第3章 如何利用MATLAB求解线性方程组

3.1 如何求线性方程的唯一解或特解

本节通过几个具体的例子介绍如何利用 MATLAB 求线性方程组的唯一解或特解。

3.1.1 利用克拉默法则

【例 3.1】 求方程组$\begin{cases} 5x_1+6x_2=1 \\ x_1+5x_2+6x_3=0 \\ x_2+5x_3+6x_4=0 \\ x_3+5x_4+6x_5=0 \\ x_4+5x_5=1 \end{cases}$的解。

解：记该方程组增广矩阵的 1～6 列为 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、b，并且令系数矩阵的行列式为 D，依次用 b 替换 D 的 1～5 列所得到的行列式，分别记为 D_1、D_2、D_3、D_4、D_5。根据克拉默法则，当 D≠0 时，该方程组有唯一解：

x_1=D_1/D，x_2=D_2/D，x_3=D_3/D，

x_4=D_4/D，x_5=D_5/D

求解过程见图 3.1。

```
>> a_1=[5;1;0;0;0];a_2=[6;5;1;0;0];a_3=[0;6;5;1;0];a_4=[0;0;6;5;1];
>> a_5=[0;0;0;6;5];b=[1;0;0;0;1];
>> D=det([a_1,a_2,a_3,a_4,a_5]);D_1=det([b,a_2,a_3,a_4,a_5]);
>> D_2=det([a_1,b,a_3,a_4,a_5]);D_3=det([a_1,a_2,b,a_4,a_5]);
>> D_4=det([a_1,a_2,a_3,b,a_5]);D_5=det([a_1,a_2,a_3,a_4,b]);
>> x_1=D_1/D;x_2=D_2/D;x_3=D_3/D;x_4=D_4/D;x_5=D_5/D;
>> format rat,X=[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]

X =

    1507/665      -229/133        37/35        -79/133        212/665
```

图 3.1　用克拉默法则解线性方程组

也可以编写如下程序(详见图 3.2)来解上述方程组。

```
>> a_1=[5;1;0;0;0];a_2=[6;5;1;0;0];a_3=[0;6;5;1;0];a_4=[0;0;6;5;1];
a_5=[0;0;0;6;5];b=[1;0;0;0;1]; A=[a_1,a_2,a_3,a_4,a_5];D=det(A);
X=[]; %空矩阵
for i=1:5
        A=[a_1,a_2,a_3,a_4,a_5];
        A(:,i)=b; %把A的第i列换成b, 下面一行的A的第i列就是b了
        X=[X,det(A)/D]; %把det(A)/D的值(即x_i的值)添到原X后面
        i=i+1;
    end
format rat,X

X =

    1507/665       -229/133         37/35        -79/133        212/665
```

图 3.2　求解例 3.1 所示方程组的程序

3.1.2　利用矩阵除法

记例 3.1 中的方程组为 AX=B,则 X=A\B,详细求解过程见图 3.3。

```
>> A=[5,6,0,0,0;1,5,6,0,0;0,1,5,6,0;0,0,1,5,6;0,0,0,1,5];
>> B=[1;0;0;0;1];
>> format rat,X=A\B

X =

    1507/665
    -229/133
      37/35
     -79/133
     212/665
```

图 3.3　用矩阵除法解线性方程组

3.1.3　利用矩阵的初等变换

记例 3.1 中方程组的增广矩阵为 A,并用初等行变换把 A 化为行最简形矩阵 B,则 B 的最后一列就是该方程组的解向量,详见图 3.4。

```
>> A=[5,6,0,0,0,1;1,5,6,0,0,0;0,1,5,6,0,0;0,0,1,5,6,0;0,0,0,1,5,1];
>> format rat
>> B=rref(A);X=B(:,6)

X =

     911/402
    -229/133
      37/35
     -79/133
      95/298
```

图 3.4　用矩阵的初等变换解线性方程组

3.2 求线性方程的通解

上一节中所介绍的利用 MATLAB 化矩阵为行最简形的方法可以用来求线性方程组的通解。本节将介绍如何用函数 null 求齐次线性方程组的基础解系，以及如何编写简单的程序来求解非齐次线性方程组。

3.2.1 求线性齐次方程组的通解

在 MATLAB 中，函数 null 用来求解矩阵 A 的零空间的一组基，即齐次线性方程组 AX＝0 的解空间的一组基（基础解系），由此可得齐次线性方程组的通解。

命令格式：null(A)或 null(A,'r')

其中，null(A)的返回值是一个矩阵，其列向量组为 A 的零空间的一组标准正交基，而 null(A,'r')的列向量组为 A 的零空间的一组基（一般不是单位向量组，也未必是两两正交的）。null(A)与 null(A,'r')的区别见图 3.5。

【例 3.2】 求方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases}$的通解。

解：先用函数 null 求系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$的零空间的一组基（见图 3.6）。

```
>> A=[1,2,2,1;2,1,-2,-2;1,-1,-4,-3];
>> format rat %指定分数格式输出
>> C=null(A,'r')

C =

       2             5/3
      -2            -4/3
       1             0
       0             1
```

图 3.5 比较 null(A)与 null(A,'r')的区别

```
>> A=[1,2,2,1;2,1,-2,-2;1,-1,-4,-3];
>> B=null(A)

B =

    0.7177   -0.0286
   -0.6084    0.2725
    0.0857   -0.6241
    0.3277    0.7317
```

图 3.6 系数矩阵 A 零空间的一组基

再写出通解（见图 3.7 和图 3.8）。

```
>> syms k1 k2 %说明k1,k2为变量
>> X=k1*C(:,1)+k2*C(:,2) %AX=0的通解

X =

  2*k1+5/3*k2
 -2*k1-4/3*k2
           k1
           k2
```

图 3.7 通解

```
>> pretty(X) %让通解表达式更加精美

                 [2 k1 + 5/3 k2 ]
                 [              ]
                 [-2 k1 - 4/3 k2]
                 [              ]
                 [      k1      ]
                 [              ]
                 [      k2      ]
```

图 3.8 优化通解的表达式

3.2.2 求非齐次线性方程组的通解

第一步：判断 AX=b 是否有解，若有解则进行第二步；

第二步：求 AX=b 的一个特解；

第三步：求 AX=0 的通解；

第四步：写出 AX=b 的通解。

【例 3.3】 求方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=2 \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=3 \end{cases}$的通解。

解：根据线性代数知识，可以编写一个简单的程序来求解这个方程组，见图 3.9。由图可见该方程组无解。

```
>> A=[1 -2 3 -1;3 -1 5 -3;2 1 2 -2]; %系数矩阵
>> b=[1 2 3]'; B=[A b]; n=4; %B为增广矩阵, 未知量的个数为4
>> R_A=rank(A);R_B=rank(B); %系数矩阵的秩, 增广矩阵的秩
>> if R_A==R_B&R_A==n, X=A\b %这是有唯一解的情况
   elseif R_A==R_B&R_A<n, C=rref(B) %有无穷多解时把增广矩阵化为行最简形
   else X='Equation has no solves' %剩下的情况就是无解的情况了
   end %MATLAB运行的结果如下:

X =

Equation has no solves
```

图 3.9 例 3.3 的 MATLAB 程序

【例 3.4】 求方程组$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0 \end{cases}$的通解。

解：在 MATLAB 的命令窗口输入如图 3.10 所示的命令并运行。

```
>> A=[1  1  -3  -1;3  -1  -3  4;1  5  -9  -8];
>> b=[1 4 0]';B=[A b];n=4;R_A=rank(A);R_B=rank(B);format rat
>> if R_A==R_B&R_A==n, X=A\b %这是有唯一解的情况
   elseif R_A==R_B&R_A<n, C=rref(B) %有无穷多解时把增广矩阵化为行最简形
   else X='Equation has no solves' %剩下的情况就是无解的情况了
   end %MATLAB运行的结果如下:

C =

       1              0            -3/2           3/4            5/4
       0              1            -3/2          -7/4           -1/4
       0              0              0             0              0
```

图 3.10 例 3.4 的 MATLAB 程序

可见原方程组有无数多组解，且$\begin{cases} x_1-3/2x_3+3/4x_4=5/4 \\ x_2-3/2x_3-7/4x_4=-1/4 \end{cases}$，即

$$\begin{cases} x_1 = 3/2x_3 - 3/4x_4 + 5/4 \\ x_2 = 3/2x_3 + 7/4x_4 - 1/4 \end{cases}$$

所以,原方程组的通解为 $X=k_1\begin{pmatrix}3/2\\3/2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-3/4\\7/4\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5/4\\-1/4\\0\\0\end{pmatrix}$,其中 k_1、k_2 为任意实数。