第1章

函数、极限与连续

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学是以变量作为研究对象的一门数学. 函数刻画的就是变量之间的某种依赖关系，用极限来研究函数是高等数学的一种基本方法. 本章在复习函数有关内容的基础上，着重学习函数极限的概念及其求法，使读者能够熟练掌握这些内容，为后面的学习打下良好的基础.

1.1 函数的基本概念

1.1.1 函数的定义

在一个问题中往往同时存在几个变量在变化，而这些变量并不是孤立地变化的，它们相互联系并遵循着一定的变化规律，下面先来分析两个例子.

例 1 圆的面积. 考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系. 大家知道，它们之间符合如下公式：

$$A = \pi r^2.$$

当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式可以唯一确定圆的面积 A 的相应数值.

例 2 自由落体运动. 设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s. 假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 s 与 t 之间的相依关系符合如下公式：

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中，g 是重力加速度. 假定物体着地的时刻为 $t=T$，那么当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时，由上式可以唯一确定 s 的相应数值.

撇开上面这两个例子中所涉及变量的实际意义，就会发现，它们都反映了两个变量之间的相依关系，这种相依关系就是当其中的一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有唯一确定的数值与之对应，两个变量之间的这种相依关系就是函数概念的实质.

定义 1 设 D 为非空实数集，若存在一个对应法则 f，使得对 D 中的任意实数 x，按照法则 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，记作 $y=f(x)$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域.

函数值的集合

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$的值域，记作 R_f.

表示函数的记号是任意选取的，除了常用的记号 f 外，还可以用其他字母，例如 ϕ,φ 等，这时函数就分别记作 $y=\phi(x)$，$y=\varphi(x)$等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$. 但应该注意在同一问题中，讨论几个不同的函数时，为了表示它们的区别，需要用不同的符号来表示函数. 例如，函数 $y=y_1(x)$，$y=y_2(x)$.

函数的对应法则和函数的定义域是函数的两个要素. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的. 例如，函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$不相同，因为二者的对应法则不同.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义而确定的. 如例 1 中，定义域 $D=(0,+\infty)$；例 2 中，定义域 $D=[0,T]$.

在高等数学中，有时不考虑函数的实际意义，而研究用抽象解析式来表示的函数，这时我们约定：函数的定义域就是使得函数解析式有意义的一切自变量的全体构成的集合. 例如，函数 $y=\sqrt{4-x^2}$的定义域为闭区间$[-2,2]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域为开区间$(-1,1)$.

函数的表示方法除了用解析式来表示外，还可以用表格、图像来表示，因此函数的表示方法主要有三种：表格法、图像法、解析法(公式法).

如果函数的自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值有且只有一个，则称这种函数为单值函数；否则称为多值函数. 本书中所讨论的函数若无特殊说明，均指单值函数.

在函数中，有的时候一个函数要用几个表达式来表示，这种在定义域的不同范围内，对应法则用不同的表达式来表示的函数，称为分段函数. 例如，函数 $y=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0,\\ e^x, & x<0\end{cases}$就是一个分段函数.

下面来给出几个函数的例子.

例 3 常函数 $y=2$，其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=\{2\}$. 它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1.1 所示.

例 4 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=[0,+\infty)$. 它的图形是两条从原点出发的射线，如图 1.2 所示.

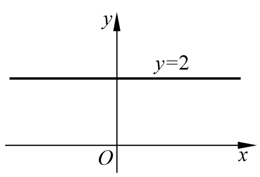

图 1.1

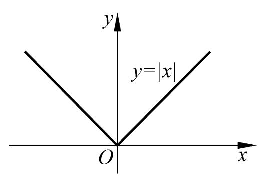

图 1.2

例 5 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=\{-1,0,1\}$. 它的图形是原点和两条平行于 x 轴的射线，如图 1.3 所示. 对于任何实数 x，总有等式 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$ 成立.

例 6 取整函数. 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$，例如

$$\left[\frac{4}{9}\right]=0,\quad [\sqrt{2}]=1,\quad [\pi]=3,\quad [-1]=-1,\quad [-3.6]=-4.$$

若把 x 看成自变量，则函数 $y=[x]$ 称为取整函数. 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=\mathbb{Z}$. 它的图形为阶梯曲线，在 x 为整数值处发生跳跃，且跳跃的高度为 1，如图 1.4 所示.

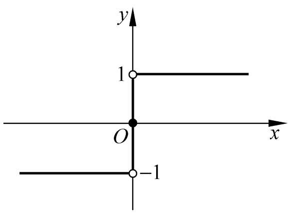

图 1.3

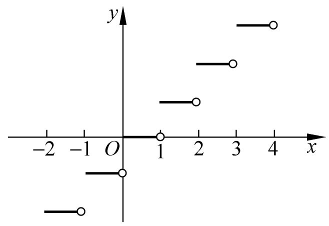

图 1.4

1.1.2 反函数与复合函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 一般地，对于任一数值 $y\in W$，在 D 中有一个确定数值 x 与之对应，这个数值 x 适合关系：

$$f(x)=y.$$

此时，如果把 y 看作自变量，x 看作因变量，按照函数概念，得到一个新的函数 $x=\varphi(y)$，则称这个新的函数 $x=\varphi(y)$ 为原来函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数. 习惯上，用字母 x 表示函数的自变量，用字母 y 表示函数的因变量. 这样，反函数 $x=f^{-1}(y)$ 可表示为 $y=f^{-1}(x)$ 的形式. 由于函数的实质是对应法则，我们改变的只是表示函数的自变量和因变量的字母，而没有改变函数的对应法则，所以函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 实质上还是同一个函数.

在同一个坐标平面上，直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称（见图 1.5）. 因为如果 $P(a,b)$ 是函数 $y=f(x)$ 图形上的点，则 $Q(b,a)$ 就是函数 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点；反之，若 $Q(b,a)$ 是函数 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点，则 $P(a,b)$ 就是函数 $y=f(x)$ 图形上的点，而点 $P(a,b)$ 和点 $Q(b,a)$ 是关于直线 $y=x$ 对称的，故函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

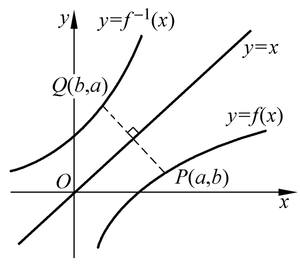

图 1.5

例如，对数函数 $y=\log_a x$ 的反函数是指数函数 $y=a^x$，二者的图形关于直线 $y=x$ 对称.

下面来讨论复合函数.

一般地，若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2、值域为 W_2，并且 $W_2\subset D_1$，那么对于每个数值 $x\in D_2$，有确定的数值 $u\in W_2$ 与之对应，而 $W_2\subset D_1$，相应地也有确定的数值 y 与数值 u 对应. 即对于每个数值 $x\in D_2$，通过变量 u 有确定的数值 y 与之

对应,这样我们就得到了一个以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数,这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$. 其中 $y=f(u)$ 称为外层函数,$u=\varphi(x)$ 称为内层函数,u 称为中间变量.

例如,函数 $y=\sin x^2$ 就是一个由 $y=\sin u$ 与 $u=x^2$ 构成的复合函数,复合函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,它也是内层函数 $u=x^2$ 的定义域.

必须注意,不是任何两个函数都能构成复合函数. 例如,$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数,因为内层函数 $u=2+x^2$ 的值域完全不在外层函数 $y=\arcsin u$ 的定义域内.

1.1.3 函数的基本性质

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $A\subset D$. 如果存在正数 M,使得对于一切 $x\in A$,恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在数集 A 上有界;如果这样的正数 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在数集 A 上无界.

例如,函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数. 因为对于所有 x,都有 $|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$. 而函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界函数.

从几何图形上看,函数 $f(x)$ 在数集 A 上有界,就是函数 $f(x)$ 在数集 A 上的图形位于直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间.

有界函数的另一种等价定义如下.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $A\subset D$. 如果存在两个数 m,M,使得对于一切 $x\in A$,恒有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在数集 A 上有界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果对于任意 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增函数(见图 1.6). 区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调增区间. 如果对于任意 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减函数(见图 1.7). 区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调减区间. 单调增函数和单调减函数统称为单调函数. 单调增区间和单调减区间统称为单调区间.

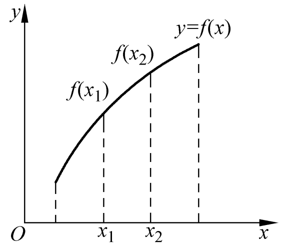

图 1.6

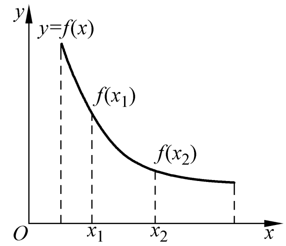

图 1.7

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减函数，在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增函数，但在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上不具有单调性. 函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增函数.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称（即若 $x\in D$，则 $-x\in D$）. 如果对于任何 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x)\,(f(-x)=f(x))$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为奇(偶)函数.

例如，函数 $f(x)=\sin x$，$f(x)=x^3$ 是奇函数. 函数 $f(x)=\cos x$，$f(x)=x^2$ 是偶函数. 函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 既非奇函数也非偶函数.

由函数奇偶性的定义可知，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于坐标原点对称.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 T，使得任意 $x\in D$，$(x+T)\in D$，恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

通常所说的周期均指其最小正周期. 例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 的周期均为 $T=2\pi$. 函数 $\tan x$，$\cot x$ 的周期均为 $T=\pi$.

思考题 任何周期函数都有最小正周期吗？

1.1.4 初等函数

基本初等函数是指中学时所学过的以下六类函数，由于它们在高等数学中具有非常基础但很重要的地位，希望读者熟练掌握这些函数的性质及其图形等，这里不再一一赘述.

(1) 常函数：$y=C$（C 为常数）.

(2) 幂函数：$y=x^{\mu}$（μ 是常数）.

(3) 指函数：$y=a^x\,(a>0,a\neq 1)$.

(4) 对数函数：$y=\log_a x\,(a>0,a\neq 1)$.

(5) 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

(6) 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

所谓**初等函数**，是指由常数和基本初等函数经有限次四则运算及有限次复合所构成的，并可用一个式子来表示的函数.

例如，函数 $y=\sin(2x+1)$，$y=\log_a(1+\sqrt{1+x^2})$，$y=10^{\arcsin x}$ 等都是初等函数.

在实际应用中也常常遇到非初等函数. 分段函数就是一种常见的非初等函数，例如，$y=\begin{cases}\sin 2x, & x\geqslant 0,\\ 1+x^2, & x<0\end{cases}$ 就是一个非初等函数.

习题 1.1

1. 求下列函数的表达式：

(1) 已知 $f(x+1)=x^2+x$，求 $f(x)$；

(2) 已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$；

(3) 已知 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，求 $f(x)$；

(4) 已知 $f(x_1+x_2)=\sin x_1\cos x_2+\cos x_1\sin x_2$，求 $f(x)$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；　(2) $y=\tan(x+2)$；

(3) $y=\arcsin(x-3)$；　(4) $y=\ln(x+1)$；

(5) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　(6) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$.

3. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=1$，$g(x)=\sec x^2-\tan x^2$.

4. 判断下列函数在所给区间上的单调性：

(1) $f(x)=e^{\cos x}$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$；　(2) $f(x)=e^{-\sin x}$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$；

(3) $f(x)=\sin(\sin x)$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$；　(4) $f(x)=\cos(\sin x)$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5. 下列函数中哪些是偶函数？哪些是奇函数？哪些既非奇函数又非偶函数？

(1) $y=x(x-1)(x+1)$；　(2) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$；

(3) $y=\sin x-\cos x+1$；　(4) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$；

(5) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　(6) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

6. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos(x-2)$；　(2) $y=\sin 4x$；

(3) $y=2+\sin\pi x$；　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\cos^2 x$.

7. 设 $f(x)$ 的定义域为 $D=[0,1]$，求下列各函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；　(2) $f(\sin x)$；

(3) $f(x+a)(a>0)$；　(4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

8. 设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_4(x)=f(f(f(f(x))))$.

9. 讨论狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

的单调性、有界性、周期性.

10. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$上的，证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

11. 设 $f(x)$是定义在$(-l,l)$内的奇函数，若 $f(x)$在$(0,l)$内单调增加，证明 $f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

12. 在下列各题中，求所给函数构成的复合函数，并求复合函数在自变量给定取值 x_1 和 x_2 的函数值.

(1) $y=\ln u, u=1+x^2, x_1=0, x_2=2$；　　(2) $y=u^2, u=\sin x, x_1=0, x_2=\frac{\pi}{2}$；

(3) $y=\sin u, u=2x, x_1=\frac{\pi}{8}, x_2=\frac{\pi}{4}$；　　(4) $y=\mathrm{e}^u, u=x^2, x_1=0, x_2=1$.

13. 设函数 $f(x)$的定义域为$(-l,l)$，证明：

(1) $F(x)=f(x)+f(-x)\ (x\in(-l,l))$为偶函数；

(2) $G(x)=f(x)-f(-x)\ (x\in(-l,l))$为奇函数；

(3) 函数 $f(x)$可以表示为奇函数与偶函数之和.

1.2 数列的极限

高等数学的研究对象是变量，为了很好地掌握变量的变化规律，不仅要考察变量的变化过程，更重要的是要通过它的变化过程来判断它的变化趋势，而变量确定的变化趋势就是变量的极限. 本节研究数列的极限.

1.2.1 数列极限问题举例

极限概念是在求某些实际问题之精确值的过程中产生的. 例如，我国古代数学家刘徽利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术，就是极限思想在几何学上的应用.

设有一个圆，首先作内接正六边形，把它的面积记为 A_1；再作内接正十二边形，其面积记为 A_2；再作内接正二十四边形，其面积记为 A_3……；如此循环下去. 一般地把内接正 $6\times2^{n-1}$边形的面积记为 $A_n(n\in\mathbb{N}^+)$，这样就得到一列内接正多边形的面积：

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$$

它们构成一列有次序的数，当 n 越大，内接正多边形与圆的差别就越小，从而以 A_n 作为圆面积的近似值也就越精确. 因此，设想 n 无限增大(记为 $n\to\infty$，读作 n 趋于无穷大)时，则内接正多边形就无限接近于圆，同时 A_n 也无限接近于某个确定的数值，这个确定的数值就可认为是圆的面积. 在数学上这个确定的数值被称为这一列有次序的数(所谓数列)A_1，$A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$在 $n\to\infty$时的极限，在求圆面积的问题中我们看到，正是这个数列的极限才精确地表达了圆的面积.

上述实际问题的解决就体现了极限的思想，如今极限的方法已经成为高等数学中的一种基本方法，应用非常广泛.

1.2.2 数列的概念

按照一定的法则，依次由自然数 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 编号排成的一列数

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

叫做数列，记作 $\{x_n\}$ 或数列 $\{x_n\}$. 数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项 x_n 叫做数列的一般项或通项. 例如：

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

$$2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$$

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

都是数列，它们的通项分别为

$$x_n=\frac{1}{n},\quad x_n=\frac{n+1}{n},\quad x_n=(-1)^{n+1}.$$

数列 $\{x_n\}$ 可看作是自变量为正整数 n 的函数，即

$$x_n=f(n).$$

它的定义域是全体正整数，当自变量 n 依次取 $1,2,3,\cdots$ 一切正整数时，对应的函数值就构成了一个数列 $\{x_n\}$.

1. 单调数列

如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件：

$$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 为单调递增数列；如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件：

$$x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 为单调递减数列. 单调递增数列和单调递减数列统称为单调数列. 例如，数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是一个单调递减数列，数列 $\{2^n\}$ 是一个单调递增数列.

2. 有界数列

对于数列 $\{x_n\}$，如果存在正数 M，使得对任何正整数 n，都有

$$|x_n|\leqslant M$$

成立，则称数列 $\{x_n\}$ 是有界数列；否则，称数列 $\{x_n\}$ 是无界数列. 例如，数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$，$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$，$\{(-1)^{n+1}\}$ 都是有界数列，数列 $\{2^n\}$ 是无界数列.

对于给定的数列 $\{x_n\}$，我们要讨论的问题是：当项数 n 无限增大(即 $n\to\infty$)时，对应的项 x_n 是否能够无限趋近于某一个确定的常数，如果能够，那么这个常数是多少？这就是数列极限所要研究的问题.

1.2.3 数列极限的定义

对于给定的数列 $\{x_n\}$，如果当项数 n 无限增大($n\to\infty$)时，对应的项 x_n 无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或 $x_n\to A(n\to\infty)$. 例如，数列

$\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$的一般项 $x_n=1+\dfrac{1}{n}$，从直观上可以看出，当项数 n 无限增大时，数列的项 x_n 无限接近常数 1. 也就是说，常数 1 是数列$\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$的极限.

显然，对于比较简单的数列，很容易从数列通项的变化趋势上分析出数列的极限. 当然如果数列的通项比较复杂，要想从直观上得出数列的极限就不太容易了，况且上述定义只是一种描述性定义，不够准确和严谨，为了准确地描述"无限增大"和"无限趋近"的意义，揭示数列极限的实质，我们必须用精确的数学语言来描述这一概念.

我们知道，两个数之间的接近程度可以用这两个数之差的绝对值来度量. 例如，$|b-a|$越小，说明数 a 与 b 越接近.

再来考察数列$\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$，从数列的变化趋势来看，当 $n\to\infty$时，有 $x_n\to 1$. 这就意味着，当项数 n 充分大时，数 x_n 与 1 可以任意接近，即$|x_n-1|$可以任意地小. 换句话说，只要 n 充分大，$|x_n-1|=\dfrac{1}{n}$就可以任意小于预先给定的正数 ε. 由此可知，对于任意给定的正数 ε(不论它多么小)，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有不等式

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$$

成立. 这就是当 $n\to\infty$时，数列 $x_n=\dfrac{1+n}{n}\to 1$ 的实质. 由此推广到一般，便得到数列极限的精确定义.

定义 1 给定数列$\{x_n\}$，a 为一常数，如果对于任意给定的正数 ε(不论它多么小)，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立，则称常数 a 是数列$\{x_n\}$的极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$. 此时也称数列$\{x_n\}$收敛于 a. 反之，称数列$\{x_n\}$没有极限，或称数列$\{x_n\}$发散.

上面定义中正数 ε 是任意给定的很重要，因为只有这样，不等式$|x_n-a|<\varepsilon$ 才能表达出 x_n 与 a 无限接近的意思. 此外还应注意，定义中的正整数 N 与正数 ε 有关，正整数 N 随着 ε 的给定而选定.

从几何上来看，常数 a 和数列$\{x_n\}$的各项都可用数轴上的对应点来表示. 因为$|x_n-a|<\varepsilon$ 等价于 $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$，所以数列$\{x_n\}$以 a 为极限的几何解释就是：对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，从第 N 项以后的所有项 $x_{N+1},x_{N+2},\cdots$的对应点都落在以 a 为中心、长度为 2ε 的开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内，至多有有限个点在此区间之外(见图 1.8).

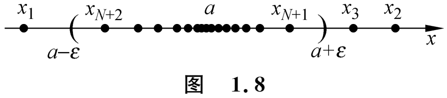

图 1.8

通常，我们将开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内的所有点称为点 a 的 ε 邻域，记作 $U(a,\varepsilon)$. 点 a 称为邻域中心，ε 称为邻域半径. 将点 a 的 ε 邻域中的邻域中心 a 去掉后所得到的点集称为点 a 的去心 ε 邻域，记作$\mathring{U}(a,\varepsilon)$. 因此，数列$\{x_n\}$收敛于 a 的几何解释也可以说成：对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，从第 N 项后的所有点都落在点 a 的 ε 邻域内.

数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义可简单表述为：

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

证 由于 $|x_n-a|=\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$，对于任意给定的正数 ε，要使 $\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，故取正整数 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$$

例 2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0$.

证 由于 $|x_n-a|=\left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|=\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n+1}$，对于任意给定的正数 ε（设 $\varepsilon<1$），要使 $|x_n-a|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$，故取正整数 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0.$$

例 3 设 $|q|<1$，证明等比数列 $1,q,q^2,\cdots,q^{n-1},\cdots$ 的极限是 0.

证 对于任意给定 $\varepsilon>0$（设 $\varepsilon<1$），由于 $|x_n-a|=|q^{n-1}-0|=|q|^{n-1}<\varepsilon$，取自然对数 $(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$，解得 $n>1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，故取正整数 $N=\left[1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $|q^{n-1}-0|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}q^{n-1}=0.$$

通过以上几个例子，可总结出利用定义证明数列极限的一般步骤如下.

(1) 对于 $\forall\varepsilon>0$，假设 $|x_n-a|<\varepsilon$.

(2) 从上述假设的不等式出发，解出 $n>f(\varepsilon)$（一般可采用加强不等式的方法）.

(3) 取正整数 $N\geqslant f(\varepsilon)$ 即可. 特别值得注意的是，对于任意给定的正数 ε，能求出满足定义要求的正整数 N 即可，它是不唯一的，也没有必要是最小的.

1.2.4 数列极限的性质

定理 1（极限的唯一性） 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限唯一.

证 反证法. 假设 $x_n\to a$ 及 $x_n\to b$，且 $a<b$. 取 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}>0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，故存在正整数 N_1，使得对于 $n>N_1$ 的一切 x_n，恒有不等式

$$|x_n-a|<\frac{b-a}{2}$$

成立.