & \frac{48}{24} &= 2, & \frac{48}{16} &= 3, & \frac{48}{12} &= 4; \\ \frac{36}{36} &= 1, & \frac{36}{24} &= \frac{3}{2}, & \frac{36}{16} &= \frac{9}{4}, & \frac{36}{12} &= 3; \\ \frac{24}{36} &= \frac{2}{3}, & \frac{24}{24} &= 1, & \frac{24}{16} &= \frac{3}{2}, & \frac{24}{12} &= 2.\end{aligned}$$

由于 $\frac{48}{16} = \frac{36}{12}, \frac{48}{24} = \frac{24}{12}, \frac{36}{36} = \frac{24}{24}, \frac{36}{24} = \frac{24}{16}$, 所以这种自行车共可获得 $12 - 4 = 8$ 种不同的变速比.

故正确选项为 A.

2. (2007) 图 1.1 中, 大长方形被平行于边的直线分成了 9 个小长方形. 其中位于角上的 3 个长方形的面积已经标出, 则右下角上第 4 个小长方形面积等于 [].

A. 22

B. 20

C. 18

D. 11.25

答 B.

分析 本题是一道算术与几何的简单综合题, 考查了长方形面积公式与比的计算.

解法 1 设第 4 个角上的小长方形面积为 x , 则有比例关系式 $\frac{9}{12} = \frac{15}{x}$. 解得 $x = 20$.

故正确选项为 B.

解法 2 如图 1.2 所示, 由于 $\frac{b}{d} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}, \frac{a}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, 所以 $\frac{ab}{cd} = \frac{9}{20}$. 又 $ab = 9$, 所以 $cd = 20$. 即所求面积为 20.

9		15
12		?

图 1.1

a	9		15
	b		d
c	12		?

图 1.2

3. (2004) 甲、乙两种茶叶以 $x:y$ (重量比) 混合配制成一种成品茶, 甲种茶 50 元/kg, 乙种茶 40 元/kg, 现甲种茶价格上涨 10%, 乙种茶价格下降 10% 后, 成品茶的价格恰好仍保持不变, 则 $x:y$ 等于 [].

A. 1:1

B. 5:4

C. 4:5

D. 5:6

答 C.

分析 本题主要考查了比与百分数的概念和简单运算.

在甲、乙两种茶的价格变化前后每千克成品茶的价格分别为 $50x+40y$ (元) 和 $(50+50 \times 10\%)x + (40-40 \times 10\%)y$ (元). 根据题意可知

$$50x + 40y = (50 + 50 \times 0.1)x + (40 - 40 \times 0.1)y,$$

即 $50 \frac{x}{y} + 40 = 55 \frac{x}{y} + 36$. 解得 $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$.

故正确选项为 C.

4. (2005) 2005 年, 我国甲省人口是全国人口的 $c\%$, 其生产总值占国内生产总值的 $d\%$; 乙省人口是全国人口的 $e\%$, 其生产总值占国内生产总值的 $f\%$, 则 2005 年甲省人均生产总值与乙省人均生产总值之比是 [].

A. $\frac{cd}{ef}$ B. $\frac{ce}{df}$ C. $\frac{cf}{de}$ D. $\frac{de}{cf}$

答 D.

分析 本题主要考查了比与百分数的概念和简单运算.

解法 1 设 2005 年全国人口为 p , 全国国内生产总值为 h , 则甲省人口是 $pc\%$ 、生产总值是 $hd\%$, 乙省人口是 $pe\%$ 、生产总值是 $hf\%$. 所以甲省人均生产总值为 $\frac{dh}{cp}$, 乙省人均生产总值为 $\frac{fh}{ep}$, 从而甲省人均生产总值与乙省人均生产总值之比是 $\frac{de}{cf}$.

故正确选项为 D.

解法 2 由于甲省与乙省的生产总值之比是 $\frac{d}{f}$, 而人口之比是 $\frac{c}{e}$, 所以人均生产总值之比是 $\frac{d}{f} : \frac{c}{e} = \frac{de}{cf}$.

5. (2003) 某工厂产值三月份比二月份增加 10%, 四月份比三月份减少 10%, 那么 [].

- A. 四月份与二月份产值相等 B. 四月份比二月份产值增加 $\frac{1}{99}$
C. 四月份比二月份产值减少 $\frac{1}{99}$ D. 四月份比二月份产值减少 $\frac{1}{100}$

答 D.

分析 本题主要考查了百分比的概念及数的简单运算.

设二月份的产值为 a , 则三月份的产值为 $a + a \times 10\% = 1.1a$, 四月份的产值为 $1.1a - 1.1a \times 10\% = 0.99a$. 所以四月份的产值比二月份的产值少

$$\frac{a - 0.99a}{a} = \frac{1}{100}.$$

故正确选项为 D.

6. (2006) 一个容积为 10L 的量杯盛满纯酒精, 第一次倒出 a L 酒精后, 用水将量杯注满并搅拌均匀, 第二次仍倒出 a L 溶液后, 再用水将量杯注满并搅拌均匀, 此时量杯中的酒精溶液浓度为 49%, 则每次的倒出量 a 为 []L.

- A. 2.55 B. 3 C. 2.45 D. 4

答 B.

分析 本题主要考查了百分比的概念及数的简单运算.

第一次倒出 a L 酒精后剩余的纯酒精是 $(10-a)$ L, 而第二次倒出的 a L 溶液中含有的纯酒精是 $\frac{10-a}{10}a$ L, 所以根据题意可知

$$\frac{(10-a) - \frac{(10-a)}{10}a}{10} = 0.49,$$

整理得 $(10-a)^2 = 49$. 解得 $a = 3$.

故正确选项为 B.

7. (2008) 把浓度为 50% 的酒精溶液 90kg 全部稀释为 30% 的酒精溶液, 需要加水 []kg.

- A. 60 B. 70 C. 85 D. 105

答 A.

分析 本题主要考查了百分比的概念及数的简单运算.

设需要加水 x kg, 则根据题意可知 $90 \times 50\% = (90+x) \times 30\%$, 解得 $x = 60$.

故正确选项为 A.

8. (2010) 若某单位员工的平均年龄为 45 岁, 男员工的平均年龄为 55 岁、女员工的平均年龄为 40 岁, 则该单位男、女员工人数之比为 [].

- A. 2 : 3 B. 3 : 2 C. 1 : 2 D. 2 : 1

答 C.

分析 本题主要考查了算术平均数的概念和比的简单运算.

假设男员工人数是 x , 女员工人数是 y . 根据题意可知

$$45(x+y) = 55x + 40y.$$

所以 $y=2x$, 即 $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$. 所以男、女员工的人数之比为 $1:2$.

故正确选项为 C.

9. (2010) 若某公司有 10 个股东, 他们中任意 6 个股东所持股份的和都不少于总股份的 50%, 则持股最多的股东所持股份占总股份的最大百分比是 [].

A. 25%

B. 30%

C. 35%

D. 40%

答 A.

分析 本题主要考查了百分比的概念及数的简单运算.

设 10 个股东所持股份占总股份的百分比从少到多依次为 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, 则

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{10}.$$

除了最大股东外, 其他 9 个股东中的任意 6 个所持股份要不少于 50%, 故得

$$6a_6 \geq a_1 + a_2 + \dots + a_6 > 0.5, \quad \text{即} \quad a_6 > \frac{1}{12}.$$

所以这 9 个股东所持的股份为

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 = a_1 + a_2 + \dots + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 > 0.5 + 3a_6 > 0.75,$$

即不少于 75%, 因此最大股东所持的股份最多为 25%.

故正确的选项为 A.

10. (2011) 某股民用 30000 元买进甲、乙两种股票, 在甲股票下跌 10%、乙股票升值 8% 时全部卖出, 赚得 1500 元, 则该股民原来购买的甲、乙两种股票所用钱数的比例为 [].

A. 2:3

B. 3:2

C. 1:5

D. 5:1

答 C.

分析 本题主要考查了比与百分数的运算.

解法 1 设甲、乙两种股票用的钱数分别为 x, y , 则

$$x + y = 30000, \quad 0.9x + 1.08y = 31500.$$

所以

$$\frac{90x + 108y}{x + y} = 105, \quad \text{即} \quad \frac{90 \frac{x}{y} + 108}{\frac{x}{y} + 1} = 105,$$

解得 $\frac{x}{y} = \frac{1}{5}$.

故正确选项为 C.

解法 2 本题用选项验证法更简单.

根据题意可知购买甲种股票需用的钱数较少, 若比例为 $x:y=2:3$, 则 $x=12000, y=$

18000,这时

$$0.9x + 1.08y = 10800 + 19440 = 30240 \neq 31500.$$

故正确选项为 C.

(4) 算术表达式求值

$$1. (2003) \frac{\sum_{i=1}^{11} i}{\sum_{i=1}^{11} (-1)^{i-1} i} = [\quad].$$

A. 10

B. 11

C. 12

D. 13

答 B.

分析 本题主要考查了对数学运算符号的了解及拆项分组的数字计算方法,用到了简

单公式 $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$.

因为

$$\sum_{i=1}^{11} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = \frac{1}{2} \times 11 \times (11 + 1) = 66,$$

$$\sum_{i=1}^{11} (-1)^{i-1} i = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + 11$$

$$= (1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + (7 - 8) + (9 - 10) + 11$$

$$= -5 + 11 = 6,$$

所以

$$\frac{\sum_{i=1}^{11} i}{\sum_{i=1}^{11} (-1)^{i-1} i} = \frac{66}{6} = 11.$$

故正确选项为 B.

2. (2004) 设 $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1}n$, 则 $S_{2004} + S_{2005} = [\quad]$.

A. 2

B. 1

C. 0

D. -1

答 B.

分析 本题考查的知识点与上一试题相同,只是更强调了问题的一般性.

解法 1 由于

$$S_{2004} = (1 - 2) + (3 - 4) + \cdots + (2003 - 2004) = -1002,$$

$$S_{2005} = S_{2004} + 2005,$$

所以

$$S_{2004} + S_{2005} = 2S_{2004} + 2005 = 2 \times (-1002) + 2005 = 1.$$

故正确选项为 B.

解法 2 特殊值代入法.

本题对所有的正整数 k , $S_{2k} + S_{2k+1}$ 的值都是一样的. 特别地, 当 $k=1$ 时, $S_2 + S_3 = (1-2) + (1-2) + 3 = 1$. 故 $S_{2004} + S_{2005} = 1$.

3. (2005) $\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9}\right)}{0.1+0.2+0.3+\cdots+0.9}$ 的值是 [].

A. $\frac{2}{81}$

B. $\frac{2}{9}$

C. $\frac{9}{2}$

D. $\frac{81}{2}$

答 A.

分析 本题主要考查了分数的运算及简单的代数公式.

因为

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7} \times \frac{7}{8} \times \frac{8}{9} = \frac{1}{9},$$

$$0.1+0.2+0.3+\cdots+0.9 = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{10} = \frac{5 \times 9}{10} = \frac{9}{2},$$

所以

$$\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9}\right)}{0.1+0.2+0.3+\cdots+0.9} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{81}.$$

故正确选项为 A.

4. (2006) $11+22\frac{1}{2}+33\frac{1}{4}+44\frac{1}{8}+55\frac{1}{16}+66\frac{1}{32}+77\frac{1}{64}=[]$.

A. $308\frac{15}{16}$

B. $308\frac{31}{32}$

C. $308\frac{63}{64}$

D. $308\frac{127}{128}$

答 C.

分析 本题主要考查了拆项分组的数字计算方法, 用到了等差数列与等比数列的求和公式.

解法 1

$$\begin{aligned} & 11+22\frac{1}{2}+33\frac{1}{4}+44\frac{1}{8}+55\frac{1}{16}+66\frac{1}{32}+77\frac{1}{64} \\ &= (11+22+33+44+55+66+77) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right) \\ &= \frac{11+77}{2} \times 7 + \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}} = 308 + \frac{63}{64} = 308\frac{63}{64}. \end{aligned}$$

故正确选项为 C.

解法 2 由于本题的四个选项中的整数部分相同,因此只需计算分数部分的值便能找出正确选项. 因为

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{63}{64},$$

故正确选项为 C.

5. (2007) $\frac{1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2 + 9^2 - 10^2}{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7}$ 的值是 [].

A. $\frac{11}{51}$

B. $-\frac{11}{51}$

C. $\frac{22}{51}$

D. $-\frac{22}{51}$

答 B.

分析 本题主要考查了拆项分组的数字计算方法,用到了等差数列与等比数列的求和公式. 因为

$$\begin{aligned} & (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + (5^2 - 6^2) + (7^2 - 8^2) + (9^2 - 10^2) \\ &= (1 - 2)(1 + 2) + (3 - 4)(3 + 4) + (5 - 6)(5 + 6) \\ &\quad + (7 - 8)(7 + 8) + (9 - 10)(9 + 10) \\ &= -(3 + 7 + 11 + 15 + 19) \\ &= -55, \end{aligned}$$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 2^8 - 1 = 255,$$

所以

$$\frac{(1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + (5^2 - 6^2) + (7^2 - 8^2) + (9^2 - 10^2)}{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7} = -\frac{55}{255} = -\frac{11}{51}.$$

故正确选项为 B.

注 一般地, $k^2 - (k+1)^2 = -(2k+1)$.

6. (2008) 请你想好一个数,将它加 5,将其结果乘以 2,再减去 4,将其结果除以 2,再减去你想好的那个数,最后的结果等于 [].

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. 3

答 D.

分析 本题主要考查了数的四则运算的概念.

解法 1 设所想的数为 x ,则根据题意得

$$\frac{2(x+5)-4}{2} - x = (x+5) - 2 - x = 3.$$

故正确选项为 D.