

第5章

时变电磁场

前面各章分别讨论了静止电荷的电场和恒定电流的电场和磁场。它们都不随时间变化,而且彼此独立无关。从本章开始,将讨论随时间变化的电场和磁场。随时间变化的电场和磁场统称为时变电磁场。在时变电磁场中,电场和磁场不仅是空间坐标的函数,还是时间的函数。它们不再彼此独立,而是构成统一的电磁场的两个方面。变化的电场会产生磁场,变化的磁场也会产生电场。它们两者互为因果关系。麦克斯韦用最简洁的数学公式概括了电磁场的基本特性,成为研究电磁现象的理论基础。

本章首先从法拉第电磁感应定律引出感应电场的概念,然后介绍麦克斯韦关于位移电流的假设以及表征时变电磁场特性的电磁场基本方程组,并由此导出时变电磁场的能量守恒的坡印廷定理,同时介绍表征功率流密度的坡印廷矢量。为了便于计算电磁场,引入位函数及其方程,最后对正弦电磁场展开讨论。

5.1 电磁感应定律

5.1.1 电磁感应定律

英国物理学家法拉第等人通过大量实验证实存在着如下的普遍规律:当穿过一闭合导体回路的磁通量(无论由于什么原因)发生变化时,在导体回路中就会出现电流,这种现象称为电磁感应现象,出现的电流称为感应电流。

导体回路中出现感应电流是导体回路中必然存在着某种电动势的反映,这种由电磁感应引起的电动势叫做感应电动势。法拉第对电磁感应现象作了精心的研究,总结出电磁感应定律如下:闭合回路中的感应电动势 ϵ_{in} 与穿过此回路的磁通量 ϕ 随时间的变化率 $\frac{d\phi}{dt}$ 成

正比。规定感应电动势的参考方向与穿过该回路磁通 ϕ 的参考方向符合右手螺旋关系。如图 5.1 所示,则感应电动势的数学形式为

$$\epsilon_{in} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.1)$$

式中的 S 是由于闭合回路的边界 l 所限定的面积,面积的正法线方向和 l 的绕向应符合右手螺旋关系。

电磁感应定律使人们能够根据磁通的变化率直接确定

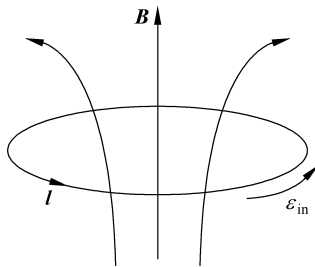


图 5.1 感应电动势

感应电动势。至于感应电流,则还要知道闭合回路的电阻才能求得。对于给定的导体回路,感应电流与感应电动势成正比。如果回路并不闭合(或者说电阻为无限大),则虽有感应电动势却没有感应电流。因此,在理解电磁感应现象时,感应电动势是比感应电流更为本质的物理量。感应电动势的大小只与穿过回路磁通随时间的变化率有关,而与构成回路的材料的特性无关。因此,电磁感应定律可以推广到任意介质内的假想回路中。

5.1.2 感应电场

导体内存在感应电流表明导体内必然存在感应电场 $\mathbf{E}_{\text{in}}$, 因此感应电动势可以表示为感应电场的积分, 即

$$\varepsilon_{\text{in}} = \oint_l \mathbf{E}_{\text{in}} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.2)$$

则式(5.1)可表示为

$$\oint_l \mathbf{E}_{\text{in}} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.3)$$

上式就是感应电场与变化磁场的定量关系。它表明, 感应电场的环量不等于零, 与静电场不同, 感应电场是非保守场, 它的力线是一些无头无尾的闭合线, 所以感应电场又称涡旋电场。一般情况下, 空间中既存在电荷产生的电场 $\mathbf{E}_c$ 也存在感应电场 $\mathbf{E}_{\text{in}}$ 。总电场为 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{in}} + \mathbf{E}_c$, 由于 $\oint_l \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{l} = 0$, 故有

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.4)$$

从式(5.4)可以看出, 闭合回路磁通变化是产生感应电动势的唯一条件, 产生的原因不外有下面三种。

(1) $\mathbf{B}$ 随时间变化而闭合回路任一部分对介质没有相对运动。这样产生的感应电动势叫做感生电动势。这时, 式(5.4)可表示为

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.5)$$

变压器就是利用这一原理制成的, 所以也称这一感应电动势为变压器电动势。

(2) $\mathbf{B}$ 不随时间变化而闭合回路的整体或局部相对于介质在运动。磁场力 $\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 将使导体中的自由电荷朝一端移动, 则作用在单位电荷上的磁场力为 $\frac{\mathbf{F}_m}{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, 可看成作用于导体的感应电场, 这样因回路运动产生的感应电动势叫做动生电动势。这时, 式(5.4)可表示为

$$\varepsilon_{\text{in}} = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (5.6)$$

这正是发电机的工作原理, 故称为发电机电动势。

(3) $\mathbf{B}$ 随时间变化且闭合回路也有运动, 这时感应电动势是感生电动势和动生电动势的叠加, 即

$$\varepsilon_{\text{in}} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (5.7)$$

一般情况下, 麦克斯韦将上述关系推广, 对任何电磁场都有:

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (5.8)$$

这里 $\mathbf{E}$ 表示空间的总场强。

应用斯托克定理,可得对应上式的微分形式为

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.9)$$

这是电磁感应定律的微分形式。在静止介质中,则有

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.10)$$

麦克斯韦将上述关系作为电磁场的基本方程之一。它揭示了变化磁场产生电场这一重要的物理本质,从而把电场与磁场更紧密的联系在一起。

例 5.1 长为 a 、宽为 b 的矩形环中有均匀磁场 $\mathbf{B}$ 垂直穿过,如图 5.2 所示。在以下三种情况下,求矩形环内的电动势。

(1) $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B_0 \cos \omega t$, 矩形回路 $a \times b$ 静止(可滑动导体 L 不存在);

(2) $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B_0$, 矩形回路的宽边 $b = \text{常数}$, 但其长边因可滑动导体 L 以匀速 $\mathbf{v} = \mathbf{e}_x v$ 运动而随时间增大;

(3) $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B_0 \cos \omega t$, 且矩形回路上的可滑动导体 L 以匀速 $\mathbf{v} = \mathbf{e}_x v$ 运动。

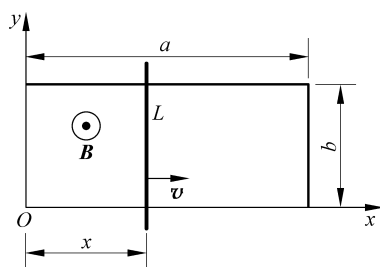


图 5.2 例 5.1 图

解: (1) 均匀磁场 $\mathbf{B}$ 随时间做简谐变化, 而回路静止, 因而回路内的感应电动势是由磁场变化产生的。根据式(5.5), 得

$$\begin{aligned} \epsilon_{in} &= \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{e}_z B_0 \cos \omega t) \cdot \mathbf{e}_z dS \\ &= \omega B_0 ab \sin \omega t \end{aligned}$$

(2) 均匀磁场 $\mathbf{B}$ 为静态场, 而回路上的可滑动导体以匀速运动, 因而回路内的感应电动势全部是由导体 L 在磁场中运动产生的。根据式(5.6), 得

$$\epsilon_{in} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (\mathbf{e}_x v \times \mathbf{e}_z B_0) \cdot (\mathbf{e}_y dl) = - v B_0 b$$

也可由式(5.3)计算

$$\epsilon_{in} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d}{dt} (\mathbf{e}_z B_0 \cdot \mathbf{e}_z b x) = - \frac{d}{dt} (B_0 b v t) = - B_0 v b$$

(3) 矩形回路中的感应电动势是由磁场变化以及可滑动导体 L 在磁场中运动产生的, 根据式(5.8), 得

$$\begin{aligned} \epsilon_{in} &= \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= - \int_S \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{e}_z B_0 \cos \omega t) \cdot \mathbf{e}_z dS + \oint_C (\mathbf{e}_x v \times \mathbf{e}_z B_0 \cos \omega t) \cdot (\mathbf{e}_y dl) \\ &= B_0 \omega b v t \sin \omega t - B_0 b v \cos \omega t \end{aligned}$$

例 5.2 有一个 $a \times b$ 的矩形线圈放置在时变磁场 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_y B_0 \sin \omega t$ 中, 在初始时刻, 线圈平面的法向单位 $\mathbf{e}_n$ 与 $\mathbf{e}_y$ 成 α 角, 如图 5.3 所示。试求:

- (1) 线圈静止时的感应电动势;
 (2) 线圈以角速度 ω 绕 x 轴旋转时的感应电动势。

解: (1) 线圈静止时, 感应电动势是由时变磁场引起, 用式(5.5)计算

$$\begin{aligned}\epsilon_{\text{in}} &= \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \int_S \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{e}_y B_0 \sin \omega t \cdot \mathbf{e}_n dS) \\ &= - \int_S B_0 \omega \cos \omega t \cos \alpha dS \\ &= - B_0 ab \omega \cos \omega t \cos \alpha\end{aligned}$$

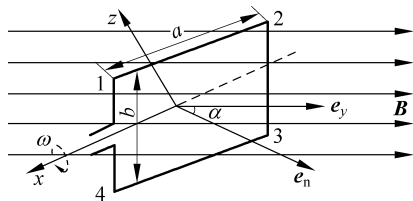


图 5.3 时变磁场中的矩形线圈

(2) 线圈绕 x 轴旋转时, $\mathbf{e}_n$ 的指向将随时间变化。线圈内的感应电动势可以用两种方法计算。

方法一: 利用式(5.3), 计算

假定 $t=0$, 则在时刻 t 时, $\mathbf{e}_n$ 与 y 轴的夹角 $\alpha = \omega t$ 。故

$$\begin{aligned}\epsilon_{\text{in}} &= \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{e}_y B_0 \sin \omega t \cdot \mathbf{e}_n dS = - \frac{d}{dt} (B_0 \sin \omega t \times ab) \\ &= - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} B_0 ab \sin 2\omega t \right) = - B_0 ab \omega \cos 2\omega t\end{aligned}$$

方法二: 利用式(5.7), 计算

$$\epsilon_{\text{in}} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

上式右端第一项与(1)相同, 第二项为

$$\begin{aligned}\oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} &= \int_2^1 \left[\left(\mathbf{e}_n \frac{b}{2} \omega \right) \times \mathbf{e}_y B_0 \sin \omega t \right] \cdot \mathbf{e}_x dx \\ &\quad + \int_4^3 \left[\left(-\mathbf{e}_n \frac{b}{2} \omega \right) \times \mathbf{e}_y B_0 \sin \omega t \right] \cdot \mathbf{e}_x dx \\ &= \omega B_0 ab \sin \omega t \sin \alpha\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\epsilon_{\text{in}} &= -ab\omega B_0 \cos \alpha + \omega B_0 ab \sin \omega t \sin \alpha \\ &= -B_0 ab \omega \cos^2 \omega t + B_0 \omega ab \sin^2 \omega t \\ &= -B_0 ab \omega \cos 2\omega t\end{aligned}$$

5.2 全电流定律

感应电场的概念揭示了电场与磁场联系的一个方面, 即变化的磁场要产生电场。在研究从库仑到法拉第等前人成果的基础上, 麦克斯韦深信电场和磁场有着密切的关系且具有对称性, 为解决把安培环路定理应用到非恒定电流电路时所遇到的矛盾, 又提出了“位移电流”的假说, 即随时间变化的电场将激发磁场, 从而揭示了电场与磁场联系的另一个方面。

麦克斯韦对电磁场理论的重大贡献的核心是位移电流假说。

恒定磁场的安培环路定律具有如下形式：

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I \quad (5.11)$$

现在研究如图 5.4 所示含有电容 C 的交变电流电路。将安培环路定律应用于闭合曲线 l , 显然, 对于 S_1 面有

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = i$$

而对 S_2 面有

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

上面两式是互相矛盾的, 这个矛盾的直接原因是传导电流不连续。这样看来, 在恒定情况下得到的安培环路定律见式 (5.11), 一般说来, 不能直接应用到时变电流(非恒定)情况, 必须加以修正。

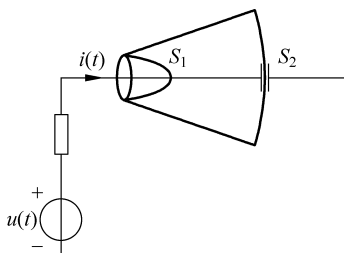


图 5.4 非恒定情况下的安培环路定律

麦克斯韦注意到电容器极板处传导电流的不连续引起极板上电荷量的变化, 因而产生变化的电场, 存在 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 。设想在电容器极板间有种“电流”通过, 它与电场的变化率 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 相联系, 且在量值上与同时刻电路中的传导电流相等, 即保持“电流”闭合, 那么这个开口就被“连上”, 形式上这个矛盾就可以得到解决。麦克斯韦把电位移(电通密度) $\mathbf{D}$ 的变化率看作是一种等效电流密度, 称为位移电流密度。这样, 在传导电流中断的地方, 就有位移电流接上去。传导电流与位移电流的总和, 称为全电流, 则是连续的。如果用 $\mathbf{J}_d$ 表示位移电流密度, 则

$$\oint_s (\mathbf{J} + \mathbf{J}_d) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.12)$$

这就是麦克斯韦关于位移电流的假设。麦克斯韦认为, 磁场对任意闭合曲线的积分取决于通过该路径所包围面积的全电流, 即

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s (\mathbf{J} + \mathbf{J}_d) \cdot d\mathbf{S} \quad (5.13)$$

从引入位移电流的过程看, 位移电流这一概念似乎只有形式上的意义, 但是通过以后的讨论就会看到, 它非常深刻地反映了电磁现象的物理实质。根据式 (5.12), 全电流具有闭合性, 因此有

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\oint_s \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S}$$

由守恒定律 $\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}$, 以及高斯定律 $\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$, 可得

$$\oint_s \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

因为 S 为任意形状的封闭曲面, 因此被积函数相等

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.14)$$

即位移电流密度等于电位移(电通密度)的变化率, 这与上面定性分析的结果一致。这样, 对于非恒定的电流, 安培环路定律修改为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.15)$$

上式称为全电流定律。与它相应的微分形式是

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.16)$$

式(5.15)和式(5.16)揭示了一个新的物理内容:不但传导电流 $\mathbf{J}$ 能够激发磁场,而且位移电流 $\mathbf{J}_d$ 也以相同的方式激发磁场。位移电流这一所谓形式上的概念反映了变化的电场与电流一样,也能激发磁场这一物理实质。

应该注意到,位移电流和传导电流是两个不同的物理概念,它们的共同性质是按照相同的规律激发磁场,而其他方面则是截然不同的。真空中的位移电流仅对应于电场的变化,而不伴有电荷的任何运动。其次,位移电流不产生焦耳热,在真空中这是很明显的。在电介质中由于 $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ 项的存在,位移电流会产生热效应,然而这和传导电流通过导体产生焦耳热不同,它遵从完全不同的规律。

按照位移电流的概念,任何随时间而变化的电场,都要在邻近空间激发磁场。一般来说,随时间变化的电场所激发的磁场也随时间变化。概括地讲,在充满变化电场的空间,同时也充满变化的磁场。

按照感应电场的概念,任何随时间而变化的磁场,都要在邻近空间激发感应电场,一般来说,随时间变化的磁场所激发的电场也随时间变化。因而,在充满变化磁场的空间,同时充满变化的电场。

这两种变化的场——电场和磁场,永远互相联系着,形成了统一的电磁场。在此基础上,麦克斯韦又预言了电磁波的存在,且算出电磁波的传播速度与光速一样。这些预言于1888年由赫兹用实验得到证实。从此,电磁感应定律和全电流定律便被确认为反映普遍的电磁规律的客观真理。

例 5.3 计算铜中的位移电流密度和传导电流密度的比值。设铜中的电场为 $E_0 \sin \omega t$, 铜的电导率 $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$, $\epsilon \approx \epsilon_0$ 。

解: 铜中的传导电流大小为

$$J_c = \sigma E = \sigma E_0 \sin \omega t$$

铜中的位移电流大小为

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_0 E_0 \omega \cos \omega t$$

因此,位移电流密度与传导电流密度的振幅比值为

$$\frac{J_{dm}}{J_{cm}} = \frac{\omega \epsilon_0}{\sigma} = \frac{2\pi f \times 8.85 \times 10^{-12}}{5.8 \times 10^7} = 9.6 \times 10^{-19} f$$

由以上结论可知,位移电流密度和传导电流密度的比值不仅与介质的参数有关,还与输电电磁波的频率有关。通常所说的无线电频率是指 $f = 300 \text{ MHz}$ 以下的频率范围,从上面的关系式看出比值 $\frac{J_{dm}}{J_{cm}}$ 是很小的,在良导体中,位移电流与传导电流相比,是微不足道的。故可忽略铜中的位移电流。

例 5.4 正弦交流电压源 $u = U_m \sin \omega t$ 连接到平行板电容器的两个极板上,如图 5.5 所示。证明电容器两极板间的位移电流与导线中的传导电流相等。

解: 导线中的传导电流为

$$i_c = C \frac{du}{dt} = C \frac{d}{dt}(U_m \sin \omega t) = C \omega U_m \cos \omega t$$

忽略边缘效应,间距为 d 的两平行板之间电场为

$$E = \frac{u}{d}, \text{故位移电流密度}$$

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial(\epsilon E)}{\partial t} = \epsilon \frac{U_m \sin \omega t}{d}$$

位移电流为

$$i_d = \int_S J_d \cdot dS = \epsilon \frac{U_m \omega \cos \omega t}{d} \cdot S_0 = C \omega U_m \cos \omega t = i_c$$

式中 S_0 为极板面积,平行板电容器的电容为 $C = \frac{\epsilon S_0}{d}$ 。

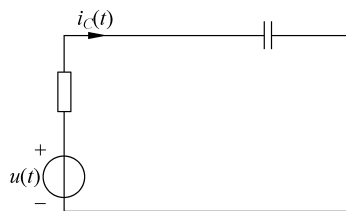


图 5.5 平行板电容器与交流电压源相联

5.3 电磁场基本方程组

本节将系统地总结有关电磁场的基本规律,并建立完整的电磁场理论——电磁场基本方程组。

麦克斯韦电磁理论的基础是电磁学的三大实验定律,即库仑定律、毕奥-萨伐尔定律和法拉第感应电磁定律。把前面几章所得到的结论加以总结和推广,结合位移电流的假说,可以得到概括电磁现象规律的四个方程式,通常称之为电磁场基本方程组。这一总结工作是由麦克斯韦完成的,故电磁场基本方程组又被称为麦克斯韦方程组。

5.3.1 麦克斯韦方程组的积分形式

麦克斯韦方程组的积分形式描述的是一个大范围(闭合面或闭合曲线)场与场源相互之间的关系,按习惯依次排列为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (5.17)$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.18)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.19)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \quad (5.20)$$

式(5.17)是全电流定律,亦称为麦克斯韦第一方程。它表明不仅传导电流能产生磁场,而且变化的电场也能产生磁场。式(5.18)是推广的电磁感应定律,称为麦克斯韦第二方程,表明变化的磁场也会产生电场。式(5.19)是磁通连续性原理,说明磁力线是无头无尾的闭合曲线。这一方程式原来是在恒定磁场中得到的,麦克斯韦把它推广到变化的磁场中。

式(5.20)是高斯定律,它反映了电荷以发散的方式产生电场。这组方程表明变化的电场和变化的磁场相互激发,互相联系形成统一的电磁场。

5.3.2 麦克斯韦方程组的微分形式

麦克斯韦方程组的微分形式描述的是空间任一点场的变化规律:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (5.24)$$

式(5.21)表明,时变磁场不仅有传导电流产生,也可以由位移电流,即变化的电场产生;式(5.22)表明,变化的磁场可以产生电场;式(5.23)表明磁场的散度为零,即为无源场;式(5.24)表明电场是有源场,产生电场的源是电荷。

5.3.3 介质的本构关系

在有介质存在时,上述电磁场基本方程组尚不完备, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 都与介质的特性有关。因此,还需要补充三个描述介质特性的方程式。对于各向同性的方程式。对于各向同性的介质来说,有

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (5.25)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (5.26)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (5.27)$$

这里 ϵ 、 μ 和 σ 分别是介质的介电常数、磁导率和电导率。式(5.25)~式(5.27)常称为电磁场的辅助方程或构成关系。

麦克斯韦方程组全面总结了电磁场的规律,是宏观电磁场理论的基础。它在电磁场理论中的地位与牛顿在经典力学中的地位相仿。利用这组方程加上辅助方程原则上可以解决各种宏观电磁场问题。例如,在具体问题中给出电磁场量的初始条件与边界条件,则求解方程组可得 $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ 和 $\mathbf{B}(x, y, z, t)$,这就是说,当电荷、电流给定时,从电磁场基本方程组根据初始条件以及边界条件就可以完全决定电磁场的变化。这就是电磁场中唯一性定理。

例 5.5 在无源的自由空间中,已知磁场强度

$$\mathbf{H} = 2.63 \times 10^{-5} \cos(3 \times 10^9 t - 10z) \mathbf{e}_y \text{ A/m}$$

求位移电流密度 $\mathbf{J}_d$ 。

解: 由于 $\mathbf{J}=0$,麦克斯韦第一方程成为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

所以,得

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{e}_x \frac{\partial H_y}{\partial z} = -2.63 \times 10^{-4} \sin(3 \times 10^9 t - 10z) \mathbf{e}_x \text{ A/m}^2$$

例 5.6 在无源区域中,已知调频广播电台辐射的电磁场的电场强度 $\mathbf{E} = 10^{-2} \sin(6.28 \times 10^9 t - 20.9z) \mathbf{e}_y \text{ V/m}$,求空间任一点的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。

解: 由麦克斯韦第二方程,有

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \mathbf{e}_x = -20.9 \times 10^{-2} \cos(6.28 \times 10^9 t - 20.9z) \mathbf{e}_x$$

将上式对时间积分,若不考虑静态场,则有

$$\mathbf{B} = \int \frac{\partial E_y}{\partial z} \mathbf{e}_x dt = -3.33 \times 10^{-11} \sin(6.28 \times 10^9 t - 20.9z) \mathbf{e}_x \text{ T}$$

5.4 电磁场的边界条件

在电磁问题中总是要涉及由不同参数的介质所构成的相邻区域。为了求解这种情况下各个区域中的电磁场问题,必须要知道在两种不同介质的分界面上电磁场量的关系。把电磁场矢量 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$ 在不同介质分界面上各自满足的关系称为电磁场的边界条件。

电磁场的边界条件必须由麦克斯韦方程组导出。由于在不同介质的分界面上,介质的参数 ϵ 、 μ 、 σ 发生突变,某些场分量也随之发生突变,使得方程组的微分形式失去意义。因此,将根据积分形式的麦克斯韦方程组来导出边界条件。另外,为了使得到的边界条件不受所采用的坐标系的限制,可将场矢量在分界面上分解为与分界面垂直的法向量和平行于分界面的切向分量。

边界条件在求解电磁问题的过程中占据非常重要的地位。这是因为只有使麦克斯韦方程组的解适合于某个包含给定的区域和相关的边界条件的实际问题,这个解才是有实际意义的解,也才是唯一的解。

5.4.1 一般情况

考虑两种不同的介质: ϵ_1 和 μ_1 分别表示第一种介质的介电常数和磁导率, ϵ_2 和 μ_2 分别表示第二种介质的介电常数和磁导率。 $\mathbf{e}_n$ 为分界面上的法向单位矢量,其方向由介质 1 指向介质 2,如图 5.6 所示。与静电场和恒定磁场中推导分界面上的衔接条件所用的方法完全相似,把式(5.19)和式(5.20)应用于跨在分界面两侧的扁盒形封闭面,在极限条件下,就可以得到 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{B}$ 所满足的条件。把式(5.17)和式(5.18)应用于跨在分界面两侧的矩形闭合路径,就可以得到 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的切向分量所满足的条件。所得到的分界面上的衔接条件是

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad B_{1n} = B_{2n} \quad (5.28)$$

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s, \quad D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \quad (5.29)$$

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s, \quad H_{2t} - H_{1t} = J_s \quad (5.30)$$

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad E_{1t} = E_{2t} \quad (5.31)$$

其中 ρ_s 为分界面上的自由电荷密度, J_s 为传导电流的线密度。

上述分界面上的衔接条件表明: $\mathbf{E}$ 的切向分量和 $\mathbf{B}$ 的法向分量总是连续的。在有自由电荷和传导电流分布的分界面上, $\mathbf{D}$ 的法向量和 $\mathbf{H}$ 的切向分量都是不连续的。

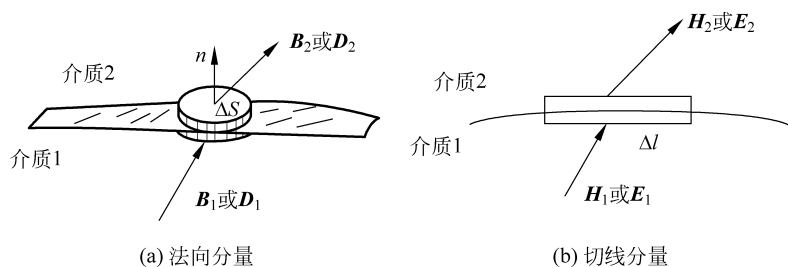


图 5.6 不同介质分界面上的衔接条件

5.4.2 两种特殊情况下的边界条件

1. 理想导体表面的边界条件

在实际问题中,往往把某些导体看成理想导体以简化问题的分析。由于理想导体的电导率 σ 趋近于无穷大,所以它内部的电场强度为零。根据方程式(5.22),可知理想导体内部的时变磁场也为零(不考虑与时间无关的常量)。理想导体中的电流也可以看成是沿着导体表面流动而形成面电流,同时表面也会有自由电荷的积累而形成面电荷,因而在理想导体(设为介质1)与电介质(设为介质2)的分界面上,衔接条件为

$$\mathbf{e}_n \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_S \quad H_{2t} = J_S \quad (5.32)$$

$$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{B}_2 = 0 \quad B_{2n} = 0 \quad (5.33)$$

$$\mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_2 = 0 \quad E_{2t} = 0 \quad (5.34)$$

$$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D}_2 = \rho_S \quad D_{2n} = \rho_S \quad (5.35)$$

也称为理想导体表面上的边界条件。它表明:在理想导体表面外侧的附近介质中,磁力线平行于其表面,电力线则与其表面相垂直。

2. 理想介质表面上的边界条件

设介质1和介质2是两种不同的理想介质,它们的分界面上不可能存在各自由面电荷($\rho_S=0$)和面电流($\mathbf{J}_S=0$)。因此,分界面上的边界条件为

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \quad \text{或} \quad H_{2t} - H_{1t} = 0 \quad (5.36)$$

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad \text{或} \quad E_{2t} - E_{1t} = 0 \quad (5.37)$$

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad \text{或} \quad B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad (5.38)$$

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \quad \text{或} \quad D_{2n} - D_{1n} = 0 \quad (5.39)$$

当分界面上不存在面自由电荷和传导电流密度时,显然可以得到

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2$$

$$\epsilon_1 E_1 \cos \alpha_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \alpha_2$$

及

$$H_1 \sin \beta_1 = H_2 \sin \beta_2$$

$$\mu_1 H_1 \cos \beta_1 = \mu_2 H_2 \cos \beta_2$$

式中 α_1, α_2 分别为 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ 与分界面法线间的夹角; β_1, β_2 分别为 $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ 与分界面法线间的夹角。从上列各式可得到

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (5.40)$$

$$\frac{\tan \beta_1}{\tan \beta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (5.41)$$

以上两式就是电磁场的折射定律。

至此,把电磁场的边界条件总结归纳如下:

(1) 在两种介质的分界面上,如果存在面电流,使 $\mathbf{H}$ 的切向分量不连续,其不连续量由式(5.30)确定。若分界面上不存在面电流,则 $\mathbf{H}$ 的切向分量是连续的。

(2) 在两种介质的分界面上, $\mathbf{E}$ 的切向分量是连续的。

(3) 在两种介质的分界面上, $\mathbf{B}$ 的法向分量是连续的。

(4) 在两种介质的分界面上,如果存在面电荷,使 $\mathbf{D}$ 的法向分量不连续,其不连续量由式(5.29)确定。若分界面上不存在面电荷,则 $\mathbf{D}$ 的法向分量是连续的。

例 5.7 $z < 0$ 的区域的介质参数为 $\epsilon_1 = \epsilon_0, \mu_1 = \mu_0, \sigma_1 = 0$; $z > 0$ 区域的介质参数为 $\epsilon_2 = 5\epsilon_0, \mu_2 = 20\mu_0, \sigma_2 = 0$ 。若介质 1 中的电场强度为

$$\mathbf{E}_1(z, t) = \mathbf{e}_x [60 \cos(15 \times 10^8 t) + 20 \cos(15 \times 10^8 t)] \text{ V/m}$$

介质 2 中的电场强度为

$$\mathbf{E}_2(z, t) = \mathbf{e}_x A \cos(15 \times 10^8 t) \text{ V/m}$$

(1) 试确定常数 A 的值; (2) 求磁场强度 $\mathbf{H}_1(z, t)$ 和 $\mathbf{H}_2(z, t)$; (3) 验证 $\mathbf{H}_1(z, t)$ 和 $\mathbf{H}_2(z, t)$ 满足边界条件。

解: (1) 这是两种电介质 ($\sigma=0$) 的分界面,在分界面 $z=0$ 处,有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(z, t) &= \mathbf{e}_x [60 \cos(15 \times 10^8 t - 5z) + 20 \cos(15 \times 10^8 t + 5z)] \text{ V/m} \\ &= \mathbf{e}_x 80 \cos(15 \times 10^8 t) \text{ V/m} \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_2(z, t) = \mathbf{e}_x A \cos(15 \times 10^8 t - 50z) \text{ V/m}$$

利用两种电介质分界面上 $\mathbf{E}$ 的切向分量连接的边界条件 $\mathbf{E}_1(0, t) = \mathbf{E}_2(0, t)$, 得

$$A = 80 \text{ V/m}$$

(2) 应用微分形式的麦克斯韦第二方程 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{\mu_1} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{1x} & E_{1y} & E_{1z} \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_y \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E_{1x}}{\partial z} \\ &= -\mathbf{e}_y \frac{1}{\mu_0} [300 \sin(15 \times 10^8 t - 5z) - 100 \sin(15 \times 10^8 t + 5z)] \end{aligned}$$

将上式对时间 t 积分,得

$$\mathbf{H}_1(z, t) = \mathbf{e}_y \frac{1}{\mu_0} \left[2 \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t - 5z) - \frac{2}{3} \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t + 5z) \right] \text{ A/m}$$

同样,由 $\nabla \times \mathbf{E}_2 = -\mu_2 \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial t}$, 得

$$\mathbf{H}_2(z, t) = \mathbf{e}_y \frac{4}{3\mu_0} \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t - 5z) \text{ A/m}$$

(3) $z=0$ 时

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(0, t) &= \mathbf{e}_y \frac{1}{\mu_0} \left[2 \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t - 5z) - \frac{2}{3} \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t) \right] \\ &= \mathbf{e}_y \frac{4}{3\mu_0} \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t) \text{ A/m} \\ \mathbf{H}_2(0, t) &= \mathbf{e}_y \frac{4}{3\mu_0} \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t) \text{ A/m} \end{aligned}$$

可见, 在 $z=0$ 处 $\mathbf{H}$ 的切向分量是连续的, 因为在分界面上 ($z=0$) 不存在面电流。

例 5.8 在两块导电平板 $z=0$ 和 $z=d$ 之间的空气中传播的电磁波的电场强度为 $E = E_0 \sin \frac{\pi}{d} z \cos(\omega t - \beta x) \mathbf{e}_y$ 其中 β 为常数。试求: (1) 磁场强度 $\mathbf{H}$; (2) 两块导电板表面上的电流线密度 $\mathbf{J}_s$ 和面电荷密度 ρ_s 。

解: (1) 由麦克斯韦第二方程 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, 得到

$$-\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{e}_z$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\frac{1}{\mu_0} \int \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{e}_z \right) dt \\ &= \frac{E_0}{\mu_0 \omega} \left[\frac{\pi}{d} \cos \frac{\pi z}{d} \sin(\omega t - \beta x) \mathbf{e}_x + \beta \sin \frac{\pi z}{d} \cos(\omega t - \beta x) \mathbf{e}_z \right] \end{aligned}$$

容易验证, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 都满足理想导体表面的边界条件。导体表面没有电场的法向分量, 故没有表面电荷。

(2) 导体表面线电流存在于两块导电板相对的一面。在 $z=0$ 的表面上

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s &= \mathbf{e}_n \times \mathbf{H} \Big|_{z=0} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{H} \Big|_{z=0} = \frac{\pi E_0}{\mu_0 \omega d} \sin(\omega t - \beta x) \mathbf{e}_y \\ \rho_s &= \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D} \Big|_{z=0} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D} \Big|_{z=0} = 0 \end{aligned}$$

在 $z=d$ 表面上

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s &= \mathbf{e}_n \times \mathbf{H} \Big|_{z=d} = -\mathbf{e}_z \times \mathbf{H} \Big|_{z=d} = \frac{\pi E_0}{\mu_0 \omega d} \sin(\omega t - \beta x) \mathbf{e}_y \\ \rho_s &= \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D} \Big|_{z=d} = -\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D} \Big|_{z=d} = 0 \end{aligned}$$

5.5 电磁场的位函数

在讨论静电场、恒定电场与恒定磁场时, 为了计算与分析的方便, 曾经分别引入过标量电位 φ 和磁矢位 $\mathbf{A}$ 。类似地, 在时变电磁场中, 也可以引入称作位函数的辅助量, 而求解麦克斯韦方程组的问题简化。本节介绍位函数及其满足的达朗贝尔方程解的物理意义。

5.5.1 位函数

在时变电磁场中,空间各点的场量应满足电磁场基本方程组。根据方程(5.23),可以引入一个矢量函数 $\mathbf{A}$,使

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.42)$$

将上式代入式(5.22),可得

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

上述结果表明,存在一个标量函数 φ ,它满足

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi \quad \text{或} \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \quad (5.43)$$

这样,便把电磁场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 用矢量函数 $\mathbf{A}$ 和标量函数 φ 表达出来了,称 $\mathbf{A}$ 为矢量位函数, φ 为标量位函数。由于 $\mathbf{A}$ 和 φ 不仅都是空间坐标的函数,同时又都随时间变化,所以也可称作动态位函数,简称为位函数。

5.5.2 达朗贝尔方程

为了确定位函数 $\mathbf{A}$ 、 φ 与激励源之间的关系,利用 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ 和 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$,并且假设 μ 和 ϵ 均是常数,把式(5.42)和式(5.43)分别代入式(5.21)和式(5.24),得到

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

和

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

这是一组相当复杂的联立的二阶偏微分方程组。直观上看,要通过这组方程解出 $\mathbf{A}$ 和 φ ,最好是将 $\mathbf{A}$ 和 φ 分开,找出它们各自单独满足的微分方程。

在上面的推导过程中,只规定了 $\mathbf{A}$ 的旋度,尚未规定 $\mathbf{A}$ 的散度。因而确定 $\mathbf{A}$ 的条件尚不完备。为了单值地确定位函数,有必要规定 $\mathbf{A}$ 的散度。最常用的选择是让 $\mathbf{A}$ 、 φ 满足附加条件,即洛伦兹条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (5.44)$$

因此,上述联立的偏微分方程组就化成为

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (5.45)$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (5.46)$$

这是两个非齐次的波动方程,通常称为位函数的达朗贝尔方程。

在满足式(5.44)洛伦兹条件下,矢量位函数 $\mathbf{A}$ 单独地由电流密度 $\mathbf{J}$ 决定;标量位函数 φ 单独地由电荷密度 ρ 决定。由此不难理解式(5.43)的物理意义,它又一次表明时变电磁场中的电场强度不仅由电荷产生,同时也由变化的磁场产生。

例 5.9 在时变电场中,已知矢量位函数

$$\mathbf{A} = A_m e^{-\alpha z} \sin(\omega t - kz) \mathbf{e}_x$$

其中 A_m 、 α 和 k 均为常数。求电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。

解: 由式(5.42)可得

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -A_m e^{-\alpha z} [\alpha \sin(\omega t - kz) + k \cos(\omega t - kz)] \mathbf{e}_y$$

由式(5.44)

$$\mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

得

$$\varphi = C(x, y, z)$$

在时变电磁场中,暂不考虑静电场的存在,所以,由式(5.43),得到

$$\mathbf{E} = -A_m \omega e^{-\alpha z} \cos(\omega t - kz) \mathbf{e}_x$$

5.5.3 达朗贝尔方程的解

先讨论位于坐标原点的一个电荷量随时间变化的点电荷 $q(t)$ 激发的标量位 φ 。显然,除原点处外,标量位 φ 满足齐次波动方程

$$\nabla^2 \varphi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (5.47)$$

考虑到 $q(t)$ 激发的场具有球对称性,所以 φ 与坐标 θ, ϕ 无关,仅是 r 和 t 的函数,即 $\varphi = \varphi(r, t)$ 。式(5.47)在球坐标系下展开为

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} \quad (5.48)$$

式中 $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$ 。这是 $(r\varphi)$ 的一维波动方程,它的通解为

$$\varphi = \frac{f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} + \frac{f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)}{r} \quad (5.49)$$

这里, f_1, f_2 是具有二阶连续偏导数的两个任意函数,其特解形式由点电荷的变化规律及周围介质的情况而定。

首先讨论式(5.49)等号右端第一项中因子 $f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$ 的物理意义。如果时间由 t 增加到 $t + \Delta t$, 而空间坐标由 r 增加到 $r + v\Delta t$, 则因子 f_1 的自变量保持不变, 即有 $f_1\left(t + \Delta t - \frac{r + v\Delta t}{v}\right) = f_1\left(t + \Delta t - \frac{r}{v} - \Delta t\right) = f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$ 。换句话说, 如果在时刻 t , 距离原点为 r 处 f_1 为某个值, 则经过时间 Δt 后, f_1 的这个数值出现在比 r 远一个距离 $v\Delta t$ 处, 这意味着 $f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$ 是从原点出发, 以速度 v 向 $+r$ 方向行进的波。这就是电磁波, 称之为入射波。同理, 第二项 $f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$ 表示向 $-r$ 方向行进的电磁波 (也就是向原点行进的电磁波), 称之为反射波, 只有当电磁波在行进途中遇到障碍时, 才会出现反射波。由于现在考虑的是无限大均匀介质问题, 这时应当只有从原点向 $+r$ 方向行进的波, 而不会有向 $-r$ 方向

行进的波,即可以取 $f_2=0$,但必须选择函数 f_1 使之对应于激励源(点电荷 q)的效应。

当点电荷不随时间变化时,有:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$$

由此可推得,在坐标处的时变电荷 $q(t)$ 的动态标量位 φ 为

$$\varphi = \frac{q\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\epsilon r} \quad (5.50)$$

这一公式也能用于点电荷不位于原点的情况,只需把 r 视为场点到点电荷的距离 R 即可。

对于体积 V' 中任意体积电荷分布 $\rho(r')$,在其空间所建立的标量位 φ 可由叠加原理求得为

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho\left(r', t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV' \quad (5.51)$$

式中, $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ 是场点 r 到元电荷 $\rho(r')dV'$ 的距离。

同理,可求得体积 V' 中任意体积电流分布 $\mathbf{J}(r')$ 所建立的矢量位 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A}(r, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}\left(r', t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV' \quad (5.52)$$

式(5.51)和式(5.52)式称为达朗贝尔方程的解,也称为位函数的积分形式解。它们都表明,空间某点在时刻 t 的标量位或矢量位必须根据 $t - \frac{R}{v}$ 时刻的场源分布函数进行求积。换句话说,在时刻 t ,场中某点 r 处的位函数以及场量,并不是决定于该时刻激励源的情况,而是决定于在此之前的某一时刻,即 $t - \frac{R}{v}$ 时刻激励源的情况。这说明,激励源在时刻 t 的作用,要经过一个推迟的时间 $\frac{R}{v}$ 才能到达 R 远处的场点,这一推迟的时间也就是传递电磁作用所需要的时间。空间各点的位函数 $\mathbf{A}$ 和 φ 随时间的变化总是落后于激励源的变化,所以通常又称 $\mathbf{A}$ 、 φ 为推迟位。推迟效应说明了电磁作用的传递是以有限速度 v 由近及远地向外进行的,这个速度称为电磁波的波速,它由介质的特性决定

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (5.53)$$

在真空中,电磁波的波速 $v=c=3\times 10^8$ m/s,与光速相同。

5.6 电磁能量守恒定律

与静电场和恒定磁场一样,时变电磁场也具有能量,但更重要的是特有的能量流动现象。当随时间变化的电磁场以恒定的速度传播时,必将伴随着能量的传播,形成电磁能流。因此,在随时间变化的电磁场的任一给定区域中,电磁场的能量不再是恒量。但是,电磁能量亦如其他能量服从能量守恒原理,下面将讨论表征电磁能量守恒关系的坡印廷定理,以及描述电磁能量流动的坡印廷矢量的表达式。

在时变电磁场中,电磁场能量密度就等于电场能量密度与磁场能量密度之和,即

$$\omega = \omega'_e + \omega'_m = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (5.54)$$

任一体积 V 中的电磁场能量为

$$W = \int_V \omega dV = \int_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) dV \quad (5.55)$$

由于电磁场的变化, V 内的能量将随时间变化。它的变化率为

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) dV \\ &= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) \right] dV \end{aligned} \quad (5.56)$$

一般情况下,对于各向同性的线性介质,有下列关系

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right) = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{和} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

再利用麦克斯韦方程见式(5.15)和式(5.16), $\mathbf{E}$ 点乘式(5.15), $\mathbf{H}$ 点乘式(5.16),进一步整理有

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right) = \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad \text{和} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) = -\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}$$

将这两个关系式代入式(5.56),得到

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V (\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dV$$

再利用矢量恒等式 $-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}$, 可得

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV \quad (5.57)$$

应用高斯定理,上式可改成为

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \quad (5.58)$$

式中 S 为限定体积 V 的闭合面。

上式经过整理可得:

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) dV + \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV \quad (5.59)$$

在式(5.59)中,右端第一项是在单位时间内体积 V 中所增加的电磁能量;第二项是在单位时间内体积 V 中的电流所做的功,在导电介质中,即为体积 V 内总的损耗功率。根据能量守恒关系,式(5.59)左端则是单位时间内通过包围体积 V 的曲面 S 进入的体积内的电磁能量。换句话说,单位时间内通过 S 面从体积 V 中流出的电磁能量为 $\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$ 。

定义式(5.59)中的 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 为玻印廷矢量,即

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (5.60)$$

$\mathbf{S}$ 的单位是 W/m^2 。它表示在单位时间内通过垂直于能量传播方向的单位面积的电磁能量,其方向就是电磁能量传播或流动的方向。由式(5.60)可知, $\mathbf{S}$ 既垂直于 $\mathbf{H}$,又垂直于 $\mathbf{E}$,且成右旋关系。

例 5.10 设同轴线的内导体半径为 a , 外导体内半径为 b , 内外导体间为空气, 内外导体为理想导体, 载有直流电流 I , 内外导体间的电压为 U 。求同轴线的传输功率和能流密度矢量。

解: 分别根据高斯定理和安培环路定理, 可以求出同轴线内外导体间的电场和磁场:

$$\mathbf{E} = \frac{U}{\rho \ln \frac{b}{a}} \mathbf{e}_\rho$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi$$

内外导体间任意截面上的玻印廷矢量为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{UI}{2\pi\rho^2 \ln \frac{b}{a}} \mathbf{e}_z$$

上式说明, 电磁能量在内外导体间的空间内沿 z 轴方向流动, 由电源向负载。而在电缆外部空间和内外导体内部均没有电磁场, 从而玻印廷矢量为零, 无能量流动。如图 5.7 所示。穿过任意横截面的功率为

$$P = \int_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_z dS = \int_a^b \frac{UI}{2\pi\rho^2 \ln(b/a)} 2\pi\rho d\rho = UI \quad (5.61)$$

这正好等于电源的输出功率, 式(5.61)是电路理论分析中熟知的结果。在求解过程中积分是在内外导体之间的截面上进行的, 并不包括导体内部。这说明所传输的电磁能量不是在导体内部进行的, 而是由内外导体之间的空间电磁场构成的功率流传递。这样, 从能量传递的角度看, 电缆的条件似乎并不重要。但是, 正因为导体上有电荷和电流分布, 才使空间存在电场和磁场, 通过场把能量送给负载。导体只是起着引导能流走向的作用。

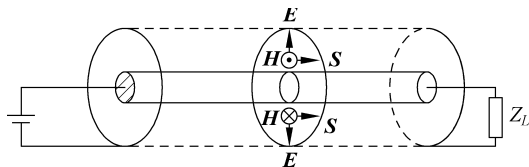


图 5.7 同轴曲线中的电场、磁场和玻印廷矢量(理想导体情况)

例 5.11 在例 5.10 中, 若导体的电阻不能忽略, 分析能量的传输情况。

解: 当导体的电导率 σ 为有限值时, 导体内部存在沿电流方向的电场

$$\mathbf{E}_{\text{内}} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \mathbf{e}_z \frac{I}{\pi a^2 \sigma}$$

根据边界条件, 在内导体表面上电场的切向分量连续, 即 $\mathbf{E}_{\text{内}z} = \mathbf{E}_{\text{外}z}$ 。因此, 在内导体表面外侧的电场为

$$\mathbf{E}_{\text{外}} \Big|_{\rho=a} = \mathbf{e}_\rho \frac{U}{a \ln(b/a)} + \mathbf{e}_z \frac{I}{\pi a^2 \sigma}$$

磁场则仍为

$$\mathbf{H}_{\text{外}} \Big|_{\rho=a} = \mathbf{e}_\phi \frac{I}{2\pi a}$$

内导体表面外侧的玻印廷矢量为

$$\mathbf{S}_{\text{外}} \Big|_{\rho=a} = (\mathbf{E}_{\text{外}} \times \mathbf{H}_{\text{外}}) \Big|_{\rho=a} = -\mathbf{e}_{\rho} \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} + \mathbf{e}_z \frac{UI}{2\pi a^2 \ln(b/a)}$$

由此可见,内导体表面外侧的玻印廷矢量既有轴向分量,也有径向分量,如图 5.8 所示。

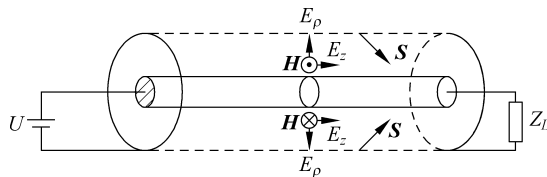


图 5.8 同轴线中的电场、磁场和玻印廷矢量(非理想导体情况)

进入每单位长度内导体的功率为

$$P = \int_S \mathbf{S}_{\text{外}} \Big|_{\rho=a} \cdot (-\mathbf{e}_{\rho}) dS = \int_0^1 \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \rho} 2\pi a dz = \frac{I^2}{\pi a^2 \rho} = RI^2$$

式中 $R = \frac{1}{\pi a^2 \sigma}$ 是单位长度内导体的电阻。由此可见,进入内导体中的功率等于这段导体的焦耳损耗功率。

以上分析表明,电磁能量是通过电磁场传输的,导体仅起着定向引导电磁能流的作用。当导体的电导率为有限值时,进入导体中的功率全被导体所吸收,称为导体中焦耳热损耗功率。

此例再一次说明,电磁能量的存储者和传递者都是电磁场,导体仅起着定向导引电磁能流的作用,故通常称为导波系统。对有损耗的传输线,能量仍在导体之间的空间传输。只是在传输过程中有部分能量为导体所吸收,变为了导体电阻上的焦耳热损耗。如果仅仅凭直觉,往往会认为能量是通过电流在导体中传输的。但理论分析表明,实际情况不是这样的,电磁能量是在空间介质中传输的。两个天线之间通过广阔的空间收发电磁波的过程就是最常见的例子。

5.7 正弦电磁场

在时变电磁场中,场量和场源除了是空间坐标的函数,还是时间的函数。电磁场随时间作正弦变化是最常见也是最重要的形式。这种以一定频率作正弦变化的电磁场,称为正弦电磁场。在一般情形下,即使是非正弦变化的时变电磁场,也可以采用傅里叶分析方法将其分解成各次谐波分量来研究。因此,研究正弦变化的时变电磁场具有非常重要的意义。

5.7.1 正弦电磁场的复数表示法

分析正弦时变电磁场的有效工具就是交流电路分析中所采用的复数方法。在直角坐标系中,随时间作正弦变化的电场强度 $\mathbf{E}$ 的一般形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) = & E_{xm}(x, y, z) \cos(\omega t + \phi_x) \mathbf{e}_x \\ & + E_{ym}(x, y, z) \cos(\omega t + \phi_y) \mathbf{e}_y \\ & + E_{zm}(x, y, z) \cos(\omega t + \phi_z) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (5.62)$$

式中 ω 是角频率。 E_{xm} 、 E_{ym} 、 E_{zm} 为各相分量幅值, ϕ_x 、 ϕ_y 、 ϕ_z 分别为各坐标分量的初相角, 它们仅是空间位置的函数。上式也可以表示成

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z)e^{j\omega t}] \quad (5.63)$$

其中

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z) &= \dot{E}_{xm}\mathbf{e}_x + \dot{E}_{ym}\mathbf{e}_y + \dot{E}_{zm}\mathbf{e}_z \\ &= E_{xm}e^{j\phi_x}\mathbf{e}_x + E_{ym}e^{j\phi_y}\mathbf{e}_y + E_{zm}e^{j\phi_z}\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

或用有效值表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}(x, y, z) &= \dot{E}_x\mathbf{e}_x + \dot{E}_y\mathbf{e}_y + \dot{E}_z\mathbf{e}_z \\ &= E_xe^{j\phi_x}\mathbf{e}_x + E_ye^{j\phi_y}\mathbf{e}_y + E_ze^{j\phi_z}\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (5.64)$$

把 $\dot{\mathbf{E}}(x, y, z)$ 称为电场强度 $\mathbf{E}$ 的复数形式。用打“ $\cdot$ ”的符号表示复数形式。式(5.63)是瞬间形式与复数形式间的关系式。

复数法使对时间求导运算化为乘积运算, 因为由式(5.63), 有

$$\frac{\partial \mathbf{E}(x, y, z, t)}{\partial t} = \operatorname{Re}[j\omega \dot{\mathbf{E}}(x, y, z) \sqrt{2}e^{j\omega t}]$$

此式表明, 对时间的一次求导, 相应的复数形式应乘以一个因子 $j\omega$ 。必须注意, 复矢量只是一种数学表达方式, 它只与空间有关。复矢量并不是真实的场矢量, 真实的场矢量是与之相应的瞬时矢量。而且, 只有频率相同的时谐场之间才能采用复矢量的方法进行运算。

应用上述运算规律经过运算后, 可得电磁场基本方程组的复数形式为

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + j\omega \dot{\mathbf{D}} \quad (5.65)$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{B}} \quad (5.66)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad (5.67)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} = \rho \quad (5.68)$$

同理, 得到电磁场的构成关系的复数形式为

$$\dot{\mathbf{D}} = \epsilon \dot{\mathbf{E}} \quad \dot{\mathbf{B}} = \mu \dot{\mathbf{H}} \quad \text{和} \quad \dot{\mathbf{J}} = \sigma \dot{\mathbf{E}} \quad (5.69)$$

5.7.2 玻印廷定理的复数形式

对于正弦时变电磁场, 当 x 、 y 、 z 方向的初相角均相同时, 玻印廷矢量的瞬时值为

$$\begin{aligned} S(t) &= E_m \cos(\omega t + \phi_E) \times H_m \cos(\omega t + \phi_H) \\ &= \sqrt{2} E \cos(\omega t + \phi_E) \times \sqrt{2} H \cos(\omega t + \phi_H) \end{aligned} \quad (5.70)$$

在时谐电磁场中, 一个周期内的平均能流密度矢量 $\mathbf{S}_{av}$ 更有意义。式(5.70)在一个周期 T 内的平均值为

$$S_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt = (E \times H) \cos(\phi_E - \phi_H) \quad (5.71)$$

式中, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 为时谐电磁场的时间周期。

$\mathbf{S}_{av}$ 也可以直接由常矢量的复数形式来计算。

$$\begin{aligned}
S(t) &= E(t) \times H(t) = \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}e^{j\omega t}] \times \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{H}}e^{j\omega t}] \\
&= 2\operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}e^{j\omega t}] \times \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{H}}e^{j\omega t}] \\
&= [\dot{\mathbf{E}}e^{j\omega t} + (\dot{\mathbf{E}}e^{j\omega t})^*] \times [\dot{\mathbf{H}}e^{j\omega t} + (\dot{\mathbf{H}}e^{j\omega t})^*] \\
&= \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}e^{j2\omega t} + \dot{\mathbf{E}}^* \times \dot{\mathbf{H}}^* e^{-j2\omega t}] + \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{E}}^* \times \dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*] \\
&= \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}e^{j2\omega t} + (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}e^{j2\omega t})^*] + \frac{1}{2}[(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*)^* + \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*] \\
&= \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}e^{j2\omega t}] + \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*]
\end{aligned}$$

代入式(5.71), 可得到

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \{ \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}e^{j2\omega t}] + \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*] \} dt = \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*] \quad (5.72)$$

其中“*”表示取共轭复数。对于时谐电磁场, 玻印廷矢量记为 $\tilde{\mathbf{S}}(t)$, 可写为

$$\tilde{\mathbf{S}}(t) = \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}$$

类似地, 可以得到电场能量密度和磁场能量密度的时间平均值分别为

$$\omega_{\text{eav}} = \frac{1}{T} \int_0^T \omega_e dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\epsilon_c \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^*) = \frac{1}{2} \epsilon' \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^* \quad (5.73)$$

$$\omega_{\text{mav}} = \frac{1}{T} \int_0^T \omega_m dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mu_c \dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^*) = \frac{1}{2} \mu' \dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^* \quad (5.74)$$

由麦克斯韦方程组的复数形式可以导出复数形式的玻印廷定理。由恒等式

$$\nabla \cdot (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) = \dot{\mathbf{H}}^* \cdot \nabla \times \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \cdot \nabla \times \dot{\mathbf{H}}^*$$

将式(5.65)和式(5.66)代入上式, 并利用 $\dot{\mathbf{B}} = \mu \dot{\mathbf{H}}$ 和 $\dot{\mathbf{D}} = \epsilon \dot{\mathbf{E}}$ 关系式, 可得

$$\nabla \cdot (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) = -j\omega\mu \dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^* - \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{J}}^* + j\omega\epsilon \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^*$$

将 $\dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\mathbf{J}}}{\sigma} - \mathbf{E}e$ 代入上式, 对等式两边进行体积分, 并利用散度定理有

$$\begin{aligned}
-\oint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \frac{|\dot{\mathbf{J}}|^2}{\sigma} dV + j\omega \int_V (\mu |\dot{\mathbf{H}}|^2 - \epsilon |\dot{\mathbf{E}}|^2) dV - \int_V \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{J}}^* dV \\
&= P + jQ
\end{aligned} \quad (5.75)$$

式(5.75)即为复数形式的玻印廷定理, 其右端的两项分别表示体积 V 内的有功功率 P 和无功功率 Q 。式(5.75)左端的面积分是穿过闭合面 S 的复功率, 其实部为有功功率, 即功率的时间平均值, 被积函数的实部即为平均能流密度矢量 $\mathbf{S}_{\text{av}}$ 。

例 5.12 在无源($\rho=0, J=0$)的自由空间中, 已知电磁场的电场强度复矢量

$$\dot{\mathbf{E}}(z) = E_0 e^{-jkz} \mathbf{e}_y$$

式中 k, E_0 为常数。求: (1) 磁场强度矢量 $\dot{\mathbf{H}}(z)$; (2) 玻印廷矢量的瞬时值 $\mathbf{S}$; (3) 平均玻印廷矢量 $\mathbf{S}_{\text{av}}$ 。

解: (1) 由 $\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_0 \dot{\mathbf{H}}$, 得

$$\dot{\mathbf{H}}(z) = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} (E_0 e^{-j\beta z}) \mathbf{e}_x = -\frac{kE_0}{\omega\mu_0} e^{-jkz} \mathbf{e}_x$$

(2) 电场、磁场的瞬时值为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z, t) &= \sqrt{2} E_0 \cos(\omega t - kz) \mathbf{e}_y \\ \mathbf{H}(z, t) &= -\sqrt{2} \frac{k E_0}{\omega \mu_0} \cos(\omega t - kz) \mathbf{e}_x\end{aligned}$$

所以,坡印廷矢量的瞬时值为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{2k E_0^2}{\omega \mu_0} \cos^2(\omega t - kz) \mathbf{e}_z$$

(3) 由式(5.72),得

$$\mathbf{S}_{av} = \text{Re} \left[E_0 e^{-jkz} \mathbf{e}_y \times \left(-\frac{k E_0}{\omega \mu_0} e^{-jkz} \mathbf{e}_x \right)^* \right] = \frac{k E_0^2}{\omega \mu_0} \mathbf{e}_z$$

5.7.3 达朗贝尔方程的复数形式及其解

对于正弦电场,矢量位和标量位都可改用复数,即

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \dot{\mathbf{A}} \quad \text{和} \quad \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{A}} - \nabla \dot{\varphi} \quad (5.76)$$

洛伦兹条件变为

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} = -j\omega \mu \epsilon \dot{\varphi}$$

达朗贝尔方程的复数形式为

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + \beta^2 \dot{\mathbf{A}} = -\mu \dot{\mathbf{J}} \quad (5.77)$$

$$\nabla^2 \dot{\varphi} + \beta^2 \dot{\varphi} = -\frac{\dot{\rho}}{\epsilon} \quad (5.78)$$

式中, $\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$, 称为相位常数, 单位是 rad/m。这两个方程的解可由 5.5 节中得到的瞬时解对应的复数形式来表示。在时间上推迟 $\frac{R}{v}$, 相当于相位推迟 $\omega \frac{R}{v} = \beta R$, 故借助于式(5.51)和式(5.52), 可得动态标量位和矢量位的解的复数形式分别为

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\dot{\rho} e^{-j\beta R}}{R} dV' \quad (5.79)$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\mathbf{J}} e^{-j\beta R}}{R} dV' \quad (5.80)$$

在 5.5 节中已经指出, 场点上位函数与引起它的激励源在时间上的差异, 也就是电磁波从激励源传播到该场点所需要的时间。如果激励源变化得很快, 则这种推迟现象就比较明显; 如果变化不快, 则在电磁波从激励源传播到场点这段时间内, 激励源并未发生明显的变化, 此时虽仍然有推迟作用, 但对场量的影响不太大。对于正弦电磁场来说, 显然, 当 $\beta R \ll 1$ 时, $e^{-j\beta R} \approx 1$, 可以不计推迟作用。这样, 位函数的解见式(5.79)和式(5.80), 它们分别与静电场和恒定磁场中的电位和磁位矢的表达式相似。这说明对每一瞬间来说, φ 和 $\mathbf{A}$ 在空间的分布规律分别与静电场和恒定磁场的分布规律相同。场点的“响应”和源点的“激励”同相。又可把条件

$$\beta R \ll 1 \quad (5.81)$$

写成

$$r \ll \lambda \quad (5.82)$$

称为似稳条件。这里的 λ 是正弦电磁波在一个周期内进行的距离, 即波长 $\lambda = vT$ 。时变电磁场中, 满足似稳条件的区域称为似稳区, 似稳区内的时变场称为似稳电磁场。但应注意, 似稳区是一个相对的概念。

提要

1. 静止介质中时变电磁场基本方程组微分形式为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

构成关系为

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

2. 时变电磁场在不同介质分界面上的衔接条件

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad H_{1t} - H_{2t} = J_s$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s, \quad B_{2n} = B_{1n}$$

3. 位函数与场量的关系为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{和} \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi$$

当 $\mathbf{A}$ 和 φ 满足洛伦兹条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ 时, 它们都满足达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

达朗贝尔方程的积分为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v'} \frac{J(x', y', z', t - \frac{R}{v})}{R} dv'$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{v'} \frac{\rho(x', y', z', t - \frac{R}{v})}{R} dv'$$

当激励源为时间的正弦函数时, 则有

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v'} \frac{\dot{J}(x', y', z') e^{-j\beta R}}{R} dv'$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{v'} \frac{\dot{\rho}(x', y', z') e^{-j\beta R}}{R} dv'$$

可以看出, 时间上推迟 $\frac{R}{v}$, 相应于正弦函数的相位滞后 βR , 所以位函数又称为推迟位或滞后位。

4. 电磁能流密度——坡印廷矢量

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

坡印廷定理反映了电磁场中的能量守恒及转换定律

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) dV + \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV$$

5. 正弦电磁场中坡印廷定理及坡印廷定理的复数形式分别为

$$\tilde{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* = -\oint_A \tilde{\mathbf{S}} \cdot d\mathbf{A} = j\omega \int_V (\mu |\dot{\mathbf{H}}|^2 - \epsilon |\dot{\mathbf{E}}|^2) dV + \int_V \frac{|j\mathbf{J}|^2}{\sigma} dV$$

思考题

5.1 何谓时变电磁场？在时变电磁场中，电流连续性原理应如何表示？此时应包括哪几种电流？各具有什么特点？

5.2 试按下述几个方面比较传导电流与位移电流：

- (1) 由什么变化引起？
- (2) 可以在哪类物质中存在？
- (3) 两者是否都能引起热效应？规律是否相同？

5.3 在理想介质中，存在磁场 $\mathbf{B} = B_m \sin \omega t$ ，试问在如图 5.9 所示两种情况下，回路中是否存在感应电动势与感应电流？

5.4 试述电磁感应定律的各种形式和它们各自的适用范围，并举例说明。

5.5 写出电磁场基本方程组的积分形式、微分形式，并阐述各方程的物理意义。对静电场有 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ，对普通的电磁场也有 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ，二者在理解上有何不同？

对于恒定磁场有 $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ，对普通的电磁场也有 $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ，二者在理解上有何不同？

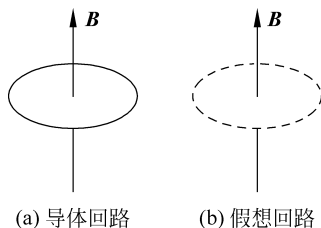
5.6 若位移电流的磁场可忽略，则全电流定律就退化为恒定磁场的安培环路定律，这种看法对吗？

5.7 试回答关于麦克斯韦方程组的一些问题：

- (1) 方程组中某一方程能否由其余三个方程推导而出？
- (2) 为什么说积分形式和微分形式等效？
- (3) 为什么要写成两种形式？
- (4) 麦克斯韦方程组在电磁理论中的地位如何？

5.8 变化的电场所产生的磁场，是否也一定随时间而变化？反之，变化的磁场产生的电场，是否也一定随时间变化？

5.9 当一块金属在均匀磁场中作什么样的运动时，其中才会出现感应电流？



(a) 导体回路 (b) 假想回路

图 5.9 思考题 5.3 图

- 5.10 试把感应电场与静电场、恒定电场、恒定磁场分别作一比较。
- 5.11 试证明穿出闭合面的位移电流等于其内的电荷增加率。
- 5.12 在无源自由空间中, $B = B_m \sin \omega t$ 是否满足麦克斯韦方程组? 由此能得出什么样的结论?
- 5.13 怎样用复数写出正弦稳态电磁场的基本方程组?
- 5.14 当介质的物理参数 ϵ, μ 和 σ 在不同介质交界面上发生突变时, 对电磁场的分析研究必须作怎样的处理? 试写出时变电磁场中不同介质分界面上的衔接条件? 理想介质与理想导体分界面处的衔接条件如何?
- 5.15 什么是时变电磁场的折射定律?
- 5.16 时变电磁场中是如何引入位函数 $\mathbf{A}$ 和 φ 的? 它们各自满足什么方程? 何谓洛伦兹条件? 位函数 $\mathbf{A}, \varphi$ 与恒定电场和恒定磁场中的电位 φ 、磁位矢 $\mathbf{A}$ 间的关系如何? 为什么常把它们叫做推迟位?
- 5.17 何谓电磁场的能量守恒定律? 叙述玻印廷定理的物理意义, 并解释其中各项的含义是什么。
- 5.18 试证明在同轴电缆(设其内外导体均为理想导体)中沿任一横截面内传输的玻印廷矢量的通量等于负载吸收的功率。
- 5.19 利用玻印廷定理, 如何求导电介质在交流情况下的等效电路参数?
- 5.20 复数玻印廷定理的方程式中各项的物理意义如何解释?
- 5.21 似稳电磁场是如何定义的? 它的特性是什么? 似稳条件是什么?
- 5.22 写出位函数解答的一般表达式, 并由此讨论时变电磁场的波动性及推迟效应。
- 5.23 试用直接代入法证明推迟位满足达朗贝尔方程和洛伦兹条件。

习题 5

5.1 长直导线中通过电流 i , 一矩形导线框置于其近旁, 两边与直导线平行, 且与直导线共面, 如图 5.10 所示。

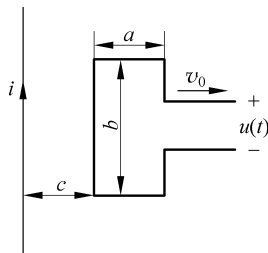


图 5.10 题 5.1 图

(1) 设 $i = I_m \cos \omega t$, 求回路中的感应电动势(设框的尺寸远小于正弦电流的波长)。

(2) 设 $i = I_0$, 线框环路以速度 v 向右平行移动, 求感应电动势。

(3) 设 $i = I_m \cos \omega t$, 且线框又向右平行移动, 再求感应电动势。

5.2 已知一种有损耗介质中的传导电流密度为 $J = 0.02 \sin 10^9 t \text{ A/m}^2$, 若介质的 $\sigma = 10^3 \text{ S/m}$, $\epsilon_r = 6.5$, 求位移电流密度。

5.3 由圆形板构成的平行板电容器, 板间距离为 d , 板间充满了有损耗介质, 其电导率为 σ , 介电常数为 ϵ , 磁导率为 μ_0 。当外加电压 $u = U_m \sin \omega t$ 时, 求极板间任一点的位移电流密度和磁感应强度(忽略边缘效应, 且不考虑变化磁场对电场的影响)。

5.4 圆柱形电容器的内导体半径为 a , 外导体半径为 b , 长为 l , 外加一正弦电压 $u = U_m \sin \omega t$ 。设 ω 不大, 故电场分布与静态场情形相同。求介质中的位移电流密度, 并计算穿过半径为 ρ 的圆柱表面的总位移电流, 证明此电流就等于电容器引线中的传导电流 ($a < \rho < b$)。

5.5 如图 5.11 所示, 由圆形极板构成的平板电容器, 两板之间充满电导率为 σ , 介电常数为 ϵ , 磁导率为 μ_0 的非理想介质。把电容器接到直流电源上, 求该系统中的电流及电容器极板之间任一点的坡印廷矢量, 并证明其中消耗的功率等于电源供给的功率。

5.6 已知自由空间中电磁波的两个场分量表达式为

$$E_z = 1000 \cos(\omega t - \beta z) \text{ V/m}$$

$$H_y = 2.65 \cos(\omega t - \beta z) \text{ A/m}$$

式中, $f = 20 \text{ MHz}$, $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 0.42 \text{ rad/m}$ 。求

- (1) 瞬时坡印廷矢量。
- (2) 平均坡印廷矢量。
- (3) 流入图 5.12 所示的平行六面体 (长为 1 m , 横截面为 0.25 m^2) 中的净瞬时功率。

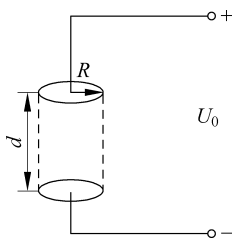


图 5.11 题 5.5 图

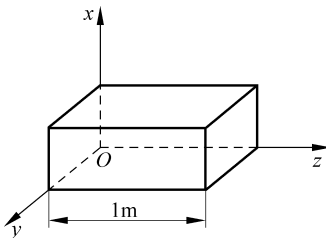


图 5.12 题 5.6 图

5.7 已知空气中的电场为

$$\mathbf{E} = 0.1 \sin(10\pi x) \cos(6\pi \times 10^9 t - kz) \mathbf{e}_y$$

求相应的 $\mathbf{H}$ 以及 k 。

5.8 同轴电缆内导体半径为 $a = 1 \text{ mm}$, 外导体半径为 $b = 4 \text{ mm}$ 。内外导体均是理想导体。内外导体之间充满聚乙烯 ($\epsilon_r = 2.25$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 0$)。已知聚乙烯中的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{100}{\rho} \cos(10^8 t - \beta z) \mathbf{e}_\rho \text{ V/m}$$

式中 z 是沿电缆轴线的长度坐标。

- (1) 说明 $\mathbf{E}$ 的表达式是否表示有波动性。
- (2) 求 β 值。
- (3) 求 $\mathbf{H}$ 的表达式。
- (4) 求内导体表面的电流线密度。
- (5) 求沿轴线 $0 \leq z \leq 1$ 的 m 区段中的位移电流。

5.9 已知动态为 $\mathbf{A}$ 和 φ 分别是 (圆柱坐标系)

$$\mathbf{A} = (1/2)(x^2 + y^2) \sin \alpha t \mathbf{e}_z + \nabla \varphi;$$

$$\varphi = -\partial \psi / \partial t$$

ψ 是任意函数, α 是常数。试求 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 。

5.10 在均匀的非导电介质中,已知时变电磁场为

$$\mathbf{E} = 30\pi \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}y\right) \mathbf{e}_z \text{ V/m}$$

$$\mathbf{H} = 10\pi \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}y\right) \mathbf{e}_x \text{ A/m}$$

且介质的 $\mu_r=1$ 。由麦克斯韦方程求出 ω 和 ϵ_r 。

5.11 已知正弦电磁场的电场瞬时值为

$$\mathbf{E}(z, t) = 0.03 \cos(10^8 \pi t - \beta z) \mathbf{e}_x + 0.04 \sin\left(10^8 \pi t - \beta z - \frac{\pi}{3}\right) \mathbf{e}_x$$

试求:

- (1) 电场的复数形式;
- (2) 磁场的复数形式和瞬时值。