开 篇 综 述

高考数学中有关选择题、填空题的难点，历来是数学老师和优秀学生所关注的焦点.我们在解出这些难题之时，如果可以提出问题，对题目从“深”与“申”两个层面上进一步研究，挖掘每个题目的背景，那么对提高解题能力和研究型学习能力都大有裨益.

纵观历年高考题目不难发现，这些难度偏大的选择题、填空题的题干几乎都是紧密围绕着高中数学几大重点模块知识展开叙述，只是在考查的灵活性以及多个知识点的综合应用上下了功夫.因而我们要立足本质，强化重要内容，对于关键知识点深刻领会，触类旁通.

本书从全新的视角，以高考数学重要模块为明线、数学解题思想和方法为暗线，串联了选择题、填空题案例共计 36 个，从挖掘试题本源、探寻试题内涵的角度，对试题进行庖丁解牛式的讲解.相信本书中的每一道试题都能带给你不一样的感受，让你的脑洞大开.

第 一 讲

案例一 多角度分析集合中的问题

案 例 导 言

在解答有关集合的问题时，始终要清晰地知晓问题中元素与元素、元素与集合、集合与集合之间的关系，然后运用集合元素的特征、交并补的运算，并辅以韦恩图、数轴等图形进行数形结合的分析推导. 本案例从不同角度出发，分别转化为二项式定理、集合个数、数列的相关问题进行解答，在解答过程中，请留意分类讨论思想和递推思想的运用及分类的标准如何影响问题的转化.

经 典 案 例

案例 1 (2015 年朝阳区模拟 14)假设 $M_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$，$n\geqslant 2$，$n\in \mathbf{N}^*$，$A,B\subseteq M_n$，集合 A 中最大的数小于集合 B 中最小的数，问有序对“(A,B)”有________对.

解析 **角度 1：从 $A\cup B$ 元素的个数分析，进行分类相加**

假设 $A\cup B$ 中有 m 个元素，则 $2\leqslant m\leqslant n$，$m\in \mathbf{N}^*$.

设 m 个元素分别为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m$，且 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_m$，即 $A\cup B=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$. 由题意得：

$$A=\{a_1\},\quad B=\{a_2,a_3,\cdots,a_m\},$$

$$A=\{a_1,a_2\},\quad B=\{a_3,a_4,\cdots,a_m\},$$

$$\vdots$$

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{m-1}\},\quad B=\{a_m\},$$

以上共 $m-1$ 种可能.

于是，当 $A\cup B$ 中有 m 个元素时，满足题意的有序对“(A,B)”共有 $(m-1)\mathrm{C}_n^m$ 对，从而本题的答案即为 $\sum\limits_{m=2}^{n}\mathrm{C}_n^m(m-1)$.

下面给出计算 $\sum\limits_{m=2}^{n}(m-1)\mathrm{C}_n^m$ 的方法.

$$\sum_{m=2}^{n}(m-1)C_n^m=C_n^2+2C_n^3+3C_n^4+\cdots+(n-1)C_n^n$$
$$=2C_n^2+3C_n^3+4C_n^4+\cdots+nC_n^n-(C_n^2+C_n^3+C_n^4+\cdots+C_n^n).$$

令

$$x=2C_n^2+3C_n^3+4C_n^4+\cdots+(n-2)C_n^{n-2}, \quad ①$$

则

$$x=(n-2)C_n^2+(n-3)C_n^3+(n-4)C_n^4+\cdots+2C_n^{n-2}, \quad ②$$

①+②,得

$$2x=n(C_n^2+C_n^3+C_n^4+\cdots+C_n^{n-2})=n[(1+1)^n-C_n^0-C_n^1-C_n^{n-1}-C_n^n]=n(2^n-2-2n),$$

所以

$$2C_n^2+3C_n^3+\cdots+(n-2)C_n^{n-2}=n(2^{n-1}-1-n).$$

于是

$$\sum_{m=2}^{n}(m-1)C_n^m=2C_n^2+3C_n^3+4C_n^4+\cdots+(n-2)C_n^{n-2}+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n-(2^n-n-1)$$
$$=n(2^{n-1}-n-1)+n(n-1)+n-2^n+n+1=(n-2)2^{n-1}+1,$$

所以有序对“(A,B)”共有$(n-2)2^{n-1}+1$ 对.

评注

在以上的计算过程中,反复使用了组合恒等式 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$ 进行转化、化简.

角度 2:按 A 中最大的数进行分析并分类相加

当 A 中最大的数是 1 时,那么集合 A 有 $2^0=1$ 种选择,此时集合 B 有 $2^{n-1}-1$ 种选择;

当 A 中最大的数是 2 时,那么集合 A 有 $2^1=2$ 种选择,此时集合 B 有 $2^{n-2}-1$ 种选择;

以此类推,当 A 中最大的数是 $m(1\leqslant m\leqslant n-1,m\in \mathbf{N}^*)$时,那么集合 A 有 2^{m-1} 种选择,此时集合 B 有 $2^{n-m}-1$ 种选择. 故满足题意的有序对“(A,B)”的对数应为 $\sum\limits_{m=1}^{n-1}2^{m-1}(2^{n-m}-1)$. 具体计算过程如下:

$$\sum_{m=1}^{n-1}2^{m-1}(2^{n-m}-1)=2^0(2^{n-1}-1)+2^1(2^{n-2}-1)+2^2(2^{n-3}-1)+\cdots+2^{n-2}(2^1-1)$$
$$=2^{n-1}-2^0+2^{n-1}-2^1+2^{n-1}-2^2+\cdots+2^{n-1}-2^{n-2}$$
$$=(n-1)2^{n-1}-(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2})$$
$$=(n-1)2^{n-1}-\frac{2^0(2^{n-1}-1)}{2-1}$$

$$=(n-1)2^{n-1}-2^{n-1}+1$$
$$=(n-2)2^{n-1}+1.$$

即有序对"(A,B)"有$(n-2)2^{n-1}+1$对.

角度3:利用递推的思想

设本题答案为a_n。那么对$M_{n-1}=\{1,2,3,\cdots,n-1\}$,$n\geqslant 3$,$n\in\mathbf{N}^*$,$A,B\subseteq M_{n-1}$,集合$A$中最大的数小于集合$B$中最小的数,设此题答案为$a_{n-1}$.本题相当于将集合$M_{n-1}$中再加入$n$这个元素,则

$$\begin{cases}\text{无元素 } n \text{ 的存在}:a_n=a_{n-1}(\text{包括 } M_{n-1} \text{ 中的所有情况})\\ \text{有元素 } n \text{ 的存在}\begin{cases}\text{把 } n \text{ 放入 } a_{n-1} \text{ 种情况的集合中}:a_n=a_{n-1}\\ \text{令 } B=\{n\},\text{则 } A \text{ 有 } 2^{n-1}-1 \text{ 种情况}:a_n=2^{n-1}-1\end{cases}\end{cases}.$$

所以得到递推关系$a_n=2a_{n-1}+2^{n-1}-1$且$a_2=1(n\geqslant 3)$,下面来求a_n.

两边同时除以2^n,得

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{2a_{n-1}}{2^n}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}=\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}.$$

令$\frac{a_n}{2^n}=b_n$,则$b_n=b_{n-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}$,即$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}(n\geqslant 3)$.

再利用累加法求b.当$n\geqslant 3$时,有

$$b_3-b_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3},$$
$$b_4-b_3=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^4},$$
$$\vdots$$
$$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}.$$

则

$$b_n-b_2=\frac{1}{2}(n-2)-\frac{\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(n-2)+\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{4},$$

$$b_2=\frac{a_2}{2^2}=\frac{1}{4},$$

所以

$$b_n=\frac{1}{2}(n-2)+\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

即

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}(n-2)+\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

从而

$$a_n=2^{n-1}(n-2)+1(n\geqslant 2).$$

因此本题答案为 $2^{n-1}(n-2)+1$.

评注

求$\{a_n\}$的通项公式的方法不止一个，由于本角度主要是给读者们介绍递推的思想，故对于如何求$\{a_n\}$的通项公式的方法不再探究，留给读者自行研究.

案例二　利用方差妙解一类函数最值问题

案例导言

方差是描述一组数据波动情况的特征数，与平均数有密切的关系，那么它与均值不等式有什么千丝万缕的联系吗？本案例将主要讲解如何利用方差的知识，迅速解答一类函数的最值问题.

首先，让我们复习一下方差的概念，并提出解决问题的思路和背景方法.

方差定义为

$$s^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n},$$

即

$$\begin{aligned}s^2&=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}\\&=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-2\bar{x}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+n\bar{x}^2}{n}\\&=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-2\bar{x}^2+\bar{x}^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-\bar{x}^2.\end{aligned}$$

由于 $s^2\geqslant 0$，则存在不等关系式$\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}\geqslant\bar{x}^2$，当我们把以上关系合理地利用在解题之中，就可以很快地求解一类与函数最值有关的问题.

经典案例

案例 2　求函数 $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$ 的最大值.

解析　可以利用案例导言中提出的不等关系式$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}\geqslant\overline{x}^2$速解本题.我们有

$$\frac{x-1+3-x}{2}\geqslant\left(\frac{y}{2}\right)^2\Rightarrow\frac{y^2}{4}\leqslant1\Rightarrow y^2\leqslant4.$$

又 $y>0$,所以 $y_{\max}=2$.

评注

用跨界的知识解决问题需要很强的转化、划归的能力,同时也可以锻炼一个人的发散思维、多角度分析问题的能力,应在平时的练习中注意学习与培养.

案例研究与推广应用

一、相似案例研究

例 2.1　(1)求函数 $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{6-2x}$的最大值;

(2)求函数 $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{12-6x}$的最大值.

解析　(1)**典型错解:**

$$\frac{x-1+6-2x}{2}\geqslant\left(\frac{y}{2}\right)^2,\qquad ①$$

即

$$\frac{y^2}{4}\leqslant\frac{5-x}{2}\Rightarrow y^2\leqslant2(5-x)=10-2x.$$

再由定义域可知$\{x|1\leqslant x\leqslant3\}$,则

$$y^2\leqslant10-2x\leqslant8\Rightarrow y_{\max}=2\sqrt{2}.$$

以上解法虽然看上去顺理成章,但是这个过程忽略了一个重要问题.对于①,当 $x-1=6-2x$ 时等号成立,而 $10-2x\leqslant8$ 这一步需要 $x=1$ 时等号成立,而这两者明显不可兼得,所以只可以证明此时 $y<2\sqrt{2}$,不能取等号.

正解:方差法解题成立的一个很重要的前提条件是 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 应该是一个定值.考虑到这一点,本题应该给出如下做法.

$$y=\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3-x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3-x}.$$

利用关系可得

$$\frac{x-1+\frac{1}{2}(3-x)+\frac{1}{2}(3-x)}{3}\geqslant\left(\frac{y}{3}\right)^2,$$

所以$\left(\frac{y}{3}\right)^2\leqslant\frac{2}{3}\Rightarrow y^2\leqslant 6$，当且仅当$x=\frac{5}{3}$时，$y$有最大值，且$y_{\max}=\sqrt{6}$.

(2) 由$y=\sqrt{x-1}+\sqrt{6}\cdot\sqrt{2-x}$，可将第2项等分成6项得到

$$y=\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\sqrt{2-x}+\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\sqrt{2-x}+\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\sqrt{2-x}+\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\sqrt{2-x}+\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\sqrt{2-x}+\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\sqrt{2-x}.$$

利用案例导言中的不等关系式可得

$$\frac{x-1+\frac{1}{6}(2-x)\times 6}{7}\geqslant\left(\frac{y}{7}\right)^2,$$

所以$y^2\leqslant 7$，当且仅当$y=\frac{8}{7}$时，y有最大值，且$y_{\max}=\sqrt{7}$.

评注

即使学习完以上的解法之后，若做题时不注意一些细节，也还会发生错误. 请看下面的例子.

例 2.2 求函数$f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}+\sqrt{6-2x}$的最大值.

解析 **错解**：设$y=f(x)$，利用不等关系式可得

$$\frac{x-1+x-2+6-2x}{3}\geqslant\left(\frac{y}{3}\right)^2, \quad ①$$

所以$\left(\frac{y}{3}\right)^2\leqslant 1\Rightarrow y_{\max}=3$.

正解：利用方差法解题时除了应注意$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$为定值这个条件以外，还应当注意等号成立的条件.

很明显，$s^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}\geqslant 0$，当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n=\bar{x}$时等号成立，这一点通过方差的定义和实际意义都是很好理解的.

但本题中很明显$\sqrt{x-1}\neq\sqrt{x-2}$，所以①中的等号是不可能成立的. 本题应当只存在不等关系$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}+\sqrt{6-2x}<3$.

评注

一般地，在一个函数关系式中，如果含自变量的一边是几个二次根式的和，且这几个二次根式的平方和等于一个正定值，那么当这几个二次根式的值相等时，函数取得最大值，并且该函数的最大值可以利用方差公式求出.但由于不一定能找到一个数使三个及以上的含有同一个字母的二次根式的值相等，因此在这种情况下，即使各二次根式的平方和等于一个正的定值，这个函数的最大值也不可以利用方差公式求解.

二、案例推广

推广 1：已知 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$，且 $x_i\in\mathbf{R}$，$i=1,2,\cdots,n$，那么

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geqslant n.$$

此结论还可以继续推广如下.

推广 2：若 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a(a\in\mathbf{R})$，则有不等式 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geqslant\frac{1}{n}a^2$ 成立.

例 2.3 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{19}\in\mathbf{N}^*$，且满足 $x_1+x_2+\cdots+x_{19}=95$，则 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{19}^2$ 的最大值为________.

解析 分析本题，易得 $x_1,x_2,\cdots,x_{19}$ 的平均数为 5，是一个定值，则

$$s^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{19}x_i^2-19\times5^2}{19},$$

于是 $\sum\limits_{i=1}^{19}x_i^2$ 最大时，说明 s^2 也最大.利用方差的意义可知，当 $x_1,x_2,\cdots,x_{19}$ 这 19 个数中有 18 个取 1，第 19 个取 77 时，s^2 最大.所以 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{19}^2$ 的最大值为 $18\times1+77^2=5947$.

例 2.4 已知$\triangle ABC$ 的三边分别为 a,b,c，满足：

(1)$a>b>c>0$；(2)$2b=a+c$；(3)$b\in\mathbf{N}^*$；(4)$a^2+b^2+c^2=84$.求 b 的值.

解析 因为 $2b=a+c$，所以 $a+b+c=3b$.由方差公式知

$$s^2=\frac{1}{3}\left[(a^2+b^2+c^2)-\frac{1}{3}(a+b+c)^2\right],$$

所以 $s^2=\frac{1}{3}(84-3b^2)=28-b^2\geqslant0$，故

$$b^2\leqslant28. \qquad ①$$

由于 $2b=a+c\Rightarrow4b^2=a^2+c^2+2ac=84-b^2+2ac>84-b^2$，所以

$$b^2>\frac{84}{5}. \qquad ②$$

由①、②得

$$\frac{84}{5}<b^2\leqslant 28.$$

由于 $b\in\mathbf{N}^*$，所以 $b^2=25\Rightarrow b=5$.

案例三 分式函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+c}}$ 值域的多种求法

案例导言

形如 $f(x)=\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+c}}$ 的分式函数在高考试题中经常出现，它与点到直线的距离公式形式相近，因此其值域可通过数形结合巧妙得到. 除此之外，这个函数的值域也可通过导数法、三角换元法、向量法等多种常用方法得到. 在本案例中，我们深入研究这种函数的值域问题及其中的易错点.

经典案例

案例 3 求函数 $s(t)=\dfrac{2t-3}{\sqrt{t^2+1}}$ 的值域.

解析 **(有问题的解法)** 由题意得

$$|s(t)|=\frac{|2t-3|}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{|t\times 0+1\times 0+2t-3|}{\sqrt{t^2+1}},$$

所以 $|s(t)|$ 表示原点 $(0,0)$ 到直线 $tx+y+2t-3=0$ 的距离.

而直线 $tx+y+2t-3=0$ 可转化为 $t(x+2)+y-3=0$，即是一条恒过点 $(-2,3)$ 的直线. 如图 1.1 所示，$A(-2,3)$，设原点到直线的距离为 d，则 $0\leqslant d\leqslant |OA|=\sqrt{13}$，故 $|s(t)|\leqslant\sqrt{13}$，因而 $-\sqrt{13}\leqslant s(t)\leqslant\sqrt{13}$，所以这个函数的值域为 $[-\sqrt{13},\sqrt{13}]$.

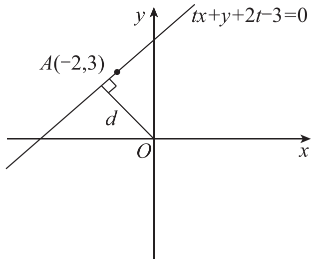

图 1.1

评注

以上是一个特级教师在一场讲座中给出的方法. 初看此法,感觉非常巧妙,体现出特级教师有很强的数形结合能力和较为开阔的解题视野. 当时在讲座的时候,现场的学生无不感叹:不愧是特级教师,方法是特级的方法,思路是特级的思路. 但是,冷静下来再思考,发现这里面可能存在重大的问题. 下面先给出我的思路和多种解法,然后讨论可能存在的问题.

解法一(利用导数):利用导数研究函数是高考必考内容之一,也是同学们很容易想到的思路与方法.

由 $s(t)$可得

$$s'(t)=\frac{2\sqrt{t^2+1}-(2t-3)\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}=\frac{3t+2}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}},t\in(-\infty,+\infty),$$

令 $s'(t)=0$,则 $t=-\frac{2}{3}$.

因此 $s'(t)$,$s(t)$随 t 的变化情况如表 1-1 所示.

表 1-1

t	$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$
$s'(t)$	$-$	0	$+$
$s(t)$	↘	极小值	↗

由于在 $\mathbf{R}$ 上 $s(t)$只有一个极值点,所以当 $t=-\frac{2}{3}$时,$s(t)_{\min}=s\left(-\frac{2}{3}\right)=-\sqrt{13}$,而

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{2t-3}{\sqrt{t^2+1}}<0,\lim_{t\to+\infty}\frac{2t-3}{\sqrt{t^2+1}}>0,$$

所以 $s(t)<\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{2t-3}{\sqrt{t^2+1}}$.

而 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{2t-3}{\sqrt{t^2+1}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{2-\frac{3}{t}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=2$,所以函数 $s(t)$的大致图像如图 1.2 所示.