第1章　行　列　式

数学是从人们的需要中产生的，行列式是人们从解线性方程组的需要中建立起来的。

1.1　二阶与三阶行列式

1. 二阶行列式

用记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-1}$$

可借助对角线法则来记忆，参看图1-1。

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{12} \\ & \times & \\ a_{21} & & a_{22} \end{vmatrix} \\ - \qquad\qquad + \end{array}$$

图 1-1

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$等于实连线上两元素乘积与虚连线上两元素乘积之差。

例 1-1　计算二阶行列式$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$。

解　$D=3\times1-(-2)\times2=7$

2. 三阶行列式

用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$，称它为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1-2}$$

三阶行列式含有 6 项，每项均为不同行、不同列的 3 个元素的乘积再冠以正负号，其规律遵循如图 1-2 所示的对角线法则：图中各实线连接的 3 个元素的乘积是代数和的正项，各虚线连接的 3 个元素的乘积是代数和的负项。

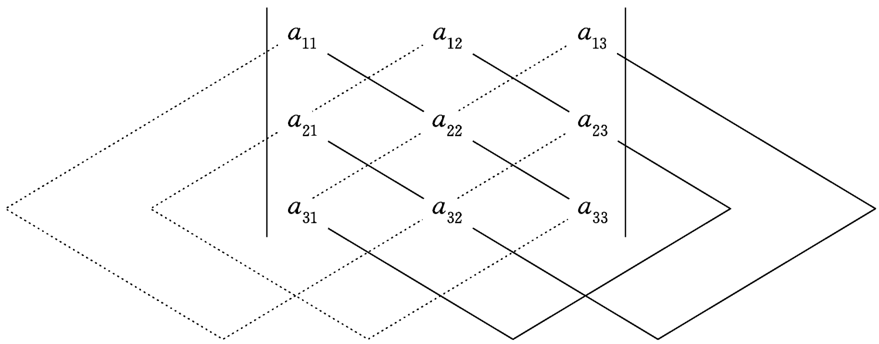

图 1-2

例 1-2 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$。

解 $D=3\times9\times1+3\times0\times0+(-2)\times1\times2-(-2)\times9\times0-3\times1\times1-3\times0\times2$
$=27-4-3=20$

例 1-3 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0$。

解 由 $3x^2+4x+18-12-2x^2-9x=x^2-5x+6=0$，解得 $x=2$ 或 $x=3$。

对角线法则只适用于二阶和三阶行列式，为研究更高阶行列式，下面将介绍有关排列及逆序数的知识。

1.2 排列及其逆序数

定义 1-1 由 n 个自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列。

例如，2 3 4 1 及 4 3 2 1 都是 4 级排列，5 4 2 3 1 是一个 5 级排列。

定义 1-2　在一个 n 级排列中，若较大的数排在较小的数前面，那么它们就构成一个逆序，一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数。

排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数记作 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$。

求排列逆序数的方法：若比 1 大而排在 1 前面的数有 k_1 个，比 2 大而排在 2 前面的数有 k_2 个，比 3 大而排在 3 前面的数有 k_3 个，……，则这个排列的逆序数为 $k_1 + k_2 + k_3 + \cdots$。

例 1-4　求下列排列的逆序数。

(1) 4 5 3 1 2；(2) 7 6 5 4 3 2 1。

解　(1) $\tau(45312) = 3 + 3 + 2 = 8$

(2) $\tau(7654321) = 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$

定义 1-3　若 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 为奇数，则称排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为奇排列；若 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 为偶数，则称排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为偶排列。

例如，排列 7 6 5 4 3 2 1 是奇排列，排列 4 5 3 1 2 是偶排列。

定义 1-4　将一个排列中的任意两个数互换位置，这种对排列的变换称为对换。

定理 1-1　任一排列经过一次对换后，其奇偶性改变。

证明　先证相邻对换的情形。

设排列 $a_1 \cdots a_s a b b_1 \cdots b_t$，对换 a 与 b，变为排列 $a_1 \cdots a_s b a b_1 \cdots b_t$。显然，$a_1, \cdots, a_s$ 和 $b_1, \cdots, b_t$ 这些数的逆序数经过对换并不改变，而 a、b 两数的逆序数改变为：当 $a < b$ 时，经过对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a > b$ 时，经过对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1，所以排列 $a_1 \cdots a_s a b b_1 \cdots b_t$ 与排列 $a_1 \cdots a_s b a b_1 \cdots b_t$ 的奇偶性不同。

再证一般对换的情形。

设排列 $a_1 \cdots a_s a b_1 \cdots b_t b c_1 \cdots c_m$，把它作 t 次相邻对换，变成 $a_1 \cdots a_s a b b_1 \cdots b_t c_1 \cdots c_m$，再作 $t+1$ 次相邻对换，变成 $a_1 \cdots a_s b b_1 \cdots b_t a c_1 \cdots c_m$。总之，经过 $2t+1$ 次相邻对换，排列 $a_1 \cdots a_s a b_1 \cdots b_t b c_1 \cdots c_m$ 变成 $a_1 \cdots a_s b b_1 \cdots b_t a c_1 \cdots c_m$，所以这两个排列的奇偶性相反。

定理 1-2　n 级排列共有 $n!$ 个，并且当 $n > 1$ 时，在 $n!$ 个不同的排列中，奇排列与偶排列各占一半。

1.3　n 阶行列式

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构。 三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

容易看出以下几点。

(1) 三阶行列式表示所有位于不同行、不同列的 3 个元素乘积的代数和。3 个元素的乘积可以表示为 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$，$j_1\ j_2\ j_3$ 为 3 级排列，当 $j_1\ j_2\ j_3$ 遍取 3 级排列时，即得到三阶行列式的所有项(不包括正负号)，共为 $3! = 6$ 项。

(2) 各项的正负号与列下标的排列对照如下。

带正号的三项列下标排列：123，231，312。

带负号的三项列下标排列：321，213，132。

前 3 个排列都是偶排列，后 3 个排列都是奇排列。因此，各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)}$，其中 $\tau(j_1 j_2 j_3)$ 为列下标排列的逆序数。

总之，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} a_{3 j_3}$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对 3 级排列 $j_1\ j_2\ j_3$ 求和。

仿此，可把行列式推广到一般情形。

定义 1-5 令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n} \tag{1-3}$$

式(1-3)的左端称为 n 阶行列式，其中横排称为行，纵排称为列，a_{ij} 称为行列式的第 i 行第 j 列元素；式(1-3)的右端称为 n 阶行列式的展开式，其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 级排列，$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和。

[注]

(1) 行列式的展开式是行列式中一切不同行、不同列元素的乘积 $a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$ 前面加上符号 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ 的代数和。

(2) n 阶行列式的展开式共有 $n!$ 项，当 $n>1$ 时，$n!$ 项中一半前面的符号取正号，另一半取负号。

(3) 式(1-3)左端的 n 阶行列式可简记为 $\left| a_{ij} \right|$。

例 1-5 证明下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \tag{1-4}$$

证明 由于当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ij_i}，其下标应有 $i \geqslant j_i$，即 $j_1 \leqslant 1, j_2 \leqslant 2, \cdots, j_n \leqslant n$。

在所有排列中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$。此项的符号为正，所以

$$D = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

同理，可得上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1-5}$$

特别是对角行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1-6}$$

这些结论在以后行列式的计算中可直接应用。

1.4　行列式的性质

将 n 阶行列式 D 的行与列互换位置，即将第一行变成第一列，第二行变成第二列，……，第 n 行变成第 n 列，这样所得的行列式称为 D 的转置行列式，记作 D^{T}，即

若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

性质 1-1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D^{\mathrm{T}}=D$。

证明从略。

[注]

(1) 由此得，行列式的行与列具有同等的地位，凡是对行成立的性质，对列也成立；反之亦然。

(2) D 与 D^{T} 互为转置行列式。

性质 1-2　行列式的任意两行(列)互换位置，行列式的值仅改变正负号。

证明　设行列式

$$D=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \quad (i\neq s)$$

交换 D 的第 i 行与第 s 行，得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

则由定理 1-1 得

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}$$

$$=-\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=-D_1$$

推论 若行列式中有两行(列)完全相同，则该行列式的值等于 0。

性质 1-3 行列式某行(列)元素的公因式可提至行列式符号外，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 左端 $=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$$=k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}=\text{右端}$$

推论 1 若行列式某行(列)元素全为 0，则该行列式的值等于 0。

推论 2 若行列式中有两行(列)元素对应成比例，则该行列式的值等于 0。

性质 1-4 若行列式中某一行(列)的元素皆为两数之和，则此行列式等于两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 左端 $=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+$$

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=\text{右端}$$

性质 1-5 将行列式某行(列)的 k 倍加于另一行(列)，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \ddots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \ddots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} \quad (i\neq j)$$

证明 由性质 4、性质 3 的推论 2 立得。

[注] 今后用 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列。互换 i、j 两行，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$；互换 i、j 两列，记作 $c_i\leftrightarrow c_j$；用非零数 k 乘以第 j 列，记作 kc_j；将第 j 行的 k

倍加于第 i 行，记作 $r_i + kr_j$，……

例 1-6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 6 & -12 & 4 \end{vmatrix}$。

解 由于第 1 列与第 2 列对应的元素成比例，根据性质 1-3 的推论 2，得

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 6 & -12 & 4 \end{vmatrix}=0$$

例 1-7 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$。

解 $$D\overset{(1)}{=}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}\overset{(2)}{=}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}\overset{(3)}{=}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(4)}{=}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}\overset{(5)}{=}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix}=40$$

[注] 变换规则分别为：(1) $c_1 \leftrightarrow c_2$；(2) $r_2+(-1)r_1, r_4+5r_1$；(3) $r_2 \leftrightarrow r_3$；(4) $r_3+4r_2, r_4+(-8)r_2$；(5) $r_4+\frac{10}{8}r_3$。

例 1-8 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$。

解 $$D\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x & a \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}\overset{(2)}{=}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ 1 & x & a & \cdots & a & a \\ 1 & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x & a \\ 1 & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{(3)}{=}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

[注] 变换规则分别为：(1) $c_1+c_2, c_1+c_3, \cdots, c_1+c_n$；(2) 将第一列公因式 $x+(n-1)a$ 提至行列式符号外；(3) $r_2+(-1)r_1, r_3+(-1)r_1, \cdots, r_n+(-1)r_1$。

1.5 行列式按行(列)展开

一般来说，低阶行列式的计算比高阶行列式的计算简单，因此很自然提出，能否把高阶行列式转化为低阶行列式来计算。为此，先引进余子式和代数余子式的概念。

定义 1-6 在 n 阶行列式 $\left|a_{ij}\right|$ 中，将元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列划去，剩余元素按照原来的相对位置构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；而称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \tag{1-7}$$

为元素 a_{ij} 的代数余子式。

例如，四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中，元素 a_{32} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}$$

定理 1-3 行列式等于它的任意一行(列)各元素与其代数余子式乘积之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-8}$$

证明 先讨论 D 的第一行元素除 $a_{11}\neq 0$ 外，其余元素都为 0 的情形，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

因为 D 的每一项都含有第一行中元素，但第一行中仅有 $a_{11}\neq 0$，所以

$$D=\sum_{1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=a_{11}\sum_{j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2\cdots j_n)}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}$$

由 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$，得 $D=a_{11}A_{11}$。

再讨论 D 中第 i 行元素除 $a_{ij}\neq 0$ 外，其余元素都为 0 的情形，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为了利用上述特殊情形的结果，将 D 的第 i 行依次与第 $i-1,\cdots,2,1$ 各行交换后，再将第 j 列依次与第 $j-1,\cdots,2,1$ 各列交换，经过 $i+j-2$ 次交换 D 的行和列，得

$$D=(-1)^{i+j-2}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$$

最后讨论一般情形

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据上述结论，得

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

[注] 在行列式性质中，凡是对行成立的性质，对列都成立。因此对行列式按列展开有

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1-9}$$

利用这一定理并结合行列式性质，可以简化行列式的计算。

定理 1-4 行列式的任意一行(列)各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于 0，即若 $i \neq j$，则

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \tag{1-10}$$

证明 若行列式第 i 行与第 j 行相同，则该行列式等于 0。现将该行列式按第 j 行展开，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$$

综合上面两个定理的结论，得到

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} &= \begin{cases} |a_{ij}| & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \\ a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} &= \begin{cases} |a_{ij}| & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \end{aligned} \tag{1-11}$$

例 1-9 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$。

解 $D \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 \\ -5 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 0 \\ -5 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -7 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -70$

[注] 变换规则为：$c_1 + (-2)c_2, c_4 + c_2$。

例 1-10 讨论当 k 为何值时，$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & 2 & k \end{vmatrix} \neq 0$。

解 因 $D \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & 2 & k \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} k-1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 2 & k \end{vmatrix}$

$$= (k-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} = (k-1)(k^2 - 4) \neq 0$$

所以 $k \neq 1$ 且 $k \neq \pm 2$。

[注] 变换规则为：$r_2 + (-1)r_1$。

例 1-11　计算 $n+1$ 阶行列式 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

解　$D_{n+1} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= (n+1) \times (-1)^{n+1+1} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \end{vmatrix} = (-1)^n (n+1) a_1 a_2 \cdots a_n$$

[注] 变换规则为：$c_1 + c_2, c_1 + c_3, \cdots, c_1 + c_{n+1}$。

例 1-12　证明范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

其中 $\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})$ 是满足关系式 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 的所有因子 $(x_j - x_i)$ 的乘积。

证明　用数学归纳法。因为

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

所以，当 $n = 2$ 时，范德蒙行列式结论成立。

现假设 $n-1$ 阶范德蒙行列式结论成立，下面证明 n 阶范德蒙行列式结论成立。

为此，从第 n 行开始，依次将前一行乘以 $(-x_1)$ 加到后一行，可得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第一列展开，并把每列的公因子 $(x_i - x_1)$ 提出，就有

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

上式右端的行列式是一个 $n-1$ 阶范德蒙行列式，由归纳法假设，它等于所有 (x_j-x_i) 因子的乘积，其中 $2\leqslant i<j\leqslant n$，故

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

1.6　克莱姆法则

本节介绍行列式在解线性方程组中的一个重要应用——克莱姆(Cramer)法则(也称克拉默法则)。

对于二元线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$，称二阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ 为此方程组的系数行列式。将系数行列式 D 的第一列、第二列分别换成常数项 b_1、b_2 后，所得的行列式依次记作 D_1、D_2，即

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}\qquad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}$$

则当 $D\neq 0$ 时，方程组有唯一解，即

$$x_1=\frac{D_1}{D}\qquad x_2=\frac{D_2}{D}$$

对于三元线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$，称三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ 为此方程组的系数行列式。将系数行列式 D 的第一列、第二列、第三列分别换成常数项 b_1、b_2、b_3 后，所得的行列式依次记 D_1、D_2、D_3，即

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\qquad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}\qquad D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}$$

则当 $D\neq 0$ 时方程组有唯一解，即

$$x_1=\frac{D_1}{D}\qquad x_2=\frac{D_2}{D}\qquad x_3=\frac{D_3}{D}$$

对于含有 n 个方程、n 个未知量的线性方程组，与二元、三元线性方程组的解有相同的法则，这个法则称为克莱姆法则。

含有 n 个方程的 n 元线性方程组的一般形式为

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\ &\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n\end{aligned}\right\}\tag{1-12}$$

它的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 1-5　(克莱姆法则)对于线性方程组(1-12)，当其系数行列式 $D\neq 0$ 时，该方程组有且仅有唯一解，即

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D} \tag{1-13}$$

其中 $D_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 是将系数行列式中的第 j 列换成方程组的常数项 b_1、b_2、$\cdots$、b_n 所得到的行列式。

证明　以行列式 D 的第 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 列元素的代数余子式 $A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}$ 分别乘以线性方程组(1-12)的第 1、第 2、……、第 n 个方程，然后相加，得

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\cdots+a_{n1}A_{nj})x_1+\cdots \\ &+(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj})x_j+\cdots \\ &+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\cdots+a_{nn}A_{nj})x_n \\ &=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj} \end{aligned}$$

由式(1-11)，x_j 的系数等于 D，$x_s(s\neq j)$ 的系数等于 0。等号右端等于 D_j，即

$$Dx_j=D_j\quad(j=1,2,\cdots,n) \tag{1-14}$$

若方程组(1-12)有解，其解必满足式(1-14)，当 $D\neq 0$ 时，则有

$$x_j=\frac{D_j}{D}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

另外，将式(1-13)中的 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$ 代入方程组(1-12)，它可满足方程组(1-12)，所以式(1-13)是方程组(1-12)的解。

例 1-13　解线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4 \end{cases}$。

解　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-153\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=153 \qquad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \end{vmatrix}=153$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&1&3\\3&-1&-4&-2\\2&3&-6&-1\\1&2&-4&-1\end{vmatrix}=0 \qquad D_4=\begin{vmatrix}1&1&2&1\\3&-1&-1&-4\\2&3&-1&-6\\1&2&3&-4\end{vmatrix}=-153$$

由克莱姆法则，得方程组唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=0,\quad x_4=\frac{D_4}{D}=1$$

如果线性方程组(1-12)的常数项全为 0，即

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\qquad\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\tag{1-15}$$

则称它为齐次线性方程组。

显然，齐次线性方程组(1-15)一定有零解，对于齐次线性方程组除零解外是否还有非零解，可由以下定理判定。

定理 1-6　如果齐次线性方程组(1-15)的系数行列式$D\neq 0$，则它仅有零解。

证明　因为$D\neq 0$，齐次线性方程组(1-15)有唯一解，而 D_j 的第 j 列元素全为 0，所以

$$D_j=0 \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

由克莱姆法则知，唯一解为$x_j=\dfrac{D_j}{D}=0(j=1,2,\cdots,n)$，故方程组(1-15)只有零解。

定理 1-7　如果齐次线性方程组(1-15)有非零解，则它的系数行列式$D=0$。

证明参考定理 3-2。

例 1-14　λ取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+\lambda x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\\lambda x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

只有零解？

解　齐次线性方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&\lambda\\1&\lambda&1\\\lambda&1&1\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda&1\\\lambda&1&1\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&\lambda-1&0\\\lambda&1-\lambda&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

如果方程组只有零解，则$D\neq 0$，从而 $\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$。

[注] 变换规则如下。

(1) 首先r_1+r_2、r_1+r_3，然后将第一行的公因式$\lambda+2$提至行列式符号外。

(2) $c_2+(-1)c_1,c_3+(-1)c_1$。

例 1-15　如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} kx_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ (k+2)x_1 - x_2 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + kx_4 = 0 \end{cases}$$

有非零解，k 应取何值？

解　齐次线性方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ k+2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & k \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ k+2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 2k+5 & 0 & 7 \\ k+2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -3\times(-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} k & 1 \\ 2k+5 & 7 \end{vmatrix} = -3(5k-5)$$

如果方程组有非零解，则 $D=0$，从而 $k=1$。

小　　结

1. 行列式的概念

(1) n 阶行列式：

$$\left|a_{ij}\right| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

[注] n 阶行列式 $\left|a_{ij}\right|$ 共有 n^2 个元素，展开后有 $n!$ 项，每一项都是由不同行、不同列元素乘积前面冠以符号 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$。

(2) 二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(3) 三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(4) 上三角行列式：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(5) 下三角行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(6) 对角行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

2. 行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等，即 $D^{\mathrm{T}}=D$。

(2) 将行列式的任意两行(列)互换位置，行列式的值仅改变正负号。

(3) 若行列式中有两行(列)完全相同，则该行列式的值等于 0。

(4) 行列式某行(列)元素的公因式可提至行列式符号外。

(5) 若行列式某行(列)元素全为 0，则该行列式的值等于 0。

(6) 若行列式中有两行(列)元素对应成比例，则该行列式的值等于 0。

(7) 若行列式中某一行(列)的元素皆为两数之和，则此行列式等于两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(8) 将行列式某行(列)的 k 倍加于另一行(列)，行列式的值不变。

3. 行列式按行(列)展开

(1) 余子式与代数余子式。在 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，将元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列划去，剩余元素按照原来的相对位置构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；而称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的代数余子式。

[注] M_{ij}、A_{ij} 都与元素 a_{ij} 的值无关。

(2) 行列式等于它的任意一行(列)各元素与其代数余子式乘积之和，即

按第 i 行展开：$|a_{ij}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$。

按第 j 列展开：$|a_{ij}|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n)$。

[注] 上面各元素与其代数余子式乘积 $a_{ij}A_{ij}$，元素下标与代数余子式下标是相同的。

(3) 行列式的任意一行(列)各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于 0，即若 $i \neq j$，则

① 第 i 行各元素与第 j 行对应元素的代数余子式乘积之和为

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$$

② 第 i 列各元素与第 j 列对应元素的代数余子式乘积之和为

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0$$

[注] 上面各元素是与另一行(或另一列)对应元素的代数余子式乘积 $a_{ik}A_{jk}$ (或 $a_{ki}A_{kj}$)，元素下标与代数余子式下标是不相同的。

4. 范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

[注] 等式右端是所有下标满足 $n \geqslant j > i \geqslant 1$ 因式 $(x_j - x_i)$ 的连乘积。

5. 克莱姆(Cramer)法则

(1) 对 n 个方程 n 个未知量的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若其系数行列式 $D \neq 0$，则该方程组有唯一解，即

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 是将系数行列式中的第 j 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所得到的行列式。

(2) 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$，则该方程组只有零解。

(3) 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D=0$，则该方程组有非零解。

阶梯化训练题

一、基础能力题

1. 计算下列二阶行列式。

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$

2. 计算下列三阶行列式。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

3. 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0$。

4. 求下列排列的逆序数。

(1) 4 1 3 2　　(2) 2 4 1 3

(3) 4 1 2 5 3　　(4) 5 2 3 1 4 6 8 7 9

(5) $n\,(n-1)\cdots 3\,2\,1$　　(6) $1\,3\,5\cdots(2n-1)\ 2\,4\cdots(2n)$

5. 在六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，下列项应取什么符号？

(1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$　　(2) $a_{32}a_{43}a_{54}a_{11}a_{66}a_{25}$

(3) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$　　(4) $a_{51}a_{13}a_{32}a_{44}a_{26}a_{65}$

6．计算下列各行列式。

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ -a & a & a & a \\ -a & -a & a & a \\ -a & -a & -a & a \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$

7. 利用行列式的性质证明下列等式成立。

(1) $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0$

8. 计算下列 n 阶行列式。

(1) $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & n+n-1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & x \end{vmatrix}$

9. 用克莱姆法则解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -5 \\ 6x_1 + 5x_2 = 38 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-3 \\ 5x_1-2x_2+7x_3=22 \\ 2x_1-5x_2+4x_3=4 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_2-3x_3+4x_4=-5 \\ x_1-2x_3+3x_4=-4 \\ 3x_1+2x_2-5x_4=12 \\ 4x_1+3x_2-5x_3=5 \end{cases}$

10. 当λ取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ 3x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$$

只有零解？

11. 当λ取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0 \\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0 \end{cases}$$

有非零解？

二、综合提高题

1. 用行列式定义计算下列行列式。

(1) $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

(2) $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$

(3) $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & b_n \end{vmatrix}$

2. 计算下列行列式。

(1) $D=\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

(2) $D=\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

(3) $D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ $(a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0)$

(4) $D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$ $(a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0)$

(5) $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}$

3. 证明 n 阶行列式成立。

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\ (a\neq b)$$

4. 计算五阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$。

5. 四阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$的值等于(　　)。

A. $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　B. $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

C. $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　D. $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

6. 设$D=\begin{vmatrix} -1 & 5 & 7 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -9 & 6 \\ -3 & 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$，证明$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0$。其中$A_{4j}$ $(j=1,2,3,4)$为行列式D的第4行第j列元素的代数余子式。

7. 设A_{1j} $(j=1,2,3,4)$为行列式$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & b \\ b & b & b & b \\ c & d & a & d \end{vmatrix}$的第 1 行第$j$列元素的代数余子式，证明$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=0$。

8. 已知$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$，若$A_{ij}(i,j=1,2,3,4)$是行列式$D$中第$i$行第$j$列元素的代数余子式，试求：

(1) $A_{12}-A_{22}+A_{32}-A_{42}$；

(2) $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$。

9. 已知$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2-x \\ 1 & x & x+3 & x+6 \end{vmatrix}$，证明$f'(x)=0$有小于1的正根。

10. 证明$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix}=(x_1+x_2+x_3)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(x_i-x_j)$。

11. 设a、b、c、d是不全为0的实数，证明方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \\ bx_1-ax_2+dx_3-cx_4=0 \\ cx_1-dx_2-ax_3+bx_4=0 \\ dx_1+cx_2-bx_3-ax_4=0 \end{cases}$$

只有零解。