

第一讲 研究含参函数的单调性

本讲综述

函数的单调性是函数的重要性质之一,对深入研究函数的图像、比较函数值大小、解不等式、求极值、最值(取值范围)、判断函数零点个数、证明不等式起着至关重要的作用,因此,函数单调性的考查是高考的重点和热点.而导数是求解函数单调性的一把利器,利用它可以确定原函数单调性的问题转化为判断导函数的符号问题.

知识导航



一 求函数单调性的解题步骤

第一步:确定函数的定义域;

第二步:求导函数 $f'(x)$;

第三步:以导函数的零点存在性进行分类讨论;

第四步:当导函数存在多个零点时,讨论它们的大小关系以及与区间的位置关系;

第五步:画出导函数的草图,从而判断其导函数的符号;

第六步:根据第五步的草图列出 $f'(x)$, $f(x)$ 随 x 变化的情况表,并写出函数的单调区间;

第七步:综上其讨论的情形,完整写出函数的单调区间.



二 “主导”函数

通常我们把决定导函数符号的函数构造为新函数,称其为“主导”函数,一般用 $h(x)$ 表示.

对于导函数判断函数单调性,经研究,“主导”函数的形式梳理如下:

(1)能判断“主导”函数的符号,得出原函数的单调性,具体分为:

$$\begin{cases} \text{“主导”函数为一次函数型: } h(x) = k\varphi(x) + b \\ \text{“主导”函数为二次函数型: } h(x) = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

(2)不能判断“主导”函数的符号,就需要二次求导或多次求导来判断“主导”函数的正负号,进而得出原函数的单调性.

典例精讲

类型一 “主导”函数为一次函数型

本类型函数通过“一次求导”就可解决原函数的单调性.

例 1.1 已知函数 $f(x) = ax - (a+1)\ln(x+1)$, 其中 $a \geq -1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

分析 对于含参函数单调性的求解, 难点是如何对参数进行分类讨论和利用数形结合来判断导函数的正负.

解析 由已知得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$, 且 $f'(x) = a - \frac{a+1}{x+1} = \frac{ax-1}{x+1}$ ($a \geq -1$).

设 $h(x) = ax - 1$ ($a \geq -1$).

①当 $a = 0$ 时, $h(x) = -1 < 0$, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 上单调递减;

②当 $-1 \leq a < 0$ 时, $h(x) = ax - 1 < 0$, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 上单调递减;

③当 $a > 0$ 时, 令 $h(x) = ax - 1 = 0$, $x = \frac{1}{a}$.

当 x 变化时, $f'(x)$ 和 $f(x)$ 变化的情况如下表所示.

x	$(-1, \frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a}, +\infty)$
$h(x)$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, \frac{1}{a})$, 单调递增区间为 $(\frac{1}{a}, +\infty)$.

综上所述, 当 $-1 \leq a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, +\infty)$, 无单调递增区间;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, \frac{1}{a})$, 单调递增区间为 $(\frac{1}{a}, +\infty)$.

◆ 评注 ◆

“主导”函数为一次函数型, 对参数进行分类讨论的重点为:

(1) 最高项系数是否为零及此项系数的正负;

(2) “主导”函数根的判定 $\begin{cases} k \cdot \varphi(x) \text{ 与 } b \text{ 同号, } h(x) \text{ 恒正或恒负 (例 1.1 解析中 ②)} \\ k \cdot \varphi(x) \text{ 与 } b \text{ 异号, } h(x) = 0, \text{ 求根 (例 1.1 解析中 ③)} \end{cases}$;

(3) 分类讨论过程中级别的先后顺序.

变式 1 已知函数 $f(x) = ax - \ln x$, $g(x) = e^{ax} + 3x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值;

(2)若存在区间 M , 使 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 M 上具有相同的单调性, 求 a 的取值范围.

变式 2 设函数 $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$, 若对所有的 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \geq ax$ 成立. 求实数 a 的取值范围.

类型二 “主导”函数为二次函数型

本类函数通过“一次求导”及比较主导函数零点的大小, 就可解决原函数的单调性.

例 1.2 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + a \ln x$, 求 $f(x)$ 的单调区间.

解析 函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 由题意可知 $f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + a}{x}$.

令 $h(x) = 2x^2 - 2x + a$, $\Delta = 4(1 - 2a)$, 则

(1) 当 $\Delta = 4(1 - 2a) \leq 0$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $h(x) = 2x^2 - 2x + a \geq 0$, $f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + a}{x} \geq 0$,

可知函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

(2) 当 $\Delta = 4(1 - 2a) > 0$, 即 $a < \frac{1}{2}$ 时, 令 $h(x) = 2x^2 - 2x + a = 0$, 解得 $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}$.

① 当 $\frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{2} > 0$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 得 $0 < x_1 < x_2$.

所以可知, 当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 变化的情况如下表所示.

x	$(0, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$h(x)$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

此时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$, 单调递减区间为 (x_1, x_2) .

②当 $\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2} \leq 0$, 即 $a \leq 0$ 时, 得 $x_1 \leq 0 < x_2$.

所以可知, 当 $0 < x < x_2$ 时, $h(x) < 0, f'(x) < 0, f(x)$ 为减函数; 当 $x \geq x_2$ 时, $h(x) \geq 0, f'(x) \geq 0, f(x)$ 为增函数.

此时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(x_2, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, x_2)$.

综上所述, 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, x_1), (x_2, +\infty)$, 单调递减区间为 (x_1, x_2) ;

当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(x_2, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, x_2)$.

◆ 评注 ◆

当“主导”函数为二次函数时, 确定原函数单调区间的问题转化为: 探究该二次函数在给定区间上根的判定问题. 对于此二次函数根的判定经研究有两种情况.

①若该二次函数不能因式分解, 就要通过判别式来判断根的情况, 然后再划分定义域;

②若该二次函数能因式分解, 令该二次函数等于零, 求根并比较大小, 然后再划分定义域, 判定导数的符号, 从而求出原函数单调性.

变式 1 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + k (k > 0)$ 在 $x = 0$ 处取得极值, 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线垂直于直线 $x + 2y + 1 = 0$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 若函数 $g(x) = \frac{e^x}{f(x)}$, 讨论 $g(x)$ 的单调性.

变式 2 设函数 $f(x) = \ln(x+1) + a(x^2 - x)$, 讨论函数 $f(x)$ 极值点的个数, 并说明理由.

例 1.3 求函数 $f(x) = (1-a)\ln x - x + \frac{ax^2}{2}$ 的单调区间.

分析 含参函数求单调区间, 讨论的关键在于导函数的零点与区间端点的相对大小关系.

解析 由已知得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 求导得

$$f'(x) = \frac{1-a}{x} - 1 + ax = \frac{(ax+a-1)(x-1)}{x}.$$

(1) 当 $a=0$ 时, $f'(x) = -\frac{x-1}{x}$.

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 当 $a \neq 0$ 时, 令 $f'(x) = \frac{a(x - \frac{1-a}{a})(x-1)}{x} = 0$, 得 $x_1 = 1, x_2 = \frac{1-a}{a}$ (讨论的核心在于判断导函数的零点 $\frac{1-a}{a}$ 与 $0, 1$ 的相对大小关系).

① 当 $\frac{1-a}{a} > 1$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x), f(x)$ 随 x 变化的情况如下表所示.

x	$(0, 1)$	1	$(1, \frac{1-a}{a})$	$\frac{1-a}{a}$	$(\frac{1-a}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1), (\frac{1-a}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 在区间 $(1, \frac{1-a}{a})$ 上单调递减.

② 当 $\frac{1-a}{a} = 1$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x-1)^2}{x} \geq 0$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

③ 当 $\frac{1-a}{a} \in (0, 1)$, 即 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $f'(x), f(x)$ 随 x 变化的情况如下表所示.

x	$(0, \frac{1-a}{a})$	$\frac{1-a}{a}$	$(\frac{1-a}{a}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1-a}{a}), (1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\frac{1-a}{a}, 1)$ 上单调递减.

④ 当 $\frac{1-a}{a} \leq 0$, 即 $a \geq 1$ 或 $a < 0$ 时.

(i) 若 $a \geq 1$, $f'(x), f(x)$ 随 x 变化的情况如下表所示.

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

(ii) 当 $a < 0$ 时, $f'(x), f(x)$ 随 x 变化的情况如下表所示.

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, 单调递减区间为 $(1, +\infty)$;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$ 和 $(\frac{1-a}{a}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(1, \frac{1-a}{a})$;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间;

当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{1-a}{a})$ 和 $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(\frac{1-a}{a}, 1)$;

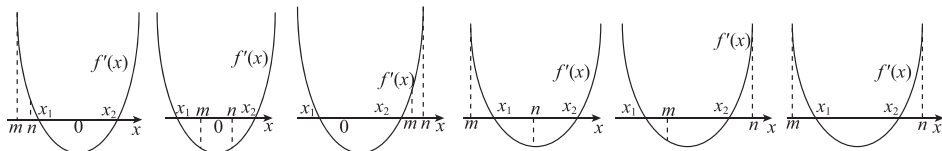
当 $a \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$.

◆ 评注 ◆

“主导”函数为二次函数时, 分类讨论总结如下:

$$\text{① 最高项系数} \begin{cases} a=0 \\ a>0 \\ a<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{能因式分解: 令 } f'(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2 \begin{cases} x_1=x_2 \\ x_1>x_2 \\ x_1<x_2 \end{cases} \\ \text{不能因式分解} \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ \Delta > 0, \text{ 令 } f'(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2 \end{cases} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \text{导函数的变号零} \\ \text{点划分定义域} \end{matrix}$$

② 定义域为 $[m, n]$ 时, 导函数的变号零点划分定义域的情况见下图:



变式 1 已知函数 $f(x) = 2\ln x + \frac{1}{2}ax^2 - (2a+1)x$, $a \in \mathbf{R}$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

例 1.4 已知函数 $f(x) = x \cdot e^x - a \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)$, 求 $f(x)$ 的单调区间.

解析 由题意得 $f'(x) = (x+1) \cdot (e^x - a)$.

(1) 当 $-a \geq 0$, 即 $a \leq 0$ 时, 因为 $e^x - a > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 即 $x+1=0$, 得 $x=-1$, 由此可得, 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数; 当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数.

(2) 当 $-a < 0$, 即 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -1, x_2 = \ln a$.

① 当 $-1 < \ln a$, 即 $a > \frac{1}{e}$ 时, $f'(x)$ 和 $f(x)$ 随 x 变化的情况如表所示.

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

② 当 $-1 = \ln a$, 即 $a = \frac{1}{e}$ 时, 可得 $x \in \mathbf{R}$ 时 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

③ 当 $-1 > \ln a$, 即 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x)$ 和 $f(x)$ 随 x 变化的情况如下表所示.

x	$(-\infty, x_2)$	x_2	(x_2, x_1)	x_1	$(x_1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $x \in (-\infty, -1)$, 单调递增区间为 $x \in (-1, +\infty)$;

当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, \ln a), (-1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(\ln a, -1)$;

当 $a = \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\mathbf{R}$, 无单调递减区间;

当 $a > \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1), (\ln a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-1, \ln a)$.

变式 1 已知函数 $f(x) = (x-a)\sin x + \cos x, x \in (0, \pi)$. 当 $a > \frac{\pi}{2}$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间.

类型三 “主导”函数需要二次求导型

前面两种类型讲解了利用“一次求导”就可解决原函数的单调性问题, 当无法直接通过解不等式得到一阶导函数的符号时, 可对“主导”函数再次求导, 使解题思路清晰. “再构造、再求导”是破解函数综合问题的强大武器.

在此我们首先要清楚 $f''(x)$ 、 $f'(x)$ 、 $f(x)$ 之间的联系是如何用来判断原函数单调性的.

①二次求导目的: 通过判定 $f''(x)$ 的符号, 来判断 $f'(x)$ 的单调性;

②通过赋特殊值找到 $f'(x)$ 的零点, 来判断 $f'(x)$ 的正负区间, 进而得出 $f(x)$ 的单调性. 而 $f'(x)$ 的零点很多是可“遇”而不可“求”的, 此时会出现不同的考法:

(i) 利用零点存在性定理判定零点在所给区间上的位置.

一般可采取二分法, 或分别比较最值、端点值、极值与零的大小估出零点的大概区间.

(ii) 极值点判定.

(iii) 双零点问题.

(iv) 隐零点问题.

.....

下面我们结合具体例题来讲解如何利用二次求导探究函数的单调性.

例 1.5 讨论函数 $f(x) = (x+1)\ln x - x + 1$ 的单调性.

解析 由 $f(x) = (x+1)\ln x - x + 1$, 可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

易得 $f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} - 1 = \ln x + \frac{1}{x}$, 用 $f'(x)$ 去分析 $f(x)$ 的单调性受阻. 因此我们可

以尝试再对 $f'(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ 求导, 得 $f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$.

令 $f''(x) = \frac{x-1}{x^2} = 0$, 得 $x=1$.

显然我们通过二次求导分析得出 $f'(x)$ 的单调性, 再通过特殊值判定 $f'(x)$ 与零的大小, 进而判断出原函数的单调性.

当 $0 < x \leq 1$ 时, $f''(x) \leq 0$, 即 $f'(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上为减函数;

当 $x > 1$ 时, $f''(x) > 0$, 即 $f'(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上为增函数.

因此 $f'(x)_{\min} = f'(1) = 1 > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

变式 1 (2016 北京理 18) 设函数 $f(x) = xe^{a-x} + bx$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y = (e-1)x + 4$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

配套训练(一)

1. 已知函数 $f(x) = a\left(x - \frac{1}{x}\right) - 2\ln x (a \in \mathbf{R})$, 求 $f(x)$ 的单调区间.

2. 设函数 $f(x) = a \ln x + \frac{x-1}{x+1}$, 其中 a 为常数, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

3. 已知函数 $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax - \left(\ln x + \frac{x-a}{x}\right)$ ($a > -1$), 求 $g(x)$ 的单调区间.

4. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + bx$ (其中 a, b 为常数且 $a \neq 0$) 在 $x=1$ 处取得极值. 若 $f(x)$ 在 $(0, e]$ 上的最大值为 1, 求 a 的值.

5. 已知函数 $f(x) = (ax^2 - x)\ln x - \frac{1}{2}ax^2 + x (a \in \mathbf{R})$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

6. 设函数 $g(x) = e^x - x^2 + 2ax - 1 (x > 0)$, 讨论 $g(x)$ 的单调性.

第二讲 不等式的恒成立与存在性问题

本讲综述

不等式恒成立与存在性问题是历年高考的热点,特别是以导数为背景的题型更是在高考中频频出现.这类问题涉及的知识面广、综合性强、能力要求高.解决这类问题的关键是等价转化为求函数最值的问题,通过转化使恒成立与存在性问题得到简化.

第一节 单变量不等式的恒成立与存在性问题

知识导航



一 单变量型不等式的恒成立问题

1. 在不等式恒成立条件下求参数范围的核心方法

在不等式恒成立条件下求参数的取值范围,一般原理是利用转化思想将其转化为函数的最值问题或值域问题加以求解.在转化途径上,可采用“分离参数法”或“不分离参数法”直接移项构造辅助函数的形式.

由函数最值的求法及极值的定义可知,函数在区间上的最大(最小)值点若不是区间端点就是极大(极小)值点.

对于是否分离自变量与参变量,取决于最值点在区间端点还是在极大(极小)值点.

(1) 不分离参数法

若区间端点代入到不等式中,不等式的左右两边相等,一般不分离,即转化为直接求函数的最值(例如当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2 \geq 0$ 恒成立,求 a 的取值范围.将 $x=0$ 代入到函数 $f(x)$ 中,得 $f(0)=0$,不等式的左右两边相等,因此不分离自变量与参变量,直接转化为 $f(x)_{\min} \geq 0$).

(2) 分离参数法

若区间端点代入到不等式中,不等式的左右两边不相等(或区间端点代入到不等式中导致函数无意义),则需分离自变量与参变量,因此此种情形下,转化后的函数最值在极大(极小)值点处取得,而不是区间端点.分离自变量与参变量的作用在于有效避免对参数的讨论.

2. 恒成立问题与函数最值的相互转化

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 D 上存在最小值 $f(x)_{\min}$ 和最大值 $f(x)_{\max}$, 则

不等式 $f(x) > a$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} > a$;

不等式 $f(x) \geq a$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} \geq a$;

不等式 $f(x) < b$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} < b$;

不等式 $f(x) \leq b$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} \leq b$.

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 D 上不存在最大(小)值, 且值域为 (m, n) , 则

不等式 $f(x) > a$ (或 $f(x) \geq a$) 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow m \geq a$;

不等式 $f(x) < b$ (或 $f(x) \leq b$) 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow n \leq b$.

不等式中不等号是否含等应与值域开闭对应.



二 单变量型不等式的有解问题

一般将不等式合理变形使其参数分离, 进而将问题转化为求函数的最值问题, 具体的转化是这样的.

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 D 上存在最小值 $f(x)_{\min}$ 和最大值 $f(x)_{\max}$, 则

不等式 $f(x) > a$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} > a$;

不等式 $f(x) \geq a$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} \geq a$;

不等式 $f(x) < b$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} < b$;

不等式 $f(x) \leq b$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} \leq b$.

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 D 上不存在最大(小)值, 且值域为 (m, n) , 则

不等式 $f(x) > a$ (或 $f(x) \geq a$) 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a < n$;

不等式 $f(x) < b$ (或 $f(x) \leq b$) 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow b > m$.

典例精讲

类型一 单变量型不等式的恒成立问题

1. 不分离自变量与参变量解“恒成立”问题

引理 (1) 若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $x \in [a, b)$ 时 $f(x) \geq (\leq) f(a)$ 恒成立, 则 $f'(a) \geq (\leq) 0$.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x=b$ 处可导, 且 $x \in (a, b]$ 时 $f(x) \geq (\leq) f(b)$ 恒成立, 则 $f'(b) \leq (\geq) 0$.

初步感知若 $f(x) \leq f(a)$ ($a \leq x < b$), 则函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处右侧附近的图像是减函数. 又因为函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 所以 $f'(a) \leq 0$.

同理, 可得其他结论也成立.

严格证明如下:

若 $f(x) \leq f(a)$ ($a \leq x < b$), 则由函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导及导数的定义, 可得 $f'(a) =$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

同理,可证得其他结论也成立.

综观 2006—2016 年近十年高考真题,在不等式恒成立问题上,考查的模型均涉及端点值代入不等式取等号,利用区间端点的导数值的符号来确定参数的范围,这作为必要条件,在此基础上证明充分性.当然,也可以从前提出发,如 $\forall x \geq 0, f(x) \geq 0$ 恒成立,求 a 的取值范围.可以大胆假设目标成立的前提是 $f(x)$ 单调递增,即 $f'(x) \geq 0$,得到参数 a 的范围,再证明其反面不成立,这样求得参数的取值范围.

例 2.1 (2006 全国 II 理 20) 设函数 $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$. 若对所有的 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \geq ax$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

解析 **解法一:** 设 $g(x) = f(x) - ax = (x+1)\ln(x+1) - ax (x \geq 0)$.

由 $g(0) = 0$, 且 $x \geq 0$ 时, 总有 $g(x) \geq 0$, 所以由引理得 $g'(0) \geq 0$, 即 $1 + \ln 1 - a \geq 0$, 解得 $a \leq 1$. (这是恒成立的必要条件)

若 $a \leq 1$, $g'(x) = 1 + \ln(x+1) - a \geq 0 (x \geq 0)$ (再验证充分性). 故函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $g(x) \geq g(0) = 0$. 即 $f(x) \geq ax (x \geq 0)$ 恒成立. 所以 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

或者采用如下解法(先从充分性做起,再验证其反过来不成立).

解法二: 设 $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - ax$, 则当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \geq 0$ 恒成立. 因为 $g(0) = 0$, 于是要使不等式成立, 前提是 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增即可, 即 $g'(x) \geq 0$. 又 $g'(x) = 1 + \ln(x+1) - a$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增, 故当 $g'(x)_{\min} = g'(0) = 1 - a \geq 0$, 即 $a \leq 1$ 时, $g(x) \geq 0$ 恒成立.

下面证这个条件是必要的.

当 $a > 1$ 时, $g'(0) = 1 - a < 0$, $g'(x) = \ln(x+1) + 1 - a$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增且 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g'(x) \rightarrow +\infty$. 故 $g'(x)$ 有唯一零点, 设为 x_0 . 则当 $0 < x < x_0$ 时, $g'(x) < 0$, 即 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 所以当 $0 < x < x_0$ 时, $g(x) < g(0) = 0$, 这与 $g(x) \geq 0$ 相矛盾.

综上所述, 所求实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

解法三: 令 $g(x) = f(x) - ax = (x+1)\ln(x+1) - ax (x \geq 0)$,

又 $g(0) = 0$, $g'(x) = \ln(x+1) + 1 - a$.

① 当 $a \leq 1$ 时, $g'(x) \geq 0$, 函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g(x) \geq g(0) = 0$, 因此 $f(x) \geq ax$ 对 $\forall x \geq 0$ 不等式恒成立.

② 当 $a > 1$ 时, 令 $g'(x) = 0$ 得 $\ln(x+1) = a - 1$, 即 $x = e^{a-1} - 1$.

当 $x \in (0, e^{a-1} - 1)$ 时, $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 在区间 $(0, e^{a-1} - 1)$ 上单调递减, 则 $g(x) < g(0) = 0 (0 < x < e^{a-1} - 1)$.

此时与题设中恒成立矛盾, 故舍去.

综上所述, a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

◆ 评注 ◆

解法一是从恒成立的必要条件入手突破, 求出 a 的取值范围, 再证明充分性, 即在参数的范围下, 不等式恒成立; 解法二是从目标前提入手(即从充分性入手), 求出 a 的取值范围, 再证此前提目标反面不成立(即只要找出一个子区间, 使所证不等式在此区间上不成立即可). 解法三分别用了函数的单调性与举反例的方法确定了取值范围.

变式 1 (2007 全国 I 理 20(2)) 设函数 $f(x) = e^x - e^{-x}$. 若对于所有的 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \geq ax$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

变式 2 (2008 全国 II 理 22(2)) 设函数 $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$. 若对于所有的 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \leq ax$, 求实数 a 的取值范围.

例 2.2 (2014 全国 II 理 21) 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $g(x) = f(2x) - 4bf(x)$, 当 $x > 0$ 时, $g(x) > 0$, 求 b 的最大值.

解析 (1) 略;

(2) 由 $g(x) = f(2x) - 4bf(x) = e^{2x} - e^{-2x} - 4x - 4b(e^x - e^{-x} - 2x)$, 可得 $g(0) = 0$, 于是 $g'(x) = 2e^{2x} + 2e^{-2x} - 4 - 4b(e^x + e^{-x} - 2) = 2(e^x + e^{-x} - 2)(e^x + e^{-x} - 2b + 2)$.

因为 $e^x + e^{-x} - 2 > 0$, ($x > 0$), 所以 $g'(x)$ 的符号与 $y = e^x + e^{-x} - 2b + 2$ 的符号相同.

由已知, 当 $x > 0$ 时, $g(x) > 0$ 恒成立. 又 $g(0) = 0$, 则 $y'|_{x=0} = 4 - 2b \geq 0$, 得 $b \leq 2$.

且当 $b = 2$ 时, $y = e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$, 故 $g'(x) \geq 0$ 恒成立, 由于函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g(x) > g(0) = 0$, $x > 0$, 因此 b 的最大值为 2.

变式 1 (2015 北京理 18(3)) 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$. 设实数 k 使得 $f(x) > k\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$ 对 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 求 k 的最大值.

2. 分离自变量与参变量, 解恒成立问题

例 2.3 (2012 湖南理 22) 已知函数 $f(x) = e^{ax} - x$, 其中 $a \neq 0$. 若对一切 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

解析 因为对一切 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq 1$ 恒成立, 且 $1 = f(0)$, 所以 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的最小值点.

由函数在区间上的最大(小)值点若不是区间端点就是极大(小)值点, 得 $x = 0$ 也是函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的极小值点, 所以 $f'(0) = ae^0 - 1 = 0$, 解得 $a = 1$.

还可检验: 当 $a = 1$ 时, $f(x) = e^x - x$, $f'(x) = e^x - 1$.

当 $x \leq 0$ 时, $f'(x) \leq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减;

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

则 $f(x)_{\min} = f(0) = 1$, 所以 $f(x) \geq 1$ ($x \in \mathbf{R}$) 恒成立.

综上所述, a 的取值集合是 $\{1\}$.

变式 1 已知函数 $f(x) = (x-k)^2 e^{\frac{x}{k}}$ ($k \neq 0$).

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) \leq \frac{1}{e}$, 求 k 的取值范围.

例 2.4 设函数 $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ ($x > 0$ 且 $x \neq 1$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 已知 $2^{\frac{1}{x}} > x^a$ 对任意 $x \in (0, 1)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

解析 (1) $f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2}$ ($x > 0$ 且 $x \neq 1$), 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{e}, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递减. (解答过程略)

(2) 因为 $x \in (0, 1)$, $2^{\frac{1}{x}} > 0$, $x^a > 0$, 所以在 $2^{\frac{1}{x}} > x^a$ 两边取自然对数, 得 $\frac{1}{x} \ln 2 > a \ln x$, 所以 $\frac{a}{\ln 2} > \frac{1}{x \ln x}$. 依题意, $\frac{a}{\ln 2} > \left(\frac{1}{x \ln x} \right)_{\max}$ ($x \in (0, 1)$).

由函数 $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ 的单调性可知, 在 $x \in (0, 1)$ 上其最大值为 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e}} = -e$, 则

$\frac{a}{\ln 2} > -e$, 即 $a > -e \ln 2$, 所以 a 的取值范围为 $(-e \ln 2, +\infty)$.

◆ 评注 ◆

本题将不等式 $2^{\frac{1}{x}} > x^a$, $x \in (0, 1)$ 两边取自然对数, 分离自变量与参变量, 构造函数 $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, 利用函数 $f(x)$ 的单调性求其最值.

变式 1 设函数 $f(x) = \ln x - ax$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 判断函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $\ln x < ax$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立时, 求 a 的取值范围;

(3) 求证: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

类型二 单变量型的存在性问题

例 2.5 设函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1-a}{2}x^2 - bx (a \neq 1)$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 0.

(1) 求 b 的值;

(2) 若存在 $x_0 \geq 1$, 使得 $f(x_0) < \frac{a}{a-1}$, 求实数 a 的取值范围.

分析 (1) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 $0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$.

(2) $\exists x_0 \geq 1$, 使得 $f(x_0) < \frac{a}{a-1} \Leftrightarrow$ 函数 $f(x)_{\min} < \frac{a}{a-1}$.

解析 (1) $b = 1$. (解答过程略)

(2) 由 (1) 知, $f(x) = a \ln x + \frac{1-a}{2}x^2 - x$, 定义域为 $(0, +\infty)$.

若存在 $x_0 \in [1, +\infty)$, 使得 $f(x_0) < \frac{a}{a-1}$ 成立, 则 $f(x)_{\min} < \frac{a}{a-1}$.

$$\text{又 } f'(x) = \frac{a}{x} + (1-a)x - 1 = \frac{(1-a)x^2 - x + a}{x} = \frac{(1-a)(x-1)\left(x - \frac{a}{1-a}\right)}{x}.$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = \frac{a}{1-a}$.

① 当 $\frac{a}{1-a} < 0$, 即 $a > 1$ 或 $a < 0$ 时, 有以下情况

(i) 当 $a > 1$ 时, $f'(x), f(x)$ 随 x 变化的情况如下表所示.

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 且 $f(1) = \frac{1-a}{2} - 1 = \frac{-a-1}{2} < 0 < \frac{a}{a-1}$, 符合题意;

(ii) 当 $a < 0$ 时, $f'(x), f(x)$ 随 x 变化的情况如下表所示.

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)_{\min} = f(1) = \frac{-a-1}{2}$.

因此 $\frac{-a-1}{2} < \frac{a}{a-1}$, 解得 $-1 - \sqrt{2} < a < 0$.

②当 $\frac{a}{1-a} > 0$, 即 $0 < a < 1$ 时, 有以下情况.

(i) 当 $\frac{a}{1-a} > 1$, 即 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $f'(x), f(x)$ 随 x 变化的情况如下表所示.

x	$(0, 1)$	1	$(1, \frac{a}{1-a})$	$\frac{a}{1-a}$	$(\frac{a}{1-a}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在 $[1, \frac{a}{1-a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{a}{1-a}, +\infty)$ 上单调递增.

此时 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{1-a}\right) &= a \ln\left(\frac{a}{1-a}\right) + \frac{1-a}{2} \left(\frac{a}{1-a}\right)^2 - \frac{a}{1-a} \\ &= a \ln\left(\frac{a}{1-a}\right) + \frac{a^2}{2(1-a)} + \frac{a}{a-1} \\ &> \frac{a}{a-1}, a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \end{aligned}$$

与题设矛盾. 故不符合题意.

(ii) 当 $0 < \frac{a}{1-a} < 1$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x), f(x)$ 随 x 变化的情况如下表所示.

x	$(0, \frac{a}{1-a})$	$\frac{a}{1-a}$	$(\frac{a}{1-a}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 $f(1) = \frac{-a-1}{2}$.

令 $f(x)_{\min} < \frac{a}{a-1}$, 即 $\frac{-a-1}{2} < \frac{a}{a-1}$, 解得 $-1-\sqrt{2} < a < -1+\sqrt{2}$, 所以 a 的取值范围是 $(0, -1+\sqrt{2})$.

(iii) 当 $\frac{a}{1-a} = 1$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{2x} \geq 0$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $f(x)_{\min} = f(1) = -\frac{3}{4}$.

又 $\frac{a}{a-1} = -1$, 故 $\forall x \in [1, +\infty), f(x) > \frac{a}{a-1}$, 与题设矛盾, 故 $a = \frac{1}{2}$ 不符合题意.

③当 $\frac{a}{1-a} = 0$. 即 $a = 0$ 时, 可得 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)_{\min} = f(1) = -\frac{1}{2} < \frac{a}{a-1}$, 所以 $a = 0$ 符合题意.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}) \cup (1, +\infty)$.

配套训练(二)

1. 已知函数 $f(x) = \ln(ax+1) + \frac{1-x}{1+x}$, $x \geqslant 0$, 其中 $a > 0$. 若 $f(x)$ 的最小值为 1, 求 a 的取值范围.

2. 设函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$. 若当 $x \geqslant 0$ 时 $f(x) \geqslant 0$, 求 a 的取值范围.

3. 设函数 $f(x) = ax^2 - a - \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 确定 a 的所有可能取值, 使得 $f(x) > \frac{1}{x} - e^{1-x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上恒成立 ($e = 2.718\cdots$ 为自然对数的底数).