第1章　随机事件及其概率

1.1　随 机 事 件

在自然界和人们的日常活动中经常会遇到许多现象，这些现象大体可分为两类，一类叫必然现象，另一类叫随机现象。所谓必然现象，是指在一定条件下一定会出现或一定不会出现的现象。例如，在标准大气压下纯水加热到 100℃就会沸腾，近距离的异性电荷会相互吸引，像这样由条件可以确定结果的现象就是必然现象。所谓随机现象，是指在一定条件下可能出现也可能不出现的现象。例如，抛一枚硬币使其正面朝上，从 54 张混放的扑克牌中任意抽取一张抽得“大王”，像这样即使条件确定结果仍然不能确定的现象就是随机现象。

凡是对随机现象的观察或为此而进行的试验都称为随机试验，简称为试验，记作 E 。随机试验与其他试验有什么区别呢？随机试验 E 一定具备下列三个特征。

(1) 试验 E 可以在相同的条件下重复进行。

(2) 试验 E 的所有可能出现的结果都是已知的。

(3) 在每次试验前不知道这次试验将会出现哪一个结果。

做一次试验，随机现象是否出现具有偶然性，如果做大量重复试验，随机现象的出现可能会呈现一定规律。概率论与数理统计就是研究随机现象数量规律性的一门科学。

1. 随机事件的基本概念

随机试验 E 的每一个可能出现的结果称为基本事件或样本点，用 ω 表示。所有的基本事件组成的集合称为基本事件空间或样本空间，用 Ω 表示。由若干个基本事件组成的集合称为随机事件，简称事件，用大写英文字母 A,B,C 等表示，显然它是基本事件空间的一个子集合。

随机事件 A 出现，当且仅当 A 中的某一个基本事件 ω 出现。

例 1-1 随机试验 E ——掷硬币观察其面。其基本事件是“出现正面”和“出现反面”，基本事件空间是 Ω ={“正面”，“反面”}。

例 1-2 随机试验 E ——从 54 张混放的扑克牌中随机抽取一张，观察抽到哪一张牌。

其基本事件是“黑桃 A”，“黑桃 2”，…，“红桃 A”，“红桃 2”，…；共 54 个基本事件。将所有基本事件组成一个集合，$\Omega=\{$“黑桃 A”，“黑桃 2”，…，“红桃 A”，“红桃 2”，…$\}$，称为基本事件空间。称由一部分基本事件组成的集合为随机事件。如 $A=\{$抽到黑桃$\}$——事件 A 中含有 13 个基本事件；$B=\{$抽到 5$\}$——事件 B 中含有 4 个基本事件；$C=\{$抽到王$\}$——事件 C 中含有两个基本事件。

每次试验都出现的事件称为必然事件，用 Ω 表示；每次试验都不会出现的事件称为不可能事件，用 Φ 表示。

每次试验必然事件 Ω 都会出现，所以必然事件包含随机试验 E 的所有基本事件，因此必然事件就是基本事件空间，它们用同一符号 Ω 表示。

2. 事件的关系和运算

(1) 事件的包含：若事件 A 出现，必然导致事件 B 出现，即 A 中的所有基本事件都在 B 中，则称 B 包含 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

(2) 事件的相等：若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

(3) 事件的和(并)：$A+B=A\cup B=\{$事件 A 与 B 至少出现一个$\}$，即

$$A+B=\{\omega\,|\,\omega\in A 或 \omega\in B\}$$

$$\sum_{k=1}^{n}A_k=\bigcup_{k=1}^{n}A_k=A_1+A_2+\cdots+A_n=\{A_1,A_2,\cdots,A_n 至少出现一个\}$$

$$=\{\omega\,|\,\omega\in A_1 或 \omega\in A_2 或\cdots 或 \omega\in A_n\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\{\omega\,|\,\omega\in A_1 或 \omega\in A_2 或\cdots 或 \omega\in A_n\}$$

(4) 事件的积(交)：$AB=A\cap B=\{$事件 A 与 B 都出现$\}$，即

$$AB=\{\omega\,|\,\omega\in A 且 \omega\in B\}$$

$$\bigcap_{k=1}^{n}A_k=A_1A_2\cdots A_n=\{A_1,A_2,\cdots,A_n 都出现\}=\{\omega\,|\,\omega\in A_1 且 \omega\in A_2 且\cdots 且 \omega\in A_n\}$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=A_1A_2\cdots A_n\cdots=\{\omega\,|\,\omega\in A_1 且 \omega\in A_2 且\cdots 且 \omega\in A_n 且\cdots\}$$

(5) 事件的差：$A-B=\{$事件 A 出现但事件 B 不出现$\}$，即 $A-B=\{\omega\in A 但 \omega\notin B\}$。

(6) 事件的互斥(互不相容)：若事件 A 与 B 不能同时出现，即 $AB=\Phi$，则称 A 与 B 互斥(互不相容)。

(7) 事件的逆(对立事件)：若事件 A 与 B 必然有一个出现，而且仅有一个出现，即 A,B 满足

$$A+B=\Omega,\ AB=\Phi$$

则称事件 A 与事件 B 互为逆事件(对立事件)。

事件 A 的逆事件记作 $\bar{A}$，它表示事件 A 不出现，即

$$\bar{A}=\{\omega\,|\,\omega\notin A,\ \omega\in\Omega\}$$

[注] ① $A+\bar{A}=\Omega,\ A\bar{A}=\Phi$。

② $\bar{A}=\Omega-A$。

3. 事件的关系和运算的性质

(1) 逆运算：$\bar{\bar{A}} = A$，$\bar{\Omega} = \Phi$，$\bar{\Phi} = \Omega$。

(2) 吸收律：$A + \Omega = \Omega$，$A + \Phi = A$，$A\Omega = A$，$A\Phi = \Phi$，$AA = A$。

(3) 交换律：$A + B = B + A$，$AB = BA$。

(4) 结合律：$A + (B + C) = (A + B) + C$，$A(BC) = (AB)C$。

(5) 分配律：$A(B + C) = AB + AC$，$A(B - C) = AB - AC$。

(6) 德·摩根定律：

$$\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n$$

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \cdots + \bar{A}_n$$

例 1-3 从一批产品中每次取一件进行检验，令 A_i ={第 i 次取到合格品} $(i = 1,2,3)$，试用事件的运算符号表示下列事件：A ={三次都取到合格品}，B ={三次至少有一次取到合格品}，C ={三次恰好有两次取到合格品}，D ={三次最多有一次取到合格品}。

解 $A = A_1 A_2 A$

$B = A_1 + A_2 + A$

$C = A_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + \quad A_1$

$D = \bar{A}_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1\bar{A}_3 + \bar{A}_2$

例 1-4 一名射手连续向某一目标射击三次，令 A_i ={第 i 次射击击中目标}($i = 1,2,3$)，试用文字叙述下列事件：(1) $A_1 + A_2$；(2) $A_1 + A_2 + A_3$；(3) $A_1A_2A_3$；(4) $A_3 - A_2$；(5) $\bar{A}_3$；(6) $\overline{A_1 + A_2}$；(7) $\overline{A_1A_2}$。

解 (1) $A_1 + A_2 =${前两次射击至少有一次击中目标}。

(2) $A_1 + A_2 + A_3 =${三次射击至少有一次击中目标}。

(3) $A_1A_2A_3 =${三次射击都击中目标}。

(4) $A_3 - A_2 =${第三次射击击中目标，但第二次射击未击中目标}。

(5) $\bar{A}_3 =${第三次射击未击中目标}。

(6) $\overline{A_1 + A_2} = \bar{A}_1\bar{A}_2 =${前两次射击都未击中目标}。

(7) $\overline{A_1A_2} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 =${前两次射击至少有一次未击中目标}。

1.2　排列与组合

计算随机事件出现的可能性大小时往往需要借助排列组合理论与方法，下面介绍排列组合的基本理论与方法。

1. 基本原理

(1) 加法原理：做一件事，完成它有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种方法，在第二类办法中有 m_2 种方法……在第 n 类办法中有 m_n 种方法，不论用哪一类办法中的哪一种方法都可以完成这件事，那么完成这件事共有 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同方法。

例如，某人从甲地到乙地有乘飞机、火车和汽车三类办法。每天飞机有 2 个航班，火

车有 5 班车，汽车有 3 趟车。不论选用哪一类办法中的哪一种方法，都可以到达目的地，那么从甲地到乙地共有 $2+5+3=10$ 种不同走法。

(2) 乘法原理：做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，……，做第 n 步有 m_n 种方法，只有当这 n 个步骤全部完成时，才能完成这件事，那么完成这件事共有 $m_1m_2\cdots m_n$ 种不同方法。

例如，某人从甲地到丙地必须经过乙地中转。若从甲地到乙地有 3 种走法，从乙地到丙地有 7 种走法，那么从甲地到丙地共有 $3\times7=21$ 种不同走法。

2．排列

1) 不可重复排列

定义 1-1 从 n 个不同元素中任取 $m\,(m\leqslant n)$ 个不同元素，按照一定的顺序排成一列，叫作从 n 个不同元素中取 m 个不同元素的一个排列。其所有不同排列的个数称为排列数，用符号 P_n^m 表示。

例如，在 a,b,c,d 四个字母中，每次取 2 个不同字母的排列是：

$$ab,ac,ad;\quad ba,bc,bd;\quad ca,cb,cd;\quad da,db,dc$$

易数得从 a,b,c,d 四个字母中每次取 2 个不同字母的所有不同排列的个数是 12。

一般情况下，怎样计算 P_n^m 的值呢？为了研究这个问题，试想一个与其等价的问题：“从 n 个不同元素中任取 $m\,(m\leqslant n)$ 个不同元素，将其放入 m 个空位置中，有多少种不同放法？”要完成这件事，可将其分成 m 个步骤。第一步，从 n 个元素中任取 1 个放在第 1 个位置，有 n 种不同放法；第二步，从剩余 $n-1$ 个元素中任取 1 个放在第 2 个位置，有 $n-1$ 种不同放法；第三步，从剩余 $n-2$ 个元素中任取 1 个放在第 3 个位置，有 $n-2$ 种不同放法；……；第 $m-1$ 步，从剩余 $n-m+2$ 个元素中任取 1 个放在第 $m-1$ 个位置，有 $n-m+2$ 种不同放法；第 m 步，从剩余 $n-m+1$ 个元素中任取 1 个放在第 m 个位置，有 $n-m+1$ 种不同放法。根据乘法原理，完成这件事共有 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 种不同放法，因此

$$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) \tag{1-1}$$

为了书写方便，我们把从 1～n 的正整数连乘记作 $n!$，读作 n 阶乘，即

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1 \tag{1-2}$$

并规定 $0!=1$。

于是又有

$$P_n^m=\frac{n!}{(n-m)!} \tag{1-3}$$

[注] $P_n^n=n!$。

2) 可重复排列

定义 1-2 从 n 个不同元素中任取 $m\,(m\leqslant n)$ 个元素(允许重复)，按照一定的顺序排成一列，叫作从 n 个不同元素中取 m 个元素的一个可重复排列，其所有不同排列的个数称为排列数。

类似于 P_n^m 计算公式的推导，可知可重复排列的排列数为 n^m。

例如，在 a,b,c,d 四个字母中每次取 2 个字母的所有可重复排列是：

aa,ab,ac,ad ； ba,bb,bc,bd ； ca,cb,cc,cd ； da,db,dc,dd

易数得从 a,b,c,d 四个字母中每次取 2 个字母的所有可重复排列的个数是 $4^2=16$ 。

例 1-5 计算：(1) $P_3^2+P_4^3$；(2) $\dfrac{P_5^3-P_4^4}{5!+4!}$ 。

解 (1) $P_3^2+P_4^3=3\times2+4\times3\times2=30$ 。

(2) $\dfrac{P_5^3-P_4^4}{5!+4!}=\dfrac{5\times4\times3-4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1+4\times3\times2\times1}=\dfrac{1}{4}$ 。

例 1-6 有 5 个男孩、3 个女孩站成一排。

(1) 男孩不站在排头也不站在排尾，有几种不同站法？

(2) 男孩必须相邻，有几种不同站法？

解 (1) 由于男孩既不站在排头也不站在排尾，可考虑先满足排头、排尾两个特殊位置的要求。从 3 个女孩中任选 2 个站在这两个位置，有 P_3^2 种站法，然后让 5 个男孩与剩下的 1 个女孩站在剩下的 6 个位置，有 P_6^6 种站法。根据乘法原理，共有 $P_3^2\ P_6^6=3\times2\times6\times5\times4\times3\times2\times1=4320$ 种不同站法。

(2) 由于 5 个男孩必须相邻，因此可先把他们看作一个整体而和 3 个女孩站成一排，有 P_4^4 种站法，再对 5 个男孩进行排列，有 P_5^5 种站法。根据乘法原理，共有 $P_4^4\ P_5^5=4\times3\times2\times1\times5\times4\times3\times2\times1=2880$ 种不同站法。

例 1-7 数字 $0,1,2,3$ 可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解　因为 0 不能在百位位置，所以可从 $1,2,3$ 三个数字中任选一个排在百位位置上，有 P_3^1 种排法；当百位位置上数字选定后，把 $1,2,3$ 中剩余的两个数字与 0 共 3 个数字排在十位与个位两个位置上，有 P_3^2 种排法。根据乘法原理，共可以组成 $P_3^1\ P_3^2=3\times3\times2=18$ 个三位数。

3. 组合

定义 1-3 从 n 个不同元素中任取 $m\,(m\leqslant n)$ 个不同元素，不管顺序并成一组，叫作从 n 个不同元素中取 m 个不同元素的一个组合。其所有不同组合的个数称为组合数，用符号 C_n^m 表示。

[注]　排列与组合的不同之处是：排列考虑元素的顺序，组合不考虑元素的顺序。在排列中若元素相同但排列的顺序不同，就视为不同排列；在组合中只要元素相同，就视为同一组合。

那么怎样计算 C_n^m 的值呢？我们可以通过另一种思维方式计算 P_n^m 来求得 C_n^m 的计算公式。计算 P_n^m 的值就是计算从 n 个不同元素中任取 m 个不同元素的所有不同排列的个数。我们可以将计算 P_n^m 这件事分成两个步骤：第一步是从 n 个元素中任取 m 个元素，不管顺序并成一组，共有 C_n^m 种不同取法；第二步是将取出的 m 个元素排成一列，共有 P_m^m 种排法。根据乘法原理，完成计算 P_n^m 这件事共有 $C_n^mP_m^m$ 种不同方法，即

$$P_n^m = C_n^m P_m^m = C_n^m m!$$

于是

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} \tag{1-4}$$

利用 $P_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$，又可得

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{1-5}$$

组合具有如下性质。

(1) $C_n^m = C_n^{n-m}\ (0 \leqslant m \leqslant n)$。

(2) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}\ (1 \leqslant m < n)$。

规定 $C_n^0 = 1$，特别有 $C_n^1 = n$，$C_n^n = 1$。

例 1-8 计算：(1) $C_6^4 - C_5^3$；(2) $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$。

解 (1) $C_6^4 - C_5^3 = \dfrac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1} - \dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 5$。

(2) $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = C_4^1 + C_4^2 + C_4^{4-3} + C_4^4 = 4 + \dfrac{4\times3}{2\times1} + 4 + 1 = 15$。

例 1-9 一条铁路上有 20 个车站，按常规：

(1) 一共需要准备多少种不同的车票？

(2) 一共有多少种不同的票价？

解 (1) 从 20 个车站中任取 2 个车站(车票与顺序有关)的排列数是

$$P_{20}^2 = 20\times19 = 380$$

(2) 从 20 个车站中任取 2 个车站(票价与顺序无关)的组合数是

$$C_{20}^2 = \frac{20\times19}{2\times1} = 190$$

例 1-10 从 5 名男生和 4 名女生中选 3 名代表参加数学竞赛，要求代表中男生 2 名、女生 1 名，共有多少种选法？

解 从 5 名男生中选 2 名有 C_5^2 种选法，从 4 名女生中选 1 名有 C_4^1 种选法。根据乘法原理，共有 $C_5^2\, C_4^1 = \dfrac{5\times4}{2\times1}\times4 = 40$ 种选法。

1.3 随机事件的概率

当多次重复做某一随机试验 E 时，常常会察觉某些事件出现的可能性要大些，而另一些事件出现的可能性要小些。例如，在抽扑克牌试验中抽到黑桃的事件比抽到“大、小王”的事件出现的可能性要大。那么怎样定义随机事件出现的可能性大小呢？我们先从比较简单的概念——频率入手研究。

1. 事件的频率

定义 1-4 在相同的条件下，重复进行了 n 次试验，若事件 A 出现了 k 次，则称比值 $\dfrac{k}{n}$ 为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率，记作 $F_n(A)$，即

$$F_n(A)=\frac{k}{n} \tag{1-6}$$

可以用事件的频率描述随机事件出现的可能性大小。例如，在掷硬币试验中，假设掷 100 次硬币，事件 $A=\{$正面$\}$出现了 51 次，自然可以用数字 $F_{100}(A)=\dfrac{51}{100}$ 表示事件 A 出现的可能性大小。用频率描述随机事件出现的可能性大小有不完备之处。假如第一天掷 100 次硬币，A 出现了 51 次，用 $\dfrac{51}{100}$ 表示事件 A 出现的可能性大小；第二天又掷 100 次硬币，事件 A 出现了 49 次，得用 $\dfrac{49}{100}$ 表示事件 A 出现的可能性大小；第三天又掷 300 次硬币，事件 A 出现了 158 次，又得用 $\dfrac{158}{300}$ 表示事件 A 出现的可能性大小。显然，随机事件的频率与试验的次数 n 有关，还与试验的轮次有关。我们需要用一个与试验次数及轮次无关的精确数字描述随机事件出现的可能性大小，这个数字就称为随机事件的概率。

2. 概率的定义

既然各随机事件出现的可能性有大有小，自然使人想到用一个数字表示事件 A 出现的可能性大小，较大的可能性用较大的数字表示，较小的可能性用较小的数字表示，这个数字记作 $P(A)$，称为事件 A 的概率。

然而，对于给定的事件 A，究竟应该用哪个数字来作为它的概率呢？也就是说，怎样从数量上来定义 $P(A)$ 呢？这取决于试验 E 和事件 A 的特殊性，不能一概而论。

由于频率与概率都是用来描述事件出现可能性大小的，可以通过研究频率的性质给出概率应满足的基本条件，由此得到下面的概率公理化定义。

定义 1-5 设试验 E 的基本事件空间为 Ω，如果全体事件集合上的函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 非负性：对任意事件 A，恒有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$。

(3) 可列可加性：对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，即 $A_iA_j=\varPhi\ (i\neq j)$，恒有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1-7}$$

则称函数 $P(\cdot)$ 为概率。

3. 概率的性质

(1) $P(\varPhi)=0$。

证 因 $\varPhi=\varPhi+\varPhi+\cdots+\varPhi+\cdots$，则 $P(\varPhi)=P(\varPhi)+\cdots+P(\varPhi)+\cdots$，从而 $P(\varPhi)=0$。

(2) 有限可加性：若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varPhi\ (i\neq j)$，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1-8}$$

证 因为$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \Phi + \Phi + \cdots$，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \Phi + \cdots)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + P(\Phi) + \cdots = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) 对任意事件 A，恒有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \tag{1-9}$$

证 因$A+\bar{A}=\Omega$，$A\bar{A}=\Phi$，则$1=P(\Omega)=P(A+\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$，故$P(\bar{A})=1-P(A)$。

(4) 若 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$。

证 因 $A=(A-B)+B$，且 $(A-B)B=\Phi$，则 $P(A)=P[(A-B)+B]=P(A-B)+P(B)$，从而 $P(A-B)=P(A)-P(B)$。

推论 (单调性)若 $A\supset B$，则 $P(A)\geqslant P(B)$。

证 若 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，从而 $P(A)-P(B)=P\left(A-B\right)\geqslant 0$。

(5) 加法公式：对任意的事件 A,B，恒有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1-10}$$

证 因 $A+B=A+(B-AB)$，且$A(B-AB)=\Phi$，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

加法公式推广：

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \tag{1-11}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}^{n} P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n) \tag{1-12}$$

1.4 古典型概率与几何型概率

1. 古典型概率

一个随机试验 E 若满足：

(1) 基本事件空间中只有有限多个基本事件(有限性)，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$；

(2) 各基本事件出现的可能性相等(等可能性)，即 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$。

则称该随机试验为古典型随机试验。

定义 1-6 设古典型随机试验的基本事件空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，若随机事件 A 中含有 k $(k\leqslant n)$ 个基本事件，则定义

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{中基本事件个数}}{\Omega\text{中基本事件个数}} \tag{1-13}$$

例如，随机试验 E ——掷硬币观察其面，其基本事件空间是 Ω ={“正面”，“反面”}，A={“正面”}，则 $P(A)=\frac{1}{2}$。

例 1-11 掷两枚骰子，观察出现的点数所组成的数对 (x, y)，求事件 A ={点数之和等于 5}，B ={点数之和小于 5}的概率。

解 基本事件空间 $\Omega=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),(2,2),\cdots,(2,6),\cdots,(6,1),(6,2),\cdots,(6,6)\}$ 中含有 36 个基本事件，事件 $A=\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$ 中含有 4 个基本事件，事件 $B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$ 中含有 6 个基本事件，于是

$$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}，\quad P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

例 1-12 一部五卷文集随机放在书架上，求事件 A ={从左到右或从右到左卷号顺序恰好为 $1,2,3,4,5$ }的概率。

解 基本事件空间 Ω 中含有 $P_5^5=5!=120$ 个基本事件，事件 A 中仅含有 2 个基本事件，于是 $P(A)=\dfrac{2}{120}=\dfrac{1}{60}$。

例 1-13 袋中装有 4 个白球、5 个黑球，现从中任取两个，求：

(1) 两个均为白球的概率 P_1；

(2) 被取的两个球中一个白球一个黑球的概率 P_2；

(3) 至少有一个黑球的概率 P_3。

解 (1) $P_1=\dfrac{C_4^2}{C_9^2}=\dfrac{1}{6}$。

(2) $P_2=\dfrac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}=\dfrac{5}{9}$。

(3) 事件“至少有一个黑球”=“恰好只有一个黑球”+“两个都是黑球”，根据加法公式得

$$P_3=\frac{C_5^1C_4^1}{C_9^2}+\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{5}{6}$$

例 1-14 书架上随意摆放着 15 本教科书，其中有 5 本是数学书，从中随机抽取 3 本，求至少有一本是数学书的概率。

解 设 A ={被抽到的 3 本书中至少有一本是数学书}，则

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=1-\frac{24}{91}=\frac{67}{91}$$

2. 几何型概率

设 Ω 是平面一区域，具有有限面积 $L(\Omega)$。向区域 Ω 中投掷一质点 M，点 M 在 Ω 中均匀分布，即：①点 M 必落于 Ω 中；②点 M 落在 Ω 的子区域中的概率与该子区域的面积成正比，而与该子区域在 Ω 中的位置与形状无关。设 A 是 Ω 中一子区域，其面积为 $L(A)$，则质点 M 落在区域 A 中的概率是

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)} \tag{1-14}$$

例 1-15 若在区间 $(0,1)$ 上随机地取两个数 x, y，求关于 t 的一元二次方程 $t^2-2yt+x=0$ 有实根的概率。

解 设事件 $A=\{$方程 $t^2-2yt+x=0$ 有实根$\}$，因 x,y 是从区间 $(0,1)$ 上任取的两个数，则 (x,y) 的取值区域是 $\Omega=\left\{(x,y)\mid 0<x,y<1\right\}$，事件 A 的取值区域是 $A=\left\{(x,y)\middle|4(y^2-x)\geqslant 0, 0<x,y<1\right\}$，如图 1-1 所示。于是

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{\int_0^1 y^2\mathrm{d}y}{1}=\frac{1}{3}y^3\bigg|_0^1=\frac{1}{3}$$

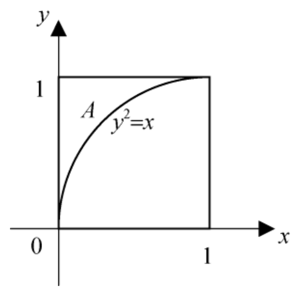

图 1-1

1.5 条件概率

1. 条件概率

定义 1-7 设 A,B 是两个随机事件，且 $P(A)>0$，则称 $\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 已出现的条件下事件 B 出现的概率，记作 $P(B|A)$，即

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1-15}$$

例如，随机试验 E ——从 54 张混放的扑克牌中随机抽取一张，观察抽到哪一张牌。其基本事件空间中含有 54 个基本事件。事件 $A=\{$抽到黑桃$\}$，事件 $B=\{$抽到黑桃 5$\}$，则在已知抽到黑桃的条件下，抽到黑桃 5 的概率是

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{54}}{\frac{13}{54}}=\frac{1}{13}$$

[注] 条件概率也是概率，故它具有概率的性质，如：

(1) $P(\Phi|B)=0$。

(2) $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$。

(3) $P[(A_1+A_2)|B]=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$。

例 1-16 某种动物活到 20 岁以上的概率为 0.8，活到 25 岁以上的概率为 0.4，求现年 20 岁的这种动物能活过 25 岁的概率。

解 设 $A=\{$能活到20岁以上$\}$，$B=\{$能活到25岁以上$\}$，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=\frac{1}{2}$$

2. 乘法公式

由条件概率公式 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，得两个随机事件的乘法公式为

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A),\quad P(A)>0 \tag{1-16}$$

乘法公式的一般形式：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1-17}$$

其中，$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$。

证 因为 $A_1A_2\cdots A_{n-1}\subset A_1A_2\cdots A_{n-2}\subset\cdots\subset A_1A_2\subset A_1$，则

$$P(A_1)\geqslant P(A_1A_2)\geqslant\cdots\geqslant P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$$

从而

$$\text{右端}=P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}\cdots\frac{P(A_1A_2\cdots A_n)}{P(A_1A_2\cdots A_{n-1})}=P(A_1A_2\ldots A_n)=\text{左端}$$

例 1-17　三张考签中有两张难签，甲、乙、丙三人通过抽签决定两张难签的归属，甲先、乙次、丙最后。

(1) 求乙抽到难签的概率；

(2) 已知乙抽到了难签，求甲也抽到难签的概率。

解 设 A,B,C 分别表示甲、乙、丙抽到难签，则

(1) $P(B)=P(\Omega B)=P[(A+\bar{A})B]=P(AB)+P(\bar{A}B)$

$$=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{2}{3}\text{。}$$

(2) $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\div\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}$。

例 1-18 已知 40 件产品中有 3 件次品，现随意从中先后取出 2 件产品，试求：

(1) 第一次取到次品的概率 P_1，第二次取到次品的概率 P_2，第二次才取到次品的概率 P_3；

(2) 取出的 2 件产品中至少有一件是次品的概率 P_4；

(3) 已知取出的 2 件产品中至少有一件是次品，那么另一件也是次品的概率 P_5。

解 设 A_i={第 i 次取到次品}($i=1,2$)，则：

(1) $P_1=P(A_1)=\dfrac{3}{40}$。

$$P_2=P(A_2)=P[A_2(A_1+\bar{A}_1)]=P[A_1A_2+\bar{A}_1A_2]=P(A_1A_2)+P(\bar{A}_1A_2)$$

$$=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2\mid\bar{A}_1)=\frac{3}{40}\times\frac{2}{39}+\frac{37}{40}\times\frac{3}{39}=\text{。}$$

$$P_3=P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{37}{40}\times\frac{3}{39}=\frac{3}{5}\text{。}$$

(2) $P_4=P(A_1+A_2)=1-P(\overline{A_1+A_2})=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2)$

$$=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)=1-\frac{37}{40}\times\frac{36}{39}=\frac{19}{130}\text{。}$$

(3) $P_5=P[A_1A_2\mid(A_1+A_2)]=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1+A_2)}=\dfrac{P(A_1)P(A_2\mid A_1)}{P_4}=\dfrac{\frac{3}{40}\times\frac{2}{39}}{\frac{19}{130}}=\dfrac{1}{38}$。

3. 完备事件组

定义 1-8 设 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 是一列事件，若它们满足：

(1) $H_iH_j = \Phi\ (i \neq j)$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$，

则称 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 为一个完备事件组。

4. 全概率公式

设 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 是一完备事件组，且 $P(H_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，则对任一事件 A，恒有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i) \tag{1-18}$$

证 由于 $A = A\Omega = A\left(\sum\limits_{i=1}^{n} H_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}(AH_i)$，且 $(AH_i)(AH_j) = A(H_iH_j) = \Phi(i \neq j)$，于是

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{n} AH_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i)$$

[注] 全概率公式的主要应用：当直接求事件 A 的概率较困难时，可借助与 A 密切相关的某完备事件组，通过全概率公式间接计算 A 的概率。

例 1-19 某届世界女排锦标赛半决赛对阵如图 1-2 所示。根据以往资料统计，中国胜美国的概率为 0.4，中国胜日本的概率为 0.9，而日本胜美国的概率为 0.5，求中国得冠军的概率。

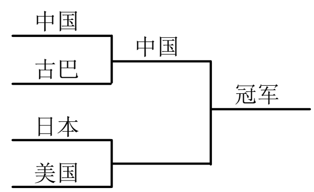

图 1-2

解 设 H ={日本胜美国}，$\bar{H}$ ={美国胜日本}，A ={中国得冠军}，由全概率公式得

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H)P(A|H) + P(\bar{H})P(A|\bar{H}) \\ &= 0.5 \times 0.9 + 0.5 \times 0.4 = 0.65 \end{aligned}$$

5. 贝叶斯(Bayes)公式

设 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 是一完备事件组，且 $P(H_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，则对任一事件 A ($P(A) > 0$)，恒有

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)} \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{1-19}$$

证 $P(H_k \mid A) = \dfrac{P(AH_k)}{P(A)} = \dfrac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$

[注] 贝叶斯公式用于在某一事件已经出现的条件下，求与该事件密切相关的完备事件组中某一事件出现的概率。

例 1-20 某种诊断癌症的实验有如下效果：患有癌症者做此实验反应为阳性的概率为 0.95，不患有癌症者做此实验反应为阴性的概率也为 0.95，并假定体检者中有千分之五的人患有癌症。已知某体检者做此实验反应为阳性，他是一个癌症患者的概率是多少？

解 设 H ={体检者为癌症患者}，$\bar{H}$ ={体检者不是癌症患者}，A ={实验结果反应为阳性}，则

$$P(H|A)=\frac{P(H)P(A|H)}{P(H)P(A|H)+P(\bar{H})P(A|\bar{H})}=\frac{0.005\times0.95}{0.005\times0.95+0.995\times0.05}=0.087$$

例 1-21 设有一箱产品是由三家工厂生产的。已知其中 $\frac{1}{2}$ 的产品是由甲厂生产的，乙、丙两厂的产品各占 $\frac{1}{4}$，又知甲、乙两厂的次品率为 2%，丙厂的次品率为 4%。现从该箱中任取一产品：

(1) 求所取得的产品是甲厂生产的次品的概率；

(2) 求所取得的产品是次品的概率；

(3) 已知所取得的产品是次品，它是由甲厂生产的概率是多少？

解 设 H_1,H_2,H_3 分别表示所取得的产品是由甲、乙、丙厂生产的，A ={所取得的产品为次品}，则：

(1) 由乘法公式得

$$P(H_1A)=P(H_1)P(A|H_1)=\frac{1}{2}\times2\%=1\%$$

(2) 由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)\\&=\frac{1}{2}\times2\%+\frac{1}{4}\times2\%+\frac{1}{4}\times4\%=2.5\%\end{aligned}$$

(3) 由贝叶斯公式得

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\times2\%}{2.5\%}=40\%$$

1.6 事件的独立性

定义 1-9 设 A,B 是两个事件，若

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1-20}$$

则称事件 A 与 B 相互独立。

定义 1-10 设 A,B,C 是三个事件，若

$$\left.\begin{aligned}P(AB)&=P(A)P(B)\\P(AC)&=P(A)P(C)\\P(BC)&=P(B)P(C)\\P(ABC)&=P(A)P(B)P(C)\end{aligned}\right\} \tag{1-21}$$

则称事件 A,B,C 相互独立。

[注] 类似可定义 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的相互独立性。

定理 1-1 设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，在这 n 个事件中任取 m 个事件，将这 m 个事件换成它们对应的逆事件，这样所得的 n 个事件仍然相互独立。

证明略。

特别：

(1) 若 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\bar{B}$ 、 $\bar{A}$ 与 B 、 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 都相互独立。

(2) 若 A,B,C 相互独立，则 $A,B,\bar{C}$ 、 $\bar{A},\bar{B},C$ 、 $\bar{A},\bar{B},\bar{C}$ 等都相互独立。

例 1-22 三人独立破译一密码，他们能单独译出的概率分别为 $\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ ，求此密码能被译出的概率。

解 设 A,B,C 分别表示甲、乙、丙能单独译出密码，则 A,B,C 相互独立，于是

$$P(A+B+C)=1-P(\overline{A+B+C})=1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=1-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$$

例 1-23 某射手对同一目标连续进行 3 次独立射击，每次击中目标的概率为 p ，假设至少命中一次的概率为 $\frac{7}{8}$ ，求 p 。

解 设 A_i ={第 i 次命中目标}($i=1,2,3$)，显然，事件 A_1,A_2,A_3 相互独立。由 3 次射击至少命中一次的概率

$$P(A_1+A_2+A_3)=1-P(\overline{A_1+A_2+A_3})=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)$$

$$=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=1-(1-p)^3=\frac{7}{8}$$

得 $p=\frac{1}{2}$ 。

例 1-24 设两两相互独立的三事件 $A,\ B,\ C$ 满足 $ABC=\Phi$ ， $P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$ ，且 $P(A+B+C)=\frac{9}{16}$ ，求 $P(A)$ 。

解 由于 A,B,C 两两相互独立，且 $P(A)=P(B)=P(C)$ ， $ABC=\Phi$ ，则

$$P(AB)=P(A)P(B)=P(A)^2$$
$$P(AC)=P(A)P(C)=P(A)^2$$
$$P(BC)=P(B)P(C)=P(A)^2$$
$$P(ABC)=P(\Phi)=0$$

根据概率的加法公式得

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

从而

$$P(A+B+C)=3P(A)-3P(A)^2=\frac{9}{16}$$

解得 $P(A)=\frac{1}{4}$ 或 $P(A)=\frac{3}{4}$ 。

再由 $P(A)<\frac{1}{2}$ ，得 $P(A)=\frac{1}{4}$ 。

例 1-25 设两个相互独立的事件 A, B 都不出现的概率为 $\frac{1}{9}$， A 出现 B 不出现的概率与 B 出现 A 不出现的概率相等，求 $P(A)$ 。

解 因 A, B 相互独立，则

$$P(A\bar{B}) = P[A(\Omega - B)] = P[A - AB] = P(A) - P(A)P(B)$$
$$P(\bar{A}B) = P[(\Omega - A)B] = P[B - AB] = P(B) - P(A)P(B)$$

又因为 $P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B)$，得 $P(A) = P(B)$ 。

由 A, B 相互独立，得 $\bar{A}, \bar{B}$ 相互独立，于是

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = [1 - P(A)]^2 = \frac{1}{9}$$

从而可得 $P(A) = \frac{2}{3}$ 。

小　　结

1. 随机事件的基本概念

(1) 随机现象：一次观察，可能出现也可能不出现的现象。

(2) 随机试验 E ：对随机现象的观察。

(3) 基本事件 ω ：试验 E 的一个基本结果。

(4) 基本事件空间 Ω ：所有基本事件的集合。

(5) 随机事件：一部分基本事件的集合，即基本事件空间的子集合。

(6) 必然事件：每次试验一定会出现的事件，即基本事件空间 Ω 。

(7) 不可能事件 Φ ：每次试验一定不会出现的事件，即不含任何基本事件的空集。

(8) 事件 A 出现： A 中的某一个基本事件出现。

2. 事件的关系和运算

(1) $A \subset B$ ：若事件 A 出现必然导致事件 B 出现，即 A 中的基本事件都在 B 中。

(2) $A = B$ ： $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 。

(3) A 与 B 互不相容： A 与 B 不能同时出现，即 $AB = \Phi$ 。

(4) A 与 B 互为逆事件： A 与 B 必然有一个出现，而且仅有一个出现，即 A, B 满足

$$A + B = \Omega,\ AB = \Phi$$

(5) A 的逆事件 $\bar{A}$ ：事件 A 不出现，即 $\bar{A} = \Omega - A = \{\omega | \omega \notin A,\ \omega \in \Omega\}$ 。

(6) 事件的和： $A + B = \{$ 事件 A 与 B 至少出现一个 $\}$

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \{A_1, A_2, \cdots, A_n \text{至少出现一个}\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \text{ 至少出现一个}\}$$

(7) 事件的积：$AB = \{$事件 A 与 B 都出现$\}$

$$A_1A_2\cdots A_n = \left\{A_1, A_2, \cdots, A_n\text{都出现}\right\}$$

$$A_1A_2\cdots A_n\cdots = \left\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \text{都出现}\right\}$$

(8) 事件的差：$A - B = \{$事件 A 出现但事件 B 不出现$\}$。

3. 事件的关系和运算的性质

(1) 逆运算：$\bar{\bar{A}} = A$，$\bar{\Omega} = \Phi$，$\bar{\Phi} = \Omega$。

(2) 吸收律：$A + \Omega = \Omega$，$A + \Phi = A$，$A\Omega = A$，$A\Phi = \Phi$，$AA = A$。

(3) 交换律：$A + B = B + A$，$AB = BA$。

(4) 结合律：$A + (B + C) = (A + B) + C$，$A(BC) = (AB)C$。

(5) 分配律：$A(B + C) = AB + AC$，$A(B - C) = AB - AC$。

(6) 德·摩根定律：

$$\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n$$

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \cdots + \bar{A}_n$$

4. 排列与组合

(1) 加法原理：做一件事，完成它有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种方法，在第二类办法中有 m_2 种方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种方法，不论用哪一类办法中的哪一种方法都可以完成这件事，那么完成这件事共有 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同方法。

(2) 乘法原理：做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，……，做第 n 步有 m_n 种方法，只有当这 n 个步骤全部完成时，才能完成这件事，那么完成这件事共有 $m_1m_2\cdots m_n$ 种不同方法。

(3) 不可重复排列：从 n 个不同元素中任取 m $(m \leqslant n)$ 个不同元素，按照一定的顺序排成一列，其所有的不同排列的个数即排列数为

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

$$P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

(4) 可重复排列：从 n 个不同元素中任取 m $(m \leqslant n)$ 个元素(允许重复)，按照一定的顺序排成一列，其所有的不同排列的个数即排列数为

$$N = n^m$$

(5) 组合：从 n 个不同元素中任取 m $(m \leqslant n)$ 个不同元素，不管顺序并成一组，其所有的不同组合的个数即组合数为

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

规定：$0! = 1$，$C_n^0 = 1$。

5. 随机事件的概率

(1) 事件的频率：在相同的条件下重复进行了 n 次试验，若事件 A 出现了 k 次，则 A 出现的频率为

$$F_n(A)=\frac{k}{n}$$

(2) 概率公理化定义：设试验 E 的基本事件空间为 Ω，如果全体事件集合上的函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件。

① 非负性：对任意事件 A，恒有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

② 规范性：$P(\Omega)=1$。

③ 可列可加性：对于两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，即 $A_iA_j=\varPhi\ (i\neq j)$，恒有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称函数 $P(\cdot)$ 为概率。

6. 概率的性质

(1) $P(\varPhi)=0$。

(2) 有限可加性：若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varPhi\ (i\neq j)$，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

(3) 对任意事件 A，恒有

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

(4) 若 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$。

(5) 加法公式：对任意事件 A,B，恒有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

7. 古典型概率

(1) 古典型随机试验 E：

① 基本事件空间中只有有限多个基本事件(有限性)，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$；

② 各基本事件出现的可能性相等(等可能性)，即 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$。

(2) 古典型概率：设古典型随机试验的基本事件空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，若随机事件 A 中含有 $k\ (k\leqslant n)$ 个基本事件，则定义

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{中基本事件个数}}{\Omega\text{中基本事件个数}}$$

(3) 几何型概率：向平面区域 Ω 中均匀地投掷一随机点，即随机点落在 Ω 中的任何一点的可能性都相同，设平面区域 A 是 Ω 的一个子区域，则随机点落入区域 A 的概率为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}$$

其中，$L(\Omega)$ 与 $L(A)$ 分别表示区域 Ω 与区域 A 的面积。

8. 条件概率

(1) 条件概率：在事件 A 已出现的条件下事件 B 出现的概率为

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\ (P(A)>0)$$

(2) 两个事件的乘法公式：

$$P(AB)=P(A)P(B \mid A)\quad (P(A)>0)$$

(3) n 个事件的乘法公式：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})，\quad P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$$

(4) 完备事件组：$H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是一个完备事件组 $\Leftrightarrow$ 事件列 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 满足：

① $H_iH_j=\Phi\ (i\neq j)$；

② $\sum\limits_{i=1}^{n}H_i=\Omega$。

(5) 全概率公式：设 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是一完备事件组，且 $P(H_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任一事件 A，恒有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A \mid H_i)$$

(6) 贝叶斯公式：设 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是一完备事件组，且 $P(H_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任一事件 A $(P(A)>0)$，恒有

$$P(H_k \mid A)=\frac{P(H_k)P(A \mid H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)P(A \mid H_i)}(k=1,2,\cdots,n)$$

[注] ① $P(AB)$ 与 $P(B \mid A)$ 的区别：$P(AB)$ 是在基本事件空间为 Ω 时 A 与 B 同时出现的概率，而 $P(B \mid A)$ 则表示在 A 已经出现的条件下 B 出现的概率，这时基本事件空间已由 Ω 缩减为 A 了。

② 如果事件 A 的出现总是与某些前提因素 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 相关联，于是计算 $P(A)$ 时，可将事件 A 对前提因素 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 做分解：$A=A\left(\sum\limits_{i=1}^{n}H_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}(AH_i)$，再应用全概率公式计算 $P(A)$。如果在事件 A 已经出现的条件下探求导致这一结果的各种因素 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 出现的可能性，则要应用贝叶斯公式。

9. 事件的独立性

(1) 2 个事件相互独立：

$$A \text{ 与 } B \text{ 独立} \Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$$

(2) 3 个事件相互独立：

$$A,B,C \text{ 相互独立} \Leftrightarrow \begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

(3) n 个事件相互独立：$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立 $\Leftrightarrow$ 它们中任意 $k\ (2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件乘积的概率都等于这些事件概率的乘积。

(4) 关于独立性的一些重要结论。

① 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则它们中的任何一部分事件也相互独立。

② 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则将它们中的任何一部分事件换成其逆事件后所得到的 n 个事件仍然相互独立。如 A,B,C,D 相互独立，将其中任意一部分事件，比如 A,C 两个事件换成它的逆事件后变成 $\bar{A},B,\bar{C},D$，则 $\bar{A},B,\bar{C},D$ 这四个事件仍然相互独立。

③ $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立 $\Rightarrow$ $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两相互独立，反之不成立。

④ 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则由其中任意一部分事件所产生的事件(如它们经过运算后产生的事件)与另一部分事件所产生的事件相互独立。

⑤ 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$。

⑥ 在具体实际情况中，判断事件间的相互独立性，是根据这些事件间是否相互关联来判断的。

阶梯化训练题

一、基础能力题

1. 设 A,B,C 为三个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列事件：

(1) A 出现，B 与 C 不出现；

(2) A 与 B 都出现，而 C 不出现；

(3) A,B,C 都出现；

(4) A,B,C 中至少有一个出现；

(5) A,B,C 都不出现；

(6) A,B,C 中不多于一个出现；

(7) A,B,C 中不多于两个出现；

(8) A,B,C 中至少有两个出现。

2. 在图书馆中任选一本书，设 $A=\{$数学书$\}$，$B=\{$中文图书$\}$，$C=\{$平装书$\}$。

(1) 说明事件 $AB\bar{C}$ 的实际意义；

(2) 在什么条件下有 $ABC=A$？

(3) $\bar{C}\subset B$ 表示什么意思？

(4) 若 $\bar{A}=B$，是否意味着图书馆中所有数学书都不是中文版的？

3. 把编上号码的 5 台车床排成一列，共有多少种不同排法？

4. 7 个学生在假期约定，每两人互通一封信，每两人互通一次电话。问：

(1) 共通信几封？

(2) 共通电话几次？

5. 有 15 人参加乒乓球单循环赛(即每 2 人都要比赛一场)，问：一共比赛几场？

6. 数字 1,2,3 可以组成多少个没有重复数字的三位数？

7. 从 5 名男生和 4 名女生中选 3 名代表参加数学竞赛，要求至少有 2 名男生，问：一共有多少种选法？

8. 5 个学生站成一排，问：

(1) 有几种不同站法？

(2) 其中学生甲必须站在中间，有几种不同站法？

(3) 其中甲、乙两学生必须相邻，有几种不同站法？

(4) 其中学生甲不站在排头，有几种不同站法？

9. 在 4 张同样的卡片上分别写有字母 D、D、E、E，现在将 4 张卡片随意排成一列，求恰好排成英文单词 DEED 的概率 P 。

10. 自标号为 1,2,⋯,100 的 100 个同型号灯泡中等可能地任选一个，试求下列事件的概率：

(1) $A=$\{取得号数不超过 16 的灯泡\}；

(2) $B=$\{取得偶数号灯泡\}；

(3) $C=$\{取得号数为 3 的倍数的灯泡\}；

(4) $D=$\{所取灯泡号数\}$<5^3$ 。

11. 电话号码由 5 个数字组成，每个数字可以是 0,1,2,⋯,9 共 10 个数字中的任一个数，求电话号码由完全不同的数字所组成的概率。

12. 一口袋内有 5 个红球、3 个白球、2 个黑球，计算任取 3 个球恰好为一红、一白、一黑的概率。

13. 两封信随机地投入四个邮筒，求：

(1) 前两个邮筒内没有信的概率；

(2) 第二个邮筒内只有一封信的概率。

14. 房间里有 10 个人，分别佩戴着从 1 号到 10 号的胸卡，现等可能地任选 3 人，记录其胸卡的号码，求：

(1) 最小号码为 5 的概率；

(2) 最大号码为 5 的概率。

15. 10 把钥匙中有 3 把能打开门，现任取 2 把，求能打开门的概率。

16. 袋内装有 2 个 5 分、3 个 2 分、5 个 1 分的硬币，任意取出 5 个，求总数超过 1 角的概率。

17. 设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$， $P(AB)=P(BC)=0$， $P(AC)=\dfrac{1}{8}$，求 A,B,C 至少出现一个的概率。

18. 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 内任取一点，求此点落在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=K^2$ $(|K|<1)$ 内的概率。

19. 100 件产品中有 5 件次品，现从中先后任取 2 件而且不放回，求在第一件取得正品的条件下第二件取到次品的概率。

20. 已知在 10 个晶体管中有 2 个次品，在其中先后任取两次，每次取一个不放回抽样，求下列事件的概率：

(1) 两只都是正品；

(2) 两只都是次品；

(3) 一只正品一只次品；

(4) 第二次取出的是次品。

21. 某厂产品中有 4%废品，而 100 件合格品中有 75 件一等品，试求任取一件产品是一等品的概率。

22. 一批产品 100 个，次品率为 10%，每次从中任取一个，不再放回，求第三次才取到正品的概率。

23. 设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取 2 件，已知所取的 2 件产品中至少有一件是不合格品，求另一件也是不合格品的概率。

24. 用 3 台机床加工同一种零件，零件由各机床加工的概率分别为 0.5,0.3,0.2，各机床加工的零件为合格品的概率分别等于 0.94,0.9,0.95，求从中任取一件为合格品的概率。

25. 一台机床有 $\frac{1}{3}$ 的时间加工零件 A，其余时间加工零件 B，加工零件 A 时停机的概率是 0.3，加工零件 B 时停机的概率是 0.4，求这台机床停机的概率。

26. 某商店收进甲厂生产的产品 30 箱、乙厂生产的同种产品 20 箱，甲厂每箱装 100 个，废品率为 0.06，乙厂每箱装 120 个，废品率是 0.05。

(1) 求任取一箱，从中任取一个产品为废品的概率；

(2) 若将所有产品开箱混放，求任取一个产品为废品的概率。

27. 有两个口袋，甲袋中盛有两个白球、一个黑球，乙袋中盛有一个白球、两个黑球。由甲袋中任取一个球放入乙袋，再从乙袋中取出一球。

(1) 求取到白球的概率；

(2) 若已知从乙袋中取出的是白球，求从甲袋中取出放入乙袋的球也是白球的概率。

28. 一个工厂有甲、乙、丙三个车间生产同一种螺钉，产量依次占总产量的 25%,35%,40%，设各车间的次品率依次为 5%,4%,2%。

(1) 求从该厂的螺钉中任取一个是次品的概率；

(2) 若任取一螺钉恰好是次品，求这个次品是由甲车间生产的概率。

29. 甲、乙两人射击，甲击中的概率为 0.8，乙击中的概率为 0.7，两人同时射击，并假定中靶与否是独立的，求：

(1) 两人都中靶的概率；

(2) 甲中乙不中的概率；

(3) 甲不中乙中的概率。

30. 一个工人看管三台机床，在一小时内甲、乙、丙三台机床需工人照看的概率分别是 0.9,0.8,0.85，求在一小时中：

(1) 没有一台机床需要照看的概率；

(2) 至少有一台机床不需要照看的概率；

(3) 至多有一台机床需要照看的概率。

二、综合提高题

1. 以 A 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则 A 的逆事件 $\bar{A}$ 为(　　)。

A. “甲种产品滞销，乙种产品畅销”

B. “甲、乙两种产品均畅销”

C. “甲种产品滞销”

D. “甲种产品滞销或乙种产品畅销”

2. 设 A,B 是任意两个随机事件，计算 $P\{(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})\}$。

3. 设事件 A 与事件 B 互不相容，则(　　)。

A. $P(\bar{A}\bar{B})=0$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A)=1-P(B)$　　D. $P(\bar{A}+\bar{B})=1$

4. 设 A, B 为随机事件，且 $P(B)>0, P(A|B)=1$，则必有(　　)。

A. $P(A+B)>P(A)$　　B. $P(A+B)>P(B)$

C. $P(A+B)=P(A)$　　D. $P(A+B)=P(B)$

5. 对于任意两个事件 A 和 B，(　　)。

A. 若 $AB\neq\Phi$，则 A 和 B 一定独立

B. 若 $AB\neq\Phi$，则 A 和 B 有可能独立

C. 若 $AB=\Phi$，则 A 和 B 一定独立

D. 若 $AB=\Phi$，则 A 和 B 一定不独立

6. 设 A, B 为随机事件，且 $0<P(A)<1, P(B)>0, P(B|A)=P(B|\bar{A})$，则必有(　　)。

A. $P(B|A)=P(\bar{A}|B)$　　B. $P(A|B)\neq P(\bar{A}|B)$

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　D. $P(AB)\neq P(A)P(B)$

7. 设 A,B,C 是三个相互独立的随机事件，且 $0<P(AC)<P(C)<1$，则在下列给定的四对事件中不相互独立的是(　　)。

A. $\overline{A+B}$ 与 C　　B. $\overline{AC}$ 与 $\bar{C}$

C. $\overline{A-B}$ 与 $\bar{C}$　　D. $\overline{AB}$ 与 $\bar{C}$

8. 设 A, B 是任意两个事件，其中 A 的概率不等于 0 和 1，证明：$P(B|A)=P(B|\bar{A})$ 是事件 A 与 B 独立的充分必要条件。

9. 将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：A_1=“掷第一次出现正面”，A_2=“掷第二次出现正面”，A_3=“正、反面各出现一次”，A_4=“正面出现两次”，则事件(　　)。

A. A_1,A_2,A_3 相互独立　　B. A_2,A_3,A_4 相互独立

C. A_1,A_2,A_3 两两独立　　D. A_2,A_3,A_4 两两独立

10. 一实习生用同一台机器接连独立地制造 3 个同种零件，第 i 个零件是不合格品的概率 $p_i=\dfrac{1}{i+1}\ (i=1,2,3)$，以 X 表示 3 个零件中合格品的个数，求 $P\{X=2\}$。

11. 从数 1,2,3,4 中任取一个数，记为 X，再从 $1,\mathrm{L}\ ,X$ 中任取一个数，记为 Y，求 $P\{Y=2\}$。

12. 袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球、30 个是白球，有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，求第二个人取得黄球的概率。

13. 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份。随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出 2 份。

(1) 求先抽取的一份是女生表的概率 p；

(2) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q。

14. 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B,C 分别是将一枚骰子接连掷两次先后出现的点数，求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q。

15. 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，求两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率。

16. 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ $(a>0)$ 内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，求原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率。