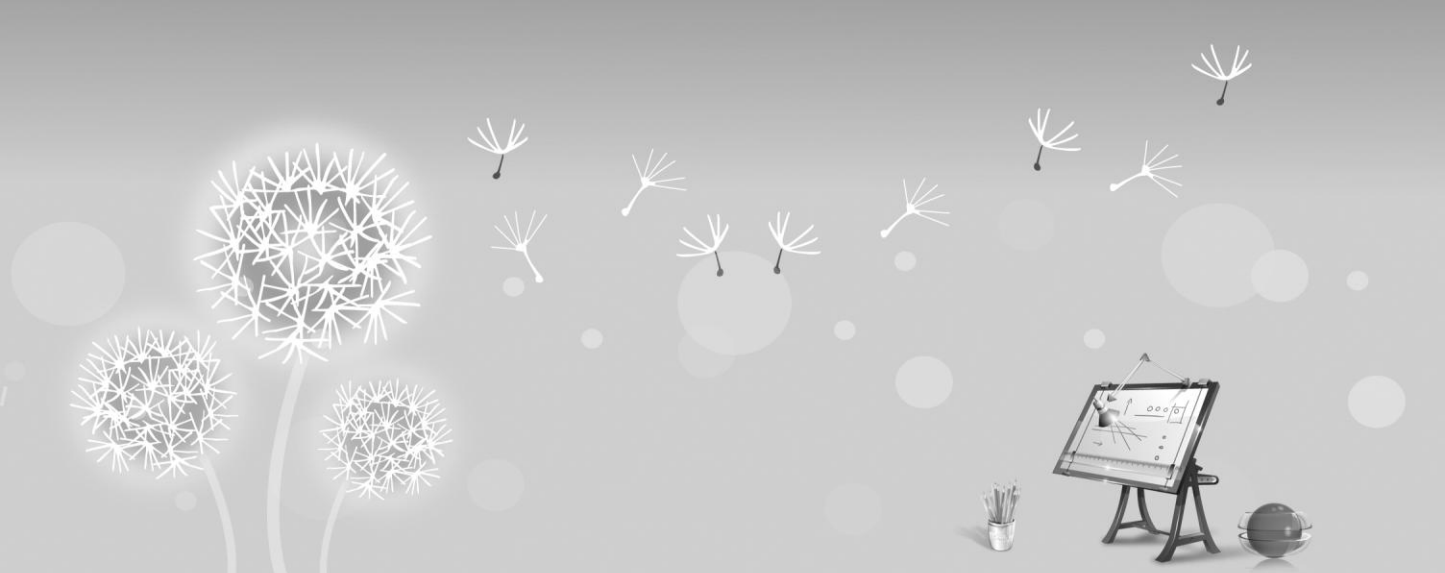




第1章 行列式

最初的行列式理论是人们从求解线性方程组的过程中建立和发展起来的，它在线性代数以及其他数学分支上都有着广泛的应用。本章我们主要讨论以下几个问题。

- (1) 行列式的定义；
- (2) 行列式的基本性质及计算方法；
- (3) 利用行列式求解线性方程组(克莱姆法则)。

1.1 二阶与三阶行列式

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

使用加减消元法求解该方程组未知数 x_1, x_2 的值，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，可得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \quad (1.2)$$

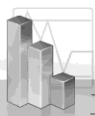
这就是求解二元线性方程组的一般公式。但这个公式很繁杂，不容易记忆。为此我们引入新的运算符号来表示式(1.2)这个结果，这就是行列式的起源。我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

为二阶行列式。它含有两行两列。横排称为行，竖排称为列。

数 a_{ij} ($i=1,2; j=1,2$) 为二阶行列式的元素，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示这个元素所在的行数，称为行标；第二个下标 j 表示这个元素所在的列数，称为列标。

从上述定义得知，二阶行列式是这样两项的代数和： $a_{11}a_{22}$ 是从左上角到右下角的对角线(又叫行列式的主对角线)上两个元素的乘积，取正号； $a_{12}a_{21}$ 是从右上角到左下角的对



角线(又叫次对角线)上两个元素的乘积, 取负号。可参考图 1.1 来记忆。

$$\begin{array}{c}
 \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{12} \\ & \text{O} & \text{N} \\ & \text{N} & \text{O} \\ -a_{21} & & a_{22} \end{vmatrix} + \\
 \end{array} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

图 1.1

根据二阶行列式的定义, 式(1.2)中的两个分子也可写成二阶行列式, 即

$$\begin{aligned}
 b_1a_{22} - a_{12}b_2 &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \\
 a_{11}b_2 - b_1a_{21} &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

当 $D \neq 0$ 时, 则方程组(1.1)的解的表达式(1.2)可以表示成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (1.3)$$

式(1.3)中分母的行列式 D 是由方程组(1.1)中未知数的系数按其原有的相对位置排成的, 称 D 为系数行列式; x_1 的分子行列式 D_1 可以看成是把系数行列式 D 的第 1 列换成方程组(1.1)中的常数项得到的, 而 x_2 的分子行列式 D_2 则可以看成是把系数行列式 D 的第 2 列换成式(1.1)中的常数项得到的。

例 1.1 用二阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

解 由于

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times 3 = -5 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 - 2 \times 7 = -10$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times 7 - 4 \times 3 = -5$$

因此

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 1$$

对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = x_3 \end{cases} \quad (1.4)$$

可引入三阶行列式的概念。我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1.5)$$

为三阶行列式。它有三行三列，共六项的代数和。这六项的和也可用对角线法则来记忆：从左上角到右下角三个元素的乘积取正号，从右上角到左下角三个元素的乘积取负号，如图 1.2 所示。

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

图 1.2

对于三元一次线性方程组(1.4)的求解，也有类似二元线性方程组的解的表达式(1.3)的结论。

设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

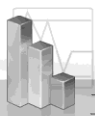
当 $D \neq 0$ 时，方程组(1.4)有解，且解可简单地表示成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \quad (1.6)$$

例 1.2 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

解 由三阶行列式的定义得

$$\begin{aligned} D &= 1 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 - 3 \times 1 \times 2 - 2 \times 3 \times 1 - 1 \times 3 \times 2 \\ &= 1 + 8 + 27 - 6 - 6 - 6 \\ &= 18 \end{aligned}$$



例 1.3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -27 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 31 & 2 & 4 \\ 29 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -81$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 31 & 4 \\ 5 & 29 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -108, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -135$$

由式(1.6)得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-81}{-27} = 3 \\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-108}{-27} = 4 \\ x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-135}{-27} = 5 \end{cases}$$

例 1.4 a, b 满足什么条件时有

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{其中 } a, b \text{ 均为实数})$$

解

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2$$

由题知 $a^2 + b^2 = 0$, 所以 a, b 须同时等于 0。因此, 当 $a=0$ 且 $b=0$ 时, 给定的行列式等于 0。

1.2 排 列

为了研究更为一般的线性方程组的求解公式, 我们需要引入 n 阶行列式的概念, 为此先介绍排列的一些基本知识。

定义 1.1 由数码 $1, 2, 3, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列。

例如, 12345 是一个五阶排列, 32415 也是一个五阶排列, 而 312 是一个三阶排列。

排列是有序数组, 同一组数码的排列顺序不同就会得到不同的排列, 例如由数码 1, 2, 3 组成的所有三阶排列为 123、132、213、231、312、321, 共有 $3! = 6$ 个。

我们把数字由小到大的 n 阶排列 $1234 \dots n$ 称为自然序排列。

定义 1.2 在一个 n 阶排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 中, 如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 的前面 ($i_s < i_t$), 则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序, 一个 n 阶排列中逆序的总数, 称为这个排列的逆序

数, 记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 。

例如, 在三阶排列 312 中, 3 与 1、3 与 2 各构成一个逆序数, 所以, 排列 312 的逆序数为 2。同理, 321 的逆序数为 3。

显然, 自然序排列的逆序数为 0。

定义 1.3 如果排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数是奇数, 则称此排列为**奇排列**; 逆序数是偶数的排列则称为**偶排列**。

例如, 排列 312 是偶排列, 排列 321 是奇排列, 自然序排列 $123 \cdots n$ 是偶排列。

定义 1.4 在一个 n 阶排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中, 如果其中某两个数 i_s 与 i_t 对调位置, 其余各数位置不变, 就得到另一个新的 n 阶排列 $i_1 i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$, 这样的变换称为一个对换, 记作 (i_s, i_t) 。

例如, 排列 312 是偶排列, 将排列中的 1 和 2 对换后, 得到新的排列 321, 由前得知, 321 是奇排列; 反之亦然。

一般来说, 有以下定理。

定理 1.1 任一排列经过一次对换后, 其奇偶性改变。

证明 略

定理 1.2 任一 n 阶排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 都可通过一系列对换与 n 阶自然序排列 $123 \cdots n$ 互变, 且所作对换的次数与这个 n 阶排列有相同的奇偶性。

证明 略

1.3 n 阶行列式

为了引入 n 阶行列式的定义。我们来观察 1.1 节中二阶、三阶行列式定义的特征。

已知二阶与三阶行列式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

通过仔细观察, 从中可以发现以下规律。

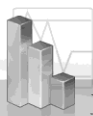
(1) 在二阶行列式的代数和中, 项的个数是 $2!$; 在三阶行列式的代数和中, 项的个数是 $3!$ 。

(2) 二阶行列式中的每一项都是取自不同的行和不同的列的两个元素的乘积, 三阶行列式中的每一项都是取自不同的行和不同的列的三个元素的乘积。

(3) 每一项的符号有如下规律: 当这一项中元素的行标是按自然序排列时, 如果元素的列标为偶排列, 则取正号; 为奇排列, 则取负号。

由二阶、三阶行列式定义进行推广, n 阶行列式的定义如下。

定义 1.5 由 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j=1, 2, \cdots, n$) 排成 n 行 n 列, 称



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n 阶行列式。它是 $n!$ 项的代数和, 每一项是取自不同行和不同列的 n 个元素的乘积, 各项的符号有如下规律: 每一项中各元素的行标排成自然序排列, 如果列标的排列为偶排列, 则取正号; 为奇排列, 则取负号。于是得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1.7)$$

其中, $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 阶排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和。式(1.7)称为 n 阶行列式按行标自然顺序排列的展开式, 其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 为这个排列的逆序数, $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项。

当 $n=2, 3$ 时, 这样定义的二阶、三阶行列式与前面 1.1 节中用对角线法则定义的是一致的。

注 当 $n=1$ 时, 一阶行列式为 $|a_{11}| = a_{11}$, 此时不要与绝对值符号混淆。

例 1.5 在五阶行列式中, $a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$ 这一项应取什么符号?

解 这一项各元素的行标是按自然顺序排列的, 而列标的排列为 23514。这个排列的逆序数为 4, 故这一项应取正号。

例 1.6 写出四阶行列式中, 带负号且包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项。

解 包含因子 $a_{11}a_{23}$ 项的一般形式为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 。

按定义, j_3 可取 2 或 4, j_4 可取 4 或 2, 因此包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项只能是 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 或 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$, 但因 1324 这个排列的逆序数 1 为奇数, 1342 这个排列的逆序数 2 为偶数, 所以此项只能是 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 。

$$\text{例 1.7 计算 } D = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & e & f \\ u & v & g & h \end{vmatrix}$$

解 这是一个四阶行列式, 按行列式的定义, 它应有 $4!=24$ 项。但只有 $adeh$ 、 $adfg$ 、 $bceh$ 、 $bcfg$ 不为 0。与上述四项相对应的列标的四阶排列分别为 1234、1243、2134、2143, 它们的逆序数分别为 0、1、1、2, 所以第一项和第四项应取正号, 第二项和第三项应取负号, 即

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & e & f \\ u & v & g & h \end{vmatrix} = adeh - adfg - bceh + bcfg$$

例 1.8 计算上三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{L} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \text{L} & a_{2n} \\ \text{M} & \text{M} & & \text{M} \\ 0 & 0 & \text{L} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中, $a_{ii} \neq 0$ ($i=1,2,\text{L},n$)。

解 由 n 阶行列式的定义, D 应有 $n!$ 项代数和, 其一般项为

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \text{L} a_{nj_n}$$

但由于 D 中有许多元素为 0, 因此只需求出上述一般项中不为 0 的项即可。

在 D 中, 第 n 行元素除 a_{nn} 外, 其余均为 0, 所以 $j_n = n$; 在第 $n-1$ 行中, 去除与 a_{nn} 同行及同列的元素后, 不为 0 的元素只有 $a_{n-1,n-1}$ 。同理逐步上推, 可以看出, 在展开式中只有 $a_{11}a_{22}\text{L}a_{nn}$ 一项不等于 0。而这项的列标所组成的排列的逆序数是 0, 所以取正号。

因此, 由行列式的定义可推出

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{L} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \text{L} & a_{2n} \\ \text{M} & \text{M} & & \text{M} \\ 0 & 0 & \text{L} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\text{L}a_{nn}$$

即上三角形行列式的值等于主对角线上各元素的乘积。

例 1.9 计算 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \text{L} & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \text{L} & a_{2n-1} & 0 \\ \text{M} & & \text{M} & \text{M} \\ a_{n1} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 。

解 方法同例 1.8, D 中只有一项 $a_{1n}a_{2n-1}\text{L}a_{n1}$ 不等于 0, 且列标构成排列的逆序数为

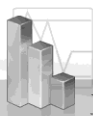
$$\tau = 1 + 2 + \text{L} + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

故 $D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\text{L}a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\text{L}a_{n1}$ 。

同理可推得以下结论:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \text{L} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \text{L} & 0 \\ \text{M} & \text{M} & & \text{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \text{L} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\text{L}a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \text{L} & 0 \\ 0 & a_{22} & \text{L} & 0 \\ \text{M} & \text{M} & & \text{M} \\ 0 & 0 & \text{L} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\text{L}a_{nn}$$



$$\begin{vmatrix} 0 & L & 0 & a_{1n} \\ 0 & L & a_{2n-1} & a_{2n} \\ M & & M & M \\ a_{n1} & L & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \Lambda a_{n1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & L & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & L & a_{2n-1} & 0 \\ M & M & & M & M \\ a_{n1} & 0 & L & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \Lambda a_{n1}$$

由 n 阶行列式的定义可知, 行列式中的每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积, 所以如果行列式某一行(列)的元素全为 0, 则该行列式必等于 0。

数的乘法是满足交换律的, 所以 n 阶行列式的项也可以写成

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} L a_{i_n j_n} \quad (1.8)$$

其中, $i_1 i_2 L i_n$ 、 $j_1 j_2 L j_n$ 是两个 n 阶排列, 它的符号由下面的定理来决定。

定理 1.3 n 阶行列式的一般项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 L i_n) + \tau(j_1 j_2 L j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} L a_{i_n j_n} \quad (1.9)$$

证明 若根据 n 阶行列式的定义来决定式(1.8)的符号, 就要把这 n 个元素重新排列, 使得它们的行标成自然顺序, 也就是排成

$$a_{1 j_1} a_{2 j_2} L a_{n j_n} \quad (1.10)$$

于是它的符号就是 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 L j_n)}$ 。

现在来证明式(1.7)与式(1.9)是一致的。我们知道从式(1.8)变到式(1.10)可经过一系列元素的对换来实现。每作一次对换, 元素的行标与列标所组成的排列 $i_1 i_2 L i_n$, $j_1 j_2 L j_n$ 就同时作一次对换, 因而它的逆序数之和 $\tau(i_1 i_2 L i_n) + \tau(j_1 j_2 L j_n)$ 的奇偶性不改变。

由此, n 阶行列式的定义又可叙述为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 L i_n) + \tau(j_1 j_2 L j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} L a_{i_n j_n}$$

1.4 行列式的性质

当行列式的阶数较高时, 根据定义手工计算 n 阶行列式的值是十分烦琐和困难的。要研究行列式的性质, 就要将复杂的行列式转化为较简单的行列式(如上三角形行列式等)来计算, 同时行列式的性质在理论上也相当重要。

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式, 记作 D^T , 即

若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的**转置行列式**。

反之, 行列式 D 也是行列式 D^T 的转置行列式, 即行列式 D 与行列式 D^T 互为转置行列式。

性质 1.1 行列式 D 与它的转置行列式 D^T 的值相等。

证明 行列式 D 中的元素 a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) 在 D^T 中位于第 j 行第 i 列上, 也就是说它的行标是 j , 列标是 i , 因此, 将行列式 D^T 按列自然序排列展开, 得

$$D^T = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

这正是行列式 D 按行自然序排列的展开式, 所以 $D=D^T$ 。

性质 1.1 表明, 行列式中行、列的地位是对称的, 即对于“行”成立的性质, 对“列”也同样成立; 反之亦然。

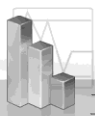
性质 1.2 交换行列式的两行(列), 行列式变号。

证明 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ (s\text{行}) \\ \\ \end{matrix}$$

将第 i 行与第 s 行 ($1 \leq i < s \leq n$) 互换后, 得到行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ (s\text{行}) \\ \\ \end{matrix}$$



显然, 乘积 $a_{1j_1} L a_{ij_i} L a_{sj_s} L a_{nj_n}$ 在行列式 D 和 D_1 中, 都是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积。根据 1.3 节定理 1.3, 对于行列式 D , 这一项的符号由 $(-1)^{\tau(1L iL sL n)+\tau(j_1L j_iL j_sL j_n)}$ 决定; 而对于行列式 D_1 , 这一项的符号由 $(-1)^{\tau(1L sL iL n)+\tau(j_1L j_sL j_iL j_n)}$ 决定。由于排列 $1L iL sL n$ 与排列 $1L sL iL n$ 的奇偶性相反, 所以 D_1 中的每一项都是 D 中的对应项的相反数, 即 $D = -D_1$ 。

注 互换 i, j 两行(列)的运算记为 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$)。

例 1.10 计算 $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 。

解 将第 2、3 列互换, 得

$$D = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

再将第 1、3 行互换, 得

$$D = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

推论 若行列式有两行(列)的对应元素相同, 则此行列式的值等于 0。

性质 1.3 行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ M & M & & M \\ ka_{i1} & ka_{i2} & L & ka_{in} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ M & M & & M \\ a_{i1} & a_{i2} & L & a_{in} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 由行列式的定义有

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum_{j_1 j_2 L j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 L j_n)} a_{1j_1} L (ka_{ij_i}) L a_{nj_n} \\ &= k \sum_{j_1 j_2 L j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 L j_n)} a_{1j_1} L a_{ij_i} L a_{nj_n} \\ &= \text{右端} \end{aligned}$$

此性质也可表述为: 用数 k 乘行列式的某一行(列)的所有元素, 等于用数 k 乘此行(列)。

注 (1) 从第 i 行(列)提取公因子 k 的运算记为 $r_i \times \frac{1}{k} \left(c_i \times \frac{1}{k} \right)$ 。

(2) 提取公因子时不需要行列式中所有元素都有公因子, 只要行列式某一行(列)中的所有元素有公因子, 就可以将其提取到行列式符号的外面。

推论 如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例, 则此行列式的值等于 0。

例 1.11 计算 $D = \begin{vmatrix} ab & ac & ae \\ bd & cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$ 。

解

$$D = \begin{vmatrix} ab & ac & ae \\ bd & cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = adf \begin{vmatrix} b & c & e \\ b & c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} = 0$$

性质 1.4 如果行列式的某一行(列)的各元素都是两个数的和, 则此行列式等于两个相应的行列式的和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ M & M & & M \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & L & b_{in} + c_{in} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ M & M & & M \\ b_{i1} & b_{i2} & L & b_{in} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ M & M & & M \\ c_{i1} & c_{i2} & L & c_{in} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 左端 = $\sum_{j_1 j_2 L j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 L j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} L (b_{ij_i} + c_{ij_i}) L a_{nj_n}$

$$= \sum_{j_1 j_2 L j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 L j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} L b_{ij_i} L a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 L j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 L j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} L c_{ij_i} L a_{nj_n}$$

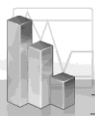
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ M & M & & M \\ b_{i1} & b_{i2} & L & b_{in} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ M & M & & M \\ c_{i1} & c_{i2} & L & c_{in} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix}$$

= 右端

性质 1.5 把行列式的某一行(列)的所有元素乘以数 k 加到另一行(列)的相应元素上, 行列式的值不变。即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ M & M & & M \\ a_{i1} & a_{i2} & L & a_{in} \\ M & M & & M \\ a_{s1} & a_{s2} & L & a_{sn} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 } s \text{ 行}]{\text{第 } i \text{ 行} \times k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ M & M & & M \\ a_{i1} & a_{i2} & L & a_{in} \\ M & M & & M \\ ka_{i1} + a_{s1} & ka_{i2} + a_{s2} & L & ka_{in} + a_{sn} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 由性质 1.4, 有



$$\begin{aligned}
 \text{右端} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ M & M & & M \\ a_{i1} & a_{i2} & L & a_{in} \\ M & M & & M \\ ka_{i1} & ka_{i2} & L & ka_{in} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ M & M & & M \\ a_{i1} & a_{i2} & L & a_{in} \\ M & M & & M \\ a_{s1} & a_{s2} & L & a_{sn} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= k \times 0 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ M & M & & M \\ a_{i1} & a_{i2} & L & a_{in} \\ M & M & & M \\ a_{s1} & a_{s2} & L & a_{sn} \\ L & L & & L \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix} = \text{左端}
 \end{aligned}$$

注 将第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)上的运算记为 $r_i + kr_j$ ($c_i + kc_j$)。

作为行列式性质的应用,我们来看以下几个例子。

例 1.12 计算 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解 这个行列式的特点是各行 4 个数的和都是 5, 我们把第 2、3、4 各列同时加到第 1 列, 把公因子提出, 然后把第 1 行乘以 -1 加到第 2、3、4 行上就成为三角形行列式。具体计算如下。

$$D \xrightarrow[i=2,3,4]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \times \frac{1}{5}} 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3,4]{r_1-r_i} 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

例 1.13 计算 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

解

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+5r_1]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_2 \div 2} 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \frac{r_3+2r_2}{r_4-8r_2} 2 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \frac{r_4 \div 5}{r_4 + \frac{1}{2}r_3} 10 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = 40$$

注 为避免麻烦的分数四则运算, 第一步先交换第 1、2 两列, 使得第 1 行第 1 列位置的元素置换成 1。这是常用的技巧。

例 1.14 计算 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & L & a \\ a & x & L & a \\ M & M & & M \\ a & a & L & x \end{vmatrix}$

解 可以观察到行列式各行元素之和等于 $x+(n-1)a$, 有

$$D_n \xrightarrow[\substack{r_i+c_i \\ i=2,3,L,n}]{\substack{r_1+c_1 \\ i=2,3,L,n}} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & L & a \\ x+(n-1)a & x & L & a \\ M & M & & M \\ x+(n-1)a & a & L & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & L & a \\ 1 & x & L & a \\ M & M & & M \\ 1 & a & L & x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_i-r_1 \\ i=2,3,L,n}]{\substack{r_1-r_1 \\ i=2,3,L,n}} [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & L & a \\ 0 & x-a & L & 0 \\ M & M & & M \\ 0 & 0 & L & x-a \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

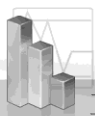
例 1.15 计算 $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$

解

$$D \xrightarrow[\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_2}]{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-r_2}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-r_2}]{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-r_2}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4-r_3}]{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-r_2}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$$

例 1.16 证明 $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$



证明

$$\begin{aligned}
 \text{左端} &= \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1} \begin{vmatrix} a+b & c-a & c+a \\ a_1+b_1 & c_1-a_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & c_2-a_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{c_3+c_2} \begin{vmatrix} a+b & c-a & 2c \\ a_1+b_1 & c_1-a_1 & 2c_1 \\ a_2+b_2 & c_2-a_2 & 2c_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a+b & c-a & c \\ a_1+b_1 & c_1-a_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_2-a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{c_2-c_3} 2 \begin{vmatrix} a+b & -a & c \\ a_1+b_1 & -a_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & -a_2 & c_2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2} 2 \begin{vmatrix} b & -a & c \\ b_1 & -a_1 & c_1 \\ b_2 & -a_2 & c_2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

1.5 行列式按行(列)展开

上一节我们通过行列式的性质将复杂的行列式转化为较简单的行列式(如上三角形行列式等)来计算,这一节将研究如何把较高阶的行列式转化为较低阶的行列式来计算。为此,先介绍余子式和代数余子式的概念。

定义 1.6 在 n 阶行列式中,划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后,余下的元素按原来的位置构成一个 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij} ;在元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 前面添上符号 $(-1)^{i+j}$,称为元素 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij} ,即 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 。

例如,在四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 中, a_{23} 的余子式是

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

a_{23} 的代数余子式是

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

定理 1.4 n 阶行列式 D 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\dots,n)$$

证明 只需证明按行展开的情形,按列展开的情形同理可证。

(1) 首先证明按第 1 行展开的情形。

根据性质 1.4 有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + 0 + L + 0 & 0 + a_{12} + 0 + L + 0 & L & 0 + L + 0 + a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & L & 0 \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & L & 0 \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix} + L + \begin{vmatrix} 0 & 0 & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix}$$

按行列式的定义有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & L & 0 \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 L j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 L j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} L a_{nj_n}$$

$$= a_{11} \sum_{j_1 j_2 L j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 L j_n)} a_{2j_2} L a_{nj_n} = a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}$$

同理, 有

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & L & 0 \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12Lj_n)} \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & L & 0 \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & & M \\ a_{n2} & a_{n1} & L & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12Lj_n)} a_{12} M_{12} = a_{12} A_{12}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{1n} & 0 & L & 0 \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n-1} \\ M & M & & M \\ a_{nn} & a_{n1} & L & a_{nn-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} a_{1n} M_{1n} = a_{1n} A_{1n}$$

所以 $D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$ 。

(2) 下面证明按第 i 行展开的情形。

将第 i 行分别与第 $i-1$ 行、第 $i-2$ 行、……、第 1 行进行交换, 把第 i 行换到第 1 行, 然后再按(1)的情形, 即有

$$D = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & L & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1} a_{i1} (-1)^{1+i} M_{i1} + (-1)^{i-1} a_{i2} (-1)^{1+i} M_{i2} + L + (-1)^{i-1} a_{in} (-1)^{1+n} M_{in}$$

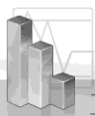
$$= a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + L + a_{in} A_{in}$$

定理 1.5 n 阶行列式 D 中某一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于 0, 即

$$a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \dots + a_{in}A_{sn} = 0 (i \neq s)$$

或

$$a_{1j}A_{1t} + a_{2j}A_{2t} + \dots + a_{nj}A_{nt} = 0 (j \neq t)$$



证明 只证行的情形,列的情形同理可证。考虑辅助行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ M & M & & M \\ a_{i1} & a_{i2} & L & a_{in} \text{ (i行)} \\ M & M & & M \\ a_{s1} & a_{s2} & L & a_{sn} \text{ (s行)} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个行列式的第*i*行与第*s*行的对应元素相同,它的值应等于0。由定理1.4将 D_1 按第*s*行展开,有

$$D_1 = a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + L + a_{in}A_{sn} = 0 (i \neq s)$$

定理1.4和定理1.5可以合并写成

$$a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + L + a_{in}A_{sn} = \begin{cases} D & (i = s) \\ 0 & (i \neq s) \end{cases} \quad (1.11)$$

或

$$a_{1j}A_{1t} + a_{2j}A_{2t} + L + a_{nj}A_{nt} = \begin{cases} D & (j = t) \\ 0 & (j \neq t) \end{cases} \quad (1.12)$$

定理1.4表明, n 阶行列式可以用 $n-1$ 阶行列式来表示,因此该定理又称行列式的降阶定理。利用它并结合行列式的性质,可以大大简化行列式的计算。计算行列式时,一般利用性质将某一行(列)化简为仅有一个非零元素,再按定理1.4展开,变为低一阶行列式,以此类推,逐次降阶,这样 n 阶行列式就可以用三阶或二阶行列式来表示及计算。这是行列式计算中的一种常用方法。

例 1.17 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ 。

解 选择具有较多0元素的行(或列)对行列式进行展开,这里按第3行展开,得

$$D = 4 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \times 2 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -56$$

例 1.18 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ 。

解

$$D \xrightarrow[c_4-7c_3]{c_2-c_3} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & -14 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 10 & 3 & 14 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_1+\frac{1}{2}c_3]{c_2+c_3} \begin{vmatrix} 9 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \\ 17 & 17 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

例 1.19 计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & a & b & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & L & 0 & 0 \\ M & M & M & & M & M \\ 0 & 0 & 0 & L & a & b \\ b & 0 & 0 & L & 0 & a \end{vmatrix}$

解 按第 1 列展开得

$$D = (-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} a & b & L & 0 & 0 \\ 0 & a & L & 0 & 0 \\ M & M & & M & M \\ 0 & 0 & L & a & b \\ 0 & 0 & L & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b & 0 & L & 0 & 0 \\ a & b & L & 0 & 0 \\ M & M & & M & M \\ 0 & 0 & L & b & 0 \\ 0 & 0 & L & a & b \end{vmatrix}$$

$$= aa^{n-1} + (-1)^{n+1} bb^{n-1} = a^n + (-1)^{n+1} b^n$$

例 1.20 试证

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & L & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & L & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & L & a_n^2 \\ M & M & M & & M \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & L & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \quad (1.13)$$

式中左端叫范德蒙德行列式。

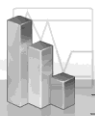
证明 用数学归纳法证明。

(1) 当 $n=2$ 时, 计算二阶范德蒙德行列式的值:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

可见 $n=2$ 时, 结论成立。

(2) 假设 $n-1$ 阶范德蒙德行列式结论成立, 我们来计算 n 阶范德蒙德行列式, 把第 $n-1$ 行的 $(-a_1)$ 倍加到第 n 行, 再把第 $n-2$ 行的 $(-a_1)$ 倍加到第 $n-1$ 行, 以此类推, 最后把第 1 行的 $(-a_1)$ 倍加到第 2 行, 得到



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & L & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & L & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & L & a_n^2 \\ M & M & M & & M \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & L & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & L & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & L & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & L & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & L & a_n^2 - a_1 a_n \\ M & M & M & & M \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & L & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & L & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & L & a_n(a_n - a_1) \\ M & M & & M \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & L & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \\
 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)L(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & L & 1 \\ a_2 & a_3 & L & a_n \\ M & M & & M \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & L & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

后面的这个行列式是 $n-1$ 阶范德蒙德行列式, 由归纳假设得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & L & 1 \\ a_2 & a_3 & L & a_n \\ M & M & & M \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & L & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{2 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

于是有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & L & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & L & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & L & a_n^2 \\ M & M & M & & M \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & L & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)L(a_n - a_1) \prod_{2 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

例 1.21 证明
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

证明 将上面等式左端的行列式按第 1 行展开, 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ c_{11} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\
 = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12} a_{21} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

本例题的结论对一般情况也是成立的, 即

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1k} & 0 & 0 & L & 0 \\ M & M & & M & M & M & & M \\ a_{k1} & a_{k2} & L & a_{kk} & 0 & 0 & L & 0 \\ c_{11} & c_{12} & L & c_{1k} & b_{11} & b_{12} & L & b_{1m} \\ M & M & & M & M & M & & M \\ c_{m1} & c_{m2} & L & c_{mk} & b_{m1} & b_{m2} & L & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1k} \\ M & M & & M \\ a_{k1} & a_{k2} & L & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1m} \\ M & M & & M \\ b_{m1} & b_{m2} & L & b_{mm} \end{vmatrix}$$

1.6 克莱姆法则

行列式的概念是从 n 元线性方程组公式求解引入的, 作为行列式的应用, 克莱姆法则恰好表示了系数行列式不为零条件下的 n 元线性方程组的公式解。它是 1.1 节中二元、三元线性方程组求解公式的推广。

设含有 n 个未知数、 n 个方程的线性方程组为

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + L + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + L + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &M \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + L + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

它的系数 a_{ij} 所构成的行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & & M \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为方程组(1.14)的系数行列式。

定理 1.6 (克莱姆法则) 如果线性方程组(1.14)的系数行列式 $D \neq 0$, 则方程组(1.14)有唯一解:

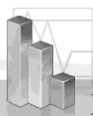
$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, L, x_n = \frac{D_n}{D} \quad (1.15)$$

其中, $D_j (j=1, 2, L, n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列换成常数项 b_1, b_2, L, b_n , 其余各列不变而得到的行列式。

这个法则包含两个结论: 方程组(1.14)有解且唯一。下面分两步来证明。

(1) 在 $D \neq 0$ 的条件下, 方程组(1.14)有解, 我们将验证式(1.15)给出的数组 $\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, L, \frac{D_n}{D}$ 是方程组(1.14)的解。

(2) 若方程组有解, 必由式(1.15)给出, 从而解是唯一的。



证明 首先将 $x_1 = \frac{D_1}{D}$, $x_2 = \frac{D_2}{D}$, L, $x_n = \frac{D_n}{D}$ 代入方程组(1.14)的第 i 个方程有

$$\begin{aligned}\text{左端} &= a_{i1} \frac{D_1}{D} + a_{i2} \frac{D_2}{D} + \text{L} + a_{in} \frac{D_n}{D} \\ &= \frac{1}{D} (a_{i1} D_1 + a_{i2} D_2 + \text{L} + a_{in} D_n)\end{aligned}$$

把 D_1 按第 1 列展开, D_2 按第 2 列展开, …… , D_n 按第 n 列展开, 然后代入上式有

$$\begin{aligned}\text{左端} &= \frac{1}{D} [a_{i1}(b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \text{L} + b_i A_{i1} + \text{L} + b_n A_{n1}) \\ &\quad + a_{i2}(b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \text{L} + b_i A_{i2} + \text{L} + b_n A_{n2}) \\ &\quad + \text{L} + a_{in}(b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \text{L} + b_i A_{in} + \text{L} + b_n A_{nn})] \\ &= \frac{1}{D} [b_1(a_{i1} A_{11} + a_{i2} A_{21} + \text{L} + a_{in} A_{n1}) \\ &\quad + b_2(a_{i1} A_{12} + a_{i2} A_{22} + \text{L} + a_{in} A_{n2}) \\ &\quad + \text{L} + b_i(a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \text{L} + a_{in} A_{in}) \\ &\quad + \text{L} + b_n(a_{i1} A_{n1} + a_{i2} A_{n2} + \text{L} + a_{in} A_{nn})] \\ &= \frac{1}{D} [b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 + \text{L} + b_i \cdot D + \text{L} + b_n \cdot 0] \\ &= \frac{1}{D} b_i \cdot D = b_i = \text{右端}\end{aligned}$$

这样就证明了 $\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \text{L}, \frac{D_n}{D}$ 是方程组(1.14)的解。

其次, 证明方程组若有解, 其解必由式(1.15)给出, 即解是唯一的。

假设 $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \text{L}, x_n = k_n$ 是方程组(1.14)的一个解, 把它代入方程组(1.14), 有

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \text{L} + a_{1n}k_n = b_1 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \text{L} + a_{2n}k_n = b_2 \\ \text{M} \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \text{L} + a_{nn}k_n = b_n \end{cases}$$

将系数行列式 D 第 j 列的代数余子式 $A_{1j}, A_{2j}, \text{L}, A_{nj}$ 乘上式对应等式的两端, 得

$$\begin{cases} a_{11}A_{1j}k_1 + \text{L} + a_{1j}A_{1j}k_j + \text{L} + a_{1n}A_{1j}k_n = b_1A_{1j} \\ a_{21}A_{2j}k_1 + \text{L} + a_{2j}A_{2j}k_j + \text{L} + a_{2n}A_{2j}k_n = b_2A_{2j} \\ \text{M} \\ a_{n1}A_{nj}k_1 + \text{L} + a_{nj}A_{nj}k_j + \text{L} + a_{nn}A_{nj}k_n = b_nA_{nj} \end{cases}$$

把这 n 个等式相加, 并利用行列式按列展开定理, 得

$$0 \cdot k_1 + \text{L} + D \cdot k_j + \text{L} + 0 \cdot k_n = D_j$$

于是得 $D \cdot k_j = D_j$ 。

因为 $D \neq 0$, 所以 $k_j = \frac{D_j}{D}$ 。在上述证明过程中 j 可遍取 $1, 2, \text{L}, n$, 于是有

$$k_1 = \frac{D_1}{D}, k_2 = \frac{D_2}{D}, \text{L}, k_n = \frac{D_n}{D}$$

例 1.22 用克莱姆法则解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -142$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -142, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -284$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -426, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 142$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 3, \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = 4$$

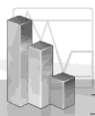
当方程组(1.14)中的常数项都等于 0 时, 此时的线性方程组称为**齐次线性方程组**。即

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\} \quad (1.16)$$

当解 $x_1=k_1, x_2=k_2, \dots, x_n=k_n$ 不全为零时, 称这组解为方程组(1.16)的非零解。

定理的逆否命题如下。

例 1.23 当 λ 为何值时, 如下方程组有非零解?



$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 5 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

因此方程组有非零解时, $D=0$, 解得 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-3$, 即当 λ 为 1 或 2 或 -3 时方程组有非零解。

习 题

1. 计算下列行列式。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}; (2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}; (3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}; (4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}; (5) \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}.$$

2. 计算下列线性方程组。

$$(1) \begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ 3x + 7y = 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

3. 按自然数从小到大为标准次序, 求下列各排列的逆序数。

$$(1) 1234; \quad (2) 4132; \quad (3) 3421; \quad (4) 2413.$$

4. 在六阶行列式中, 下列各元素乘积是否为行列式的一项? 若是, 应取什么符号?

$$(1) a_{15}a_{23}a_{36}a_{44}a_{51}a_{62}; \quad (2) a_{13}a_{36}a_{21}a_{65}a_{52}a_{44}.$$

5. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{24}$ 的项。

6. 用行列式的定义计算下列行列式。

$$(1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 1 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (2) D_4 = \begin{vmatrix} 0 & b & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & e \end{vmatrix}.$$

7. 计算下列行列式。

$$(1) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & -12 & 0 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & L & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & L & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & L & 0 & 0 \\ M & M & M & O & M & M \\ 1 & 0 & 0 & L & n-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & L & 0 & n \end{vmatrix}.$$

$$8. \text{ 试证明 } \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

$$9. \text{ 解方程 } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & L & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & L & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & L & 1 \\ M & M & M & O & M \\ 1 & 1 & 1 & L & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$10. \text{ 已知 } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \text{ 求:}$$

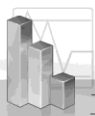
$$(1) A_{51} + 2A_{52} + 3A_{53} + 4A_{54} + 5A_{55};$$

$$(2) A_{31} + A_{32} + A_{33} \text{ 及 } A_{34} + A_{35}.$$

11. 计算下列行列式。

$$(1) D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & b_n \\ & O & & & N \\ & & a_1 & b_1 & \\ & & c_1 & d_1 & \\ & N & & & O \\ c_n & & & & d_n \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}.$$



12. 用克莱姆法则求解下列方程组。

$$(1) \begin{cases} x+2y+2z=3 \\ -x-4y+z=7 \\ 3x+7y+4z=3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}; \quad (3) \begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2+x_4=1 \\ -7x_2+3x_3+x_4=3 \end{cases}$$

13. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ 3x_1-x_2-kx_3+15x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=1 \end{cases}$$

问 k 取何值时, 方程组有唯一解?

14. 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+ax_4=0 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2-3x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+ax_3+bx_4=0 \end{cases}$$

有非零解, 则 a, b 应满足什么条件?