

第

一

讲

解析几何的两大难点突破

本章综述

解析几何是高考数学的重要考查内容,常作为试卷中高分选拔与层次筛选的试题,其思维要求高、计算量大,令同学们畏惧.本书的作者深入教学一线,站在学生的角度提炼出学生为什么畏惧解析几何:一是解题没思路;二是计算不过关.

下面就围绕解析几何的两大难点展开,用案例的形式演绎思维模式的引导和计算方法的应用.

第一节 解析几何的思维难点突破

解析几何中有些问题的条件较为抽象,学生无法将其转化为代数式,导致问题无法解决.本文将从解析几何中最难解决的思维难点出发,结合案例谈谈如何在解析几何中实施代数式的转化,找到常见问题的求解途径,即解析几何中的条件转化是如何实施的.本节将从教学中图形语言转化、条件转化等多个途径,结合数学思想在解析几何中的切入为视角,分析解析几何的“双管齐下”.

案例精析与推广应用



一 常见几何条件的转化

方向一 利用向量转化几何条件

向量是数形结合的最佳载体,当解析几何问题中涉及夹角、平行、垂直、共线、求动点轨迹等问题时,都可以用向量来解决,一旦发挥向量这一强大工具的作用,解题过程就会更具有简单之美和结构之美.

案例精析

案例 1.1 如图 1.1 所示,已知圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$,问:是否存在斜率为 1 的直线 l ,使 l 与圆 C 交于 A, B 两点,且以 AB 为直径的圆过原点? 若存在,写出直线 l 的方程;若不存在,请说明理由.

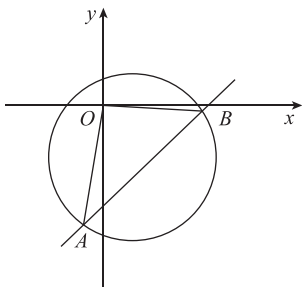


图 1.1

分析 以 AB 为直径的圆过原点等价于 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$,而 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ 又可以“直译”为 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$,可以看出,解此类解析几何问题的总体思路为“直译”,然后对个别难以“直译”的条件先进行“转化”,将“困难、难翻译”的条件通过平面几何知识“转化”为“简单、易翻译”的条件后再进行“直译”,最后联立“直译”的结果解决问题.

解析 假设存在斜率为 1 的直线 l ,使 l 与圆 C 交于 A, B 两点,且以 AB 为直径的圆过原点. 设直线 l 的方程为 $y = x + b$,设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

$$\text{联立} \begin{cases} y = x + b \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \end{cases}, \text{消去 } y \text{ 并整理得}$$

$$2x^2 + 2(b+1)x + b^2 + 4b - 4 = 0,$$

所以

$$x_1 + x_2 = -(b+1), x_1x_2 = \frac{b^2 + 4b - 4}{2}. \quad ①$$

因为以 AB 为直径的圆过原点,所以 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$,即 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. 又 $y_1 = x_1 + b, y_2 = x_2 + b$,则

$$x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + (x_1 + b)(x_2 + b) = 2x_1x_2 + b(x_1 + x_2) + b^2 = 0.$$

由①知, $b^2 + 4b - 4 - b(b+1) + b^2 = 0$,即 $b^2 + 3b - 4 = 0$,解得 $b = -4$ 或 $b = 1$.

当 $b = -4$ 或 $b = 1$ 时,均有

$$\Delta = 4(b+1)^2 - 8(b^2 + 4b - 4) = -4b^2 - 24b + 36 > 0,$$

即直线 l 与圆 C 有两个交点.

所以存在直线 l ,其方程为 $x - y + 1 = 0$ 或 $x - y - 4 = 0$.

变式引申

变式 1 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, O 为坐标原点,问:是否存在斜率为 1 的直线 l ,使 l 与圆 C 交于 A, B 两点, AB 的中点是 P ,且 $PO = \frac{1}{2}AB$?

分析 解决此问题的关键之处在于利用直角三角形斜边中线定理的逆定理,将条件“ AB 的中点是 P ,且 $PO=\frac{1}{2}AB$ ”等价转化为“ $\triangle OAB$ 为直角三角形,即 $OA\perp OB$ ”,然后采用例题的“直译”思路,将条件利用向量转化为代数式即可.

变式 2 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, O 为坐标原点,问:是否存在斜率为 1 的直线 l ,使 l 与圆 C 交于 A, B 两点,满足 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$,且 $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{PB}|$?

分析 此变式与变式 1 基本类似,只不过将条件的叙述方式改为向量,还是首先将条件等价转化为“ $\triangle ABO$ 为直角三角形,即 $OA\perp OB$ ”,然后“直译”即可.

变式 3 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, O 为坐标原点,问:是否存在斜率为 1 的直线 l ,使 l 与圆 C 交于 A, B 两点,若存在 $\lambda (0 < \lambda < 1)$,使 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$,且 $\frac{\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = |\overrightarrow{OP}|^2$?

分析 首先应用“转化”的思想,“存在 $\lambda (0 < \lambda < 1)$,使 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ”转化为“点 P 在线段 AB 上”;“ $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ”等价转化为“ $OP \perp AB$ ”,即“ $OP \perp AB$ 交 AB 于点 P ”;“ $\frac{\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = |\overrightarrow{OP}|^2$ ”转化为“ $(\overrightarrow{BO} \cdot \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{AB}|}) \cdot (\overrightarrow{AO} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}) = |\overrightarrow{OP}|^2$ ”,由向量知识得到“ $|\overrightarrow{BP}| \cdot |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{OP}|^2$ ”,由直角三角形射影定理的逆定理可得“ $\triangle OAB$ 为直角三角形,即 $OA \perp OB$ ”,然后“直译”即可.

变式 4 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, O 为坐标原点,问:是否存在斜率为 1 的直线 l ,使 l 与圆 C 交于 A, B 两点,且 $\angle AOB$ 为锐角?

分析 此题的关键条件是“ $\angle AOB$ 为锐角”,这个条件可以用余弦定理“直译”成符号语言,但是若选用余弦定理 $\cos \angle AOB = \frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$,涉及 $\triangle OAB$ 的三条边的长度,非常麻烦,从另一个角度看, A, B 为两个不同点,则

$$\angle AOB \text{ 为锐角} \Leftrightarrow 0 < \cos \angle AOB < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|} < 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 > 0,$$

进而可以求解.

变式 5 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, O 为坐标原点,问:是否存在斜率为 1 的直线 l ,使 l 与圆 C 交于 A, B 两点,且 $|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 > |\overrightarrow{AB}|^2$?

分析 此题的关键条件是“ $|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 > |\overrightarrow{AB}|^2$ ”,先等价转化为“ $\angle AOB$ 为锐角”,再等价转化为“ $x_1 x_2 + y_1 y_2 > 0$ ”.

这几个变式看似复杂,但是从“转化”和“直译”的角度来看,本质上与案例 1.1 没有任何区别.

综上,解决解析几何问题的主导方法是“直译”,当“直译”难以进行时,尝试“转化”后再“直译”.而“转化”更可以让学生认识到所求问题的本质,学会解一类题而不是解一道题,这往往是同学们的困惑症结所在,因此“直译”和“转化”这两种方法相辅相成,缺一不可,它们

都是学好解析几何的金钥匙.

案例精析

案例 1.2 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 过点 F_1 且垂直于 x 轴的直线被椭圆 C 截得的线段长为 1.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 点 P 是椭圆 C 上除长轴端点外的任一点, 联结 PF_1, PF_2 , 设 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PM 交 C 的长轴于点 $M(m, 0)$, 求 m 的取值范围.

分析 思路一: 由 PM 是 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线, 可得 $\angle F_1PM = \angle F_2PM$, 从而有 $\cos \angle F_1PM = \cos \angle F_2PM$, 由于涉及角的余弦值, 可以和向量的数量积联系起来, 即 $\frac{\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PF_1}| |\overrightarrow{PM}|} = \frac{\overrightarrow{PF_2} \cdot \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PF_2}| |\overrightarrow{PM}|}$, 亦即 $\frac{\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PF_1}|} = \frac{\overrightarrow{PF_2} \cdot \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PF_2}|}$, 再用向量的坐标表示进行化简.

思路二: 利用角平分线的几何性质, 有 $\frac{|\overrightarrow{PF_1}|}{|\overrightarrow{PF_2}|} = \frac{|\overrightarrow{F_1M}|}{|\overrightarrow{F_2M}|}$, 再利用坐标计算.

思路三: 利用角平分线的性质定理, 得点 M 到直线 PF_1 与直线 PF_2 的距离相等, 转化为点到直线的距离.

解析 (1) 由于 $c^2 = a^2 - b^2$, 将 $x = -c$ 代入椭圆的方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$.

由题意知 $\frac{2b^2}{a} = 1$, 故 $a = 2b^2$. 又 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, 即 $a = 2b$, 所以 $a = 2, b = 1$, 故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) **解法一:** 因为 PM 是 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线, 所以 $\angle F_1PM = \angle F_2PM$, 从而有 $\cos \angle F_1PM = \cos \angle F_2PM$, 即 $\frac{\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PF_1}| |\overrightarrow{PM}|} = \frac{\overrightarrow{PF_2} \cdot \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PF_2}| |\overrightarrow{PM}|}$, 亦即

$$\frac{\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PF_1}|} = \frac{\overrightarrow{PF_2} \cdot \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PF_2}|}. \quad ①$$

设点 $P(x_0, y_0)$, 其中 $-2 < x_0 < 2, x_0^2 \neq 4$, 又点 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0), M(m, 0)$, 所以

$$\overrightarrow{PF_1} = (-\sqrt{3} - x_0, -y_0), \overrightarrow{PF_2} = (\sqrt{3} - x_0, -y_0), \overrightarrow{PM} = (m - x_0, -y_0),$$

所以

$$|\overrightarrow{PF_1}| = \sqrt{(x_0 + \sqrt{3})^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 + \sqrt{3})^2 + 1 - \frac{x_0^2}{4}} = \left| 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_0 \right|,$$

$$|\overrightarrow{PF_2}| = \sqrt{(x_0 - \sqrt{3})^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 - \sqrt{3})^2 + 1 - \frac{x_0^2}{4}} = \left| 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_0 \right|.$$

因为 $-2 < x_0 < 2$, 所以 $|\overrightarrow{PF_1}| = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_0, |\overrightarrow{PF_2}| = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_0$, 故

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PM} &= (-\sqrt{3}-x_0, -y_0) \cdot (m-x_0, -y_0) \\
&= (-\sqrt{3}-x_0)(m-x_0) + 1 - \frac{x_0^2}{4} \\
&= (\sqrt{3}-m)x_0 + \frac{3x_0^2}{4} + 1 - \sqrt{3}m, \\
\overrightarrow{PF_2} \cdot \overrightarrow{PM} &= (\sqrt{3}-x_0, -y_0) \cdot (m-x_0, -y_0) \\
&= (\sqrt{3}-x_0)(m-x_0) + 1 - \frac{x_0^2}{4} \\
&= -(\sqrt{3}+m)x_0 + \frac{3x_0^2}{4} + 1 + \sqrt{3}m,
\end{aligned}$$

代入①,得

$$\frac{(\sqrt{3}-m)x_0 + \frac{3x_0^2}{4} + 1 - \sqrt{3}m}{2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_0} = \frac{-(\sqrt{3}+m)x_0 + \frac{3x_0^2}{4} + 1 + \sqrt{3}m}{2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_0},$$

整理得 $(m - \frac{3}{4}x_0)(x_0^2 - 4) = 0$.

又 $x_0^2 \neq 4$, 所以 $m = \frac{3}{4}x_0$, 而 $-2 < x_0 < 2$, 所以 $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$.

解法二: 由 PM 是 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线, 可得 $\frac{|PF_1|}{|F_1M|} = \frac{|PF_2|}{|F_2M|}$, 即 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|F_1M|}{|F_2M|}$.

设点 $P(x_0, y_0)$ ($-2 < x_0 < 2$), 又点 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$, $M(m, 0)$, 则

$$|\overrightarrow{PF_1}| = \sqrt{(-\sqrt{3}-x_0)^2 + y_0^2} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_0, |\overrightarrow{PF_2}| = \sqrt{(\sqrt{3}-x_0)^2 + y_0^2} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_0.$$

又 $|F_1M| = |m + \sqrt{3}|$, $|F_2M| = |m - \sqrt{3}|$, 且 $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$, 所以 $|F_1M| = m + \sqrt{3}$, $|F_2M| =$

$\sqrt{3} - m$. 所以 $\frac{2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_0}{2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_0} = \frac{\sqrt{3} + m}{\sqrt{3} - m}$, 化简得 $m = \frac{3}{4}x_0$, 而 $-2 < x_0 < 2$, 因此 $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$.

解法三: 设点 $P(x_0, y_0)$, $0 \leq x_0 < 2$.

①当 $x_0 = \sqrt{3}$ 时, 直线 PF_2 的斜率不存在, 易知点 $P(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ 或点 $P(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$.

若点 $P(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, 则直线 PF_1 的方程为 $x - 4\sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$.

由题意得 $\frac{|m + \sqrt{3}|}{7} = \sqrt{3} - m$, 因为 $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$, 所以 $m = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

若点 $P(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$, 同理可得 $m = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

②当 $x_0 \neq \sqrt{3}$ 时, 设直线 PF_1, PF_2 的方程分别为 $y = k_1(x + \sqrt{3})$, $y = k_2(x - \sqrt{3})$.

由题意知 $\frac{|(m+\sqrt{3})k_1|}{\sqrt{1+k_1^2}} = \frac{|(m-\sqrt{3})k_2|}{\sqrt{1+k_2^2}}$, 所以 $\frac{(m+\sqrt{3})^2}{(m-\sqrt{3})^2} = \frac{1+\frac{1}{k_1^2}}{1+\frac{1}{k_2^2}}$.

因为 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$, 且 $k_1 = \frac{y_0}{x_0 + \sqrt{3}}, k_2 = \frac{y_0}{x_0 - \sqrt{3}}$, 所以

$$\frac{(m+\sqrt{3})^2}{(m-\sqrt{3})^2} = \frac{1 + \frac{(x_0 + \sqrt{3})^2}{y_0^2}}{1 + \frac{(x_0 - \sqrt{3})^2}{y_0^2}} = \frac{(x_0 + \sqrt{3})^2 + 1 - \frac{x_0^2}{4}}{(x_0 - \sqrt{3})^2 + 1 - \frac{x_0^2}{4}} = \frac{3x_0^2 + 8\sqrt{3}x_0 + 16}{3x_0^2 - 8\sqrt{3}x_0 + 16} = \frac{(\sqrt{3}x_0 + 4)^2}{(\sqrt{3}x_0 - 4)^2},$$

$$\text{即 } \frac{|m+\sqrt{3}|}{|m-\sqrt{3}|} = \frac{|\sqrt{3}x_0 + 4|}{|\sqrt{3}x_0 - 4|}.$$

因为 $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}, 0 \leq x_0 < 2$ 且 $x_0 \neq \sqrt{3}$, 所以 $\frac{\sqrt{3}+m}{\sqrt{3}-m} = \frac{4+\sqrt{3}x_0}{4-\sqrt{3}x_0}$, 整理得 $m = \frac{3}{4}x_0$,

故 $0 \leq m < \frac{3}{2}$ 且 $m \neq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

综合①、②可得 $0 \leq m < \frac{3}{2}$.

当 $-2 < x_0 < 0$ 时, 同理可得 $-\frac{3}{2} < m < 0$.

综上所述, $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$.

方向二 角平分线条件的转化

案例精析

案例 1.3 如图 1.2 所示, 在圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上取一点 $A(-\sqrt{3}, 1)$, E, F 为 y 轴上的两点, 且 $AE = AF$, 延长 AE, AF 分别与圆 O 交于点 M, N , 则 MN 的斜率为_____.

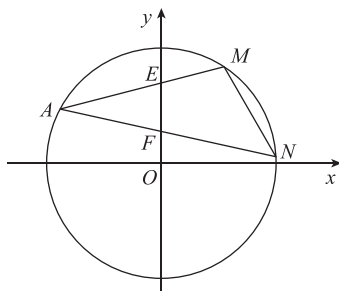


图 1.2

分析 思路一: 设出直线 AM, AN 的方程, 利用直线与圆相交, 求出其与圆的交点 M, N 的坐标. 这样做估计计算量会很大, 需要使用一些特殊技巧, 可考虑利用韦达定理, 由 AM 和 AN 的斜率互为相反数, 从而求得斜率.

思路二:考虑圆的几何性质,转化为先求 MN 的垂线的斜率.

思路三:针对填空题,可考虑特殊位置法.

解析 **解法一(解析法):** 设 AM 的斜率为 k , 则 AM 的方程为 $y-1=k(x+\sqrt{3})$, 代入圆 O 的方程, 整理得

$$(1+k^2)x^2+2k(\sqrt{3}k+1)x+(\sqrt{3}k+1)^2-4=0.$$

由韦达定理得 $x_A+x_M=-\frac{2k(\sqrt{3}k+1)}{1+k^2}$, 从而

$$x_M=-\frac{2k(\sqrt{3}k+1)}{1+k^2}+\sqrt{3}=\frac{-\sqrt{3}k^2-2k+\sqrt{3}}{1+k^2}.$$

(求点 N 的坐标, 没有必要重复上面的演算过程, 只需要根据对称性将上面的 k 换为 $-k$ 即可.)

由 $AE=AF$, 得直线 AM 与直线 AN 的斜率互为相反数, 在 x_M 的表达式中将 k 换为 $-k$, 得 $x_N=\frac{-\sqrt{3}k^2+2k+\sqrt{3}}{1+k^2}$, 所以

$$x_N-x_M=\frac{4k}{1+k^2}, x_N+x_M=\frac{-2\sqrt{3}k^2+2\sqrt{3}}{1+k^2},$$

且直线 AN 的方程为 $y-1=-k(x+\sqrt{3})$, 所以

$$y_N=-kx_N-\sqrt{3}k+1, y_M=kx_M+\sqrt{3}k+1.$$

从而 $y_N-y_M=-k(x_N+x_M)-2\sqrt{3}k=\frac{-4\sqrt{3}k}{1+k^2}$, 所以 $k_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=-\sqrt{3}$.

解法二(几何法): 如图 1.3 所示, 取点 A 关于 y 轴的对称点 $C(\sqrt{3}, 1)$, 联结 AC, OC .

因为 AC 与 y 轴垂直, 且 $AE=AF$, 所以 $\angle CAM=\angle CAN$, 从而 $\widehat{CM}=\widehat{CN}$, 所以 $OC \perp MN$. 因为 $k_{OC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $k_{MN}=-\sqrt{3}$.

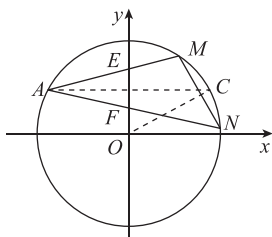


图 1.3

解法三(特殊位置法): 由 $AE=AF$, 点 E, F 为 y 轴上任意两点, 可考虑点 E, F 重合时, 线段 MN 退化成一点 C , 则过 MN 的直线就是过点 C 的切线, 显然点 C 是点 A 关于 y 轴的对称点, 所以点 C 的坐标为 $(\sqrt{3}, 1)$, 可得过点 C 的切线的斜率为 $-\sqrt{3}$.

◆ 评注 ◆

解法一是常规方法,但计算量太大,因此在计算过程中,要时刻注意优化计算.本解法中要注意几点处理技巧:①用韦达定理避免解方程的烦琐计算;②由 AM, AN 的斜率互为相反数,用点 M 的坐标得出点 N 的坐标;③因为是求斜率,所以只求出横坐标之差,且纵坐标之差转化为横坐标之和.虽然使用很多技巧后仍显烦琐,但这些技巧非常值得我们借鉴;

解法二要求对圆的基本性质要熟悉,充分体现了利用平面几何知识解答解析几何题目的简捷;

解法三是针对填空题的特征,考虑极端情况,假设点 E, F 重合,是比较快捷的方法,其实这种思路是来自于一般曲线的切线的定义,是有理论根据的,因此解法也是合理的.除了点 E, F 重合,当点 E 在 y 轴正半轴交点时, $M(0, 2), N(\sqrt{3}, -1), k_{MN} = -\sqrt{3}$, 这种方法是特殊位置法,读者不妨试一试.

变式引申

变式 1 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, A 为椭圆 C 上一点,其坐标为 $(1, \frac{3}{2})$, E, F 是椭圆 C 上的两动点,直线 AE 的斜率与直线 AF 的斜率互为相反数.

求证:直线 EF 的斜率为定值,并求出该定值.

分析 要求直线 EF 的斜率,必须知道点 E, F 的坐标.

解析 设直线 AE 的方程为 $y = k(x-1) + \frac{3}{2} (k \neq 0)$.

$$\text{联立方程} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x-1) + \frac{3}{2} \end{cases}, \text{消去 } y \text{ 并整理得}$$

$$(4k^2 + 3)x^2 + (12k - 8k^2)x + 4\left(\frac{3}{2} - k\right)^2 - 12 = 0,$$

$$\text{由 } x_A x_E = \frac{4\left(\frac{3}{2} - k\right)^2 - 12}{4k^2 + 3}, \text{ 得}$$

$$x_E = \frac{4\left(\frac{3}{2} - k\right)^2 - 12}{(4k^2 + 3)x_A} = \frac{4k^2 - 12k - 3}{4k^2 + 3}. \quad ①$$

又因为直线 AE 的斜率与直线 AF 的斜率互为相反数,所以直线 AF 的方程为 $y = -k(x-1) + \frac{3}{2}$, 故对①中的 k 用 $-k$ 代替,得

$$x_F = \frac{4k^2 + 12k - 3}{4k^2 + 3}. \quad ②$$

所以

$$k_{EF} = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{\left[-k(x_F - 1) + \frac{3}{2}\right] - \left[k(x_E - 1) + \frac{3}{2}\right]}{x_F - x_E} = \frac{-k(x_E + x_F) + 2k}{x_F - x_E}.$$

把①、②两式代入上式,得 $k_{EF} = \frac{1}{2}$, 为定值.

◆ 评注 ◆

本题中可以用换元法简化运算,可以设 $x-1=t, y-\frac{3}{2}=s$, 得 $x=t+1, y=s+\frac{3}{2}$. 将 x, y 代入椭圆方程中,得 $3(t+1)^2+4\left(s+\frac{3}{2}\right)^2=12$, 且 $s=kt$ (k 为直线 AE 的斜率). 联

立直线 AE 的方程与椭圆方程得 $\begin{cases} s=kt \\ 3(t+1)^2+4\left(s+\frac{3}{2}\right)^2=12 \end{cases}$, 消去 s 得到关于 t 的一元二

次方程 $(4k^2+3)t^2+(12k+6)t=0$, 解得 $\begin{cases} t_1=-\frac{12k+6}{4k^2+3} \\ s_1=-\frac{12k^2+6k}{4k^2+3} \end{cases}$, 同理可得 $\begin{cases} t_2=\frac{12k-6}{4k^2+3} \\ s_2=-\frac{12k^2-6k}{4k^2+3} \end{cases}$.

由点 $E\left(t_1+1, s_1+\frac{3}{2}\right), F\left(t_2+1, s_2+\frac{3}{2}\right)$, 得

$$k_{EF} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{6k-12k^2}{4k^2+3} + \frac{12k^2+6k}{4k^2+3}}{\frac{12k-6}{4k^2+3} + \frac{12k+6}{4k^2+3}} = \frac{12k}{24k} = \frac{1}{2},$$

为定值.

案例精析

案例 1.4 已知动圆过定点 $A(4,0)$, 且在 y 轴上截得的弦 MN 的长为 8.

(1) 求动圆圆心的轨迹 C 的方程;

(2) 已知点 $B(-1,0)$, 设不垂直于 x 轴的直线 l 与轨迹 C 交于不同的两点 P, Q , 若 x 轴是 $\angle PBQ$ 的角平分线, 求证: 直线 l 过定点.

分析 此题第(1)小题不难, 主要考查轨迹方程的求法; 第(2)小题较难, 但是入手容易, 方法多样, 我们可以从下面不同的角度得出解题思路.

思路一: 可以利用直线的斜截式方程 $l: y=kx+b(k \neq 0)$, 先找出 k 与 b 的关系, 再消去其中之一, 从而得出结论.

思路二: 设出直线 PB 的方程 (由已知条件知, 直线 PB 不是切线), 利用抛物线的对称性知, 直线 PB 与抛物线的另外一个交点关于 x 轴的对称点必在抛物线上. 注意我们的目标是证明直线 PQ 过定点, 当然要把直线 PQ 的方程表示出来.

思路三: 由抛物线的对称性可知, 如果直线 l 所过的定点存在, 可以大胆猜测定点一定在 x 轴上, 然后再加以证明.

思路四: 利用抛物线的参数方程进行设点, 可以减少运算量, 避免联立方程组, 从而提高准确率.

解析 (1) 设动圆圆心为点 $P(x, y)$, 则由勾股定理得 $x^2 + 4^2 = (x-4)^2 + y^2$, 化简即得圆心的轨迹方程 C 为 $y^2 = 8x$.

(2) **解法一**: 由题意可设直线 l 的方程为 $y = kx + b (k \neq 0)$.

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = 8x \end{cases}, \text{得 } k^2 x^2 + 2(kb - 4)x + b^2 = 0.$$

由 $\Delta = 4(kb - 4)^2 - 4k^2 b^2 > 0$, 得 $kb < 2$.

$$\text{设点 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = -\frac{2(kb - 4)}{k^2}, x_1 x_2 = \frac{b^2}{k^2}.$$

因为 x 轴是 $\angle PBQ$ 的角平分线, 所以 $k_{PB} + k_{QB} = 0$, 即

$$\begin{aligned} k_{PB} + k_{QB} &= \frac{y_1}{x_1 + 1} + \frac{y_2}{x_2 + 1} = \frac{2kx_1 x_2 + (k + b)(x_1 + x_2) + 2b}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \\ &= \frac{8(k + b)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)k^2} = 0, \end{aligned}$$

所以 $k + b = 0$, 即 $b = -k$, 所以 l 的方程为 $y = k(x - 1)$.

故直线 l 恒过定点 $(1, 0)$.

解法二: 设直线 PB 的方程为 $x = my - 1$, 它与抛物线 C 的另一个交点为 Q' , 设点 $P(x_1, y_1), Q'(x_2, y_2)$, 由条件可得, Q 与 Q' 关于 x 轴对称, 故 $Q(x_2, -y_2)$.

$$\text{联立} \begin{cases} x = my - 1 \\ y^2 = 8x \end{cases}, \text{消去 } x \text{ 得 } y^2 - 8my + 8 = 0, \text{ 其中 } \Delta = 64m^2 - 32 > 0, y_1 + y_2 = 8m, y_1 y_2 = 8.$$

$$\text{所以 } k_{PQ} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2} = \frac{8}{y_1 - y_2}, \text{ 因而直线 } PQ \text{ 的方程为 } y - y_1 = \frac{8}{y_1 - y_2}(x - x_1).$$

又 $y_1 y_2 = 8, y_1^2 = 8x_1$, 将 PQ 的方程化简得 $(y_1 - y_2)y = 8(x - 1)$, 故直线 l 过定点 $(1, 0)$.

解法三: 由抛物线的对称性可知, 如果定点存在, 则它一定在 x 轴上, 所以设定点坐标为 $(a, 0)$, 直线 PQ 的方程为 $x = my + a$.

$$\text{联立} \begin{cases} x = my + a \\ y^2 = 8x \end{cases}, \text{消去 } x, \text{ 整理得 } y^2 - 8my - 8a = 0, \Delta > 0.$$

$$\text{设点 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} y_1 + y_2 = 8m \\ y_1 y_2 = -8a \end{cases}.$$

由条件可知 $k_{PB} + k_{QB} = 0$, 即

$$\begin{aligned} k_{PB} + k_{QB} &= \frac{y_1}{x_1 + 1} + \frac{y_2}{x_2 + 1} = \frac{(my_1 + a)y_2 + (my_2 + a)y_1 + y_1 + y_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \\ &= \frac{2my_1 y_2 + (a + 1)(y_1 + y_2)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = 0, \end{aligned}$$

所以 $-8ma + 8m = 0$.

由 m 的任意性可知 $a = 1$, 所以直线 l 恒过定点 $(1, 0)$.