

第3章

连续系统的时域分析

- 问题引入：为了分析一个连续 LTI 系统激励与响应的关系，需要对系统模型，即微分方程求解，那么，在时域中如何求解呢？
- 解决思路：①利用“高等数学”中的经典求解方法。②引入算子，简化微分方程求解过程，同时为冲激响应解法提供支持。③用基本信号（冲激信号或阶跃信号）作为输入→求得其解（冲激响应或阶跃响应）→找出其他信号与基本信号的关系→利用线性特性求得其他信号作为激励时的系统响应。
- 研究结果：响应分解、冲激响应、阶跃响应、传输算子。
- 核心内容：求解系统全响应可以分为零输入响应求解和零状态响应求解两部分。

系统分析过程一般可以分为三个阶段（见图 3-1）。

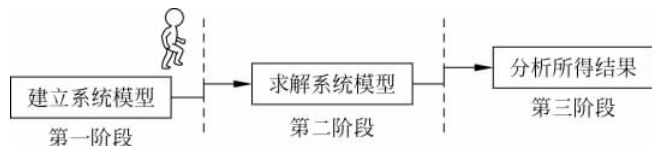


图 3-1 系统分析过程

（1）建立系统模型。写出联系系统输入和输出信号之间的数学表达式。连续系统模型是微分方程，离散系统模型是差分方程。

（2）求解系统模型。采用适当的数学方法分析并求解系统模型，即求解线性微分或差分方程。

（3）分析所得结果。在时域或频域中对所得到的响应（方程解）进行物理解释，深化系统对信号进行变换或处理过程的理解，并从中得出所需的结果或结论。

由于本课程只讨论 LTI 系统，而其数学模型就是 n 阶常系数线性微分（差分）方程，所以，“系统分析”就是建立并求解 n 阶常系数线性微分或差分方程，然后分析所得结果。

对于连续系统，围绕着“解微分方程”这条主线，我们将陆续介绍时域解法、频域解法以及复频域解法。对于离散系统，则是围绕着“解差分方程”主线，有相应的时域解法和 z 域解法。通过本课程的学习我们必须明白，这些系统分析方法都是建立在“信号分解”和“系统线性与时不变”两大基石之上。

本章介绍基于端口的连续系统时域分析方法，讨论系统对激励产生的响应随时间的变化规律，也就是系统的时间特性，或者说，研究系统方程模型在时间域的求解方法。

3.1 微分方程分析法

3.1.1 经典分析法

所谓“微分方程”通常是指含有未知函数导函数的等式。导函数的最大阶数就是微分方程的阶数。

求解微分方程的经典方法在“高等数学”中已经学过,本节简要复习一下。

LTI 系统的数学模型是常系数线性微分方程,而常系数线性微分方程的全解 $y(t)$ 由齐次解 $y_c(t)$ 和特解 $y_p(t)$ 两部分组成,即

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) \quad (3-1)$$

1. 求齐次解

当常系数微分方程

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j f^{(j)}(t) \quad (3-2)$$

即 $a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 f'(t) + b_0 f(t)$ 右端等于零时,方程的解即为齐次解。也就是说,齐次解满足齐次方程

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \quad (3-3)$$

通常,齐次解由形如 $Ce^{\lambda t}$ 的多个函数组合而成。将 $Ce^{\lambda t}$ 代入式(3-3),得

$$a_n C \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1} C \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \cdots + a_1 C \lambda e^{\lambda t} + a_0 C e^{\lambda t} = 0$$

因为 $C \neq 0$, 所以有

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (3-4)$$

式(3-4)被称为微分方程式(3-2)的特征方程。特征方程的 n 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 被称为微分方程的特征根或自然频率(固有频率)。

在特征根无重根的情况下,微分方程的齐次解为

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} = c_n e^{\lambda_n t} + c_{n-1} e^{\lambda_{n-1} t} + \cdots + c_1 e^{\lambda_1 t} \quad (3-5)$$

若特征根有重根,齐次解的形式略有不同。假设 λ_1 是特征方程的 r 重根,即有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r$, 其余 $n-r$ 个根是单根,则微分方程的齐次解为

$$\begin{aligned} y_c(t) &= \sum_{i=1}^r c_i t^{r-i} e^{\lambda_i t} + \sum_{j=r+1}^n c_j e^{\lambda_j t} \\ &= c_1 t^{r-1} e^{\lambda_1 t} + c_2 t^{r-2} e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_r e^{\lambda_r t} + c_{r+1} e^{\lambda_{r+1} t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} \end{aligned} \quad (3-6)$$

2. 求特解

因为特解的形式与激励信号的形式有关,所以,表 3-1 列出了几种典型激励信号 $f(t)$ 及其对应的特解 $y_p(t)$ 。

表 3-1 典型激励信号 $f(t)$ 及其对应的特解 $y_p(t)$

序 号	激励 $f(t)$	特解 $y_p(t)$
1	t^m	$p_m t^m + p_{m-1} t^{m-1} + \cdots + p_0$
2	$e^{\alpha t}$	$p e^{\alpha t}$ (α 不是特征根)
		$\sum_{i=0}^r p_i t^i e^{\alpha t}$ (α 是 r 重特征根)
3	$\cos \beta t$	$p_1 \cos \beta t + p_2 \sin \beta t$
4	$\sin \beta t$	$p_1 \cos \beta t + p_2 \sin \beta t$
5	A (常数)	B (常数)

将表 3-1 中给定的特解 $y_p(t)$ 代入原微分方程, 根据方程两端对应项系数相等的条件, 即可确定特解 $y_p(t)$ 中的待定系数 p 和 B 。

最后, 需要确定齐次解中 n 个待定系数 $c_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 。此时, 只需将系统的 n 个初始条件代入全解中即可确定。那么, 什么是系统的初始条件呢?

与第 2 章中系统起始状态和初始状态的概念相似, 由于“换路”的影响, 系统响应 $y(t)$ 及其各阶导数也有可能在 $t_0=0$ 时刻发生跳变。为区分跳变前后的数值, 用 0_- 表示激励接入或“换路”之前的瞬间, 并称此时刻为“起始时刻”; 而用 0_+ 表示激励接入或“换路”之后的瞬间, 并称此时刻为“初始时刻”。那么, 系统的起始条件就是系统响应及其各阶导函数在 0_- 时刻的函数值, 可用 $\{y^{(i)}(0_-), i=0, 1, \cdots, n-1\}$ 表示; 而系统的初始条件就是系统响应及其各阶导函数在 0_+ 时刻的函数值, 用 $\{y^{(i)}(0_+), i=0, 1, \cdots, n-1\}$ 表示。

通常, 系统响应是指系统接入激励以后的响应, 即在 $0_+ \leq t < \infty$ 区间存在的响应。因此, 应当利用系统的初始条件求齐次解中的各待定系数。

注意: 起始条件和起始状态或初始条件和初始状态是有区别的。系统的状态是指系统储能的情况或数据。因为电系统的储能元件是电感和电容, 系统的储能情况可以由电感的电流和电容的电压反映出来。所以, 电系统的起始状态主要指系统中电感电流和电容电压在起始时刻的值 $i_L(0_-)$ 和 $u_C(0_-)$ 。初始状态主要指系统中电感电流和电容电压在初始时刻的值 $i_L(0_+)$ 和 $u_C(0_+)$ 。

通常, 系统响应不一定是电感的电流或电容的电压, 可能是电阻的端电压或流过电阻的电流或其他参量, 也就是说, 响应及其各阶导数在起始时刻或初始时刻的值 $\{y^{(i)}(0_-), i=0, 1, \cdots, n-1\}$ 或 $\{y^{(i)}(0_+), i=0, 1, \cdots, n-1\}$ 不能用起始状态或初始状态直接表示。但根据初始条件及初始状态的定义, 可知初始状态包含在初始条件之中, 初始状态肯定是初始条件, 初始条件不一定是初始状态, 但初始条件肯定可以根据初始状态求出。类似地, 起始状态包含在起始条件之中, 起始状态肯定是起始条件, 起始条件不一定是起始状态, 但起始条件肯定可以根据起始状态求出。因此, 在电系统中, 初始条件或起始条件通常是指电感电流和电容电压以及其他电路参数或变量 (可能还包含它们的各阶导函数) 在初始时刻或起始时刻的值。

因为“条件”肯定可以根据“状态”求出, 所以我们常把“条件”和“状态”等同起来。又因为系统状态一般不能突变, 即电感电流和电容电压不能突变, 所以起始状态和初始状态相等, 即有 $i_L(0_-) = i_L(0_+)$ 和 $u_C(0_-) = u_C(0_+)$ 。但要注意, 起始条件却不一定与初始条件相等。图 3-2 给出了起始/初始时刻及对应的状态/条件示意图。

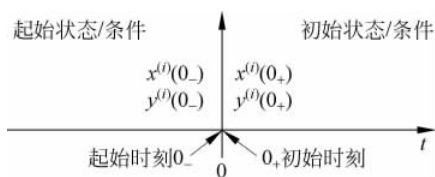


图 3-2 起始/初始时刻及对应的状态/条件示意图

【例题 3-1】 一个线性时不变系统的模型为

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3 \frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = \frac{d}{dt}f(t) + 2f(t)$$

若系统激励 $f(t)=t^2$, 系统初始条件为 $y(0_+)=1, y'(0_+)=1$, 试求系统全解。

【解】 系统的齐次方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3 \frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 0$$

特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

解得特征根为

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

因此, 齐次解为

$$y_c(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

由于 $f(t)=t^2$, 所以, 设特解为

$$y_p(t) = p_2 t^2 + p_1 t + p_0$$

将上式和 $f(t)=t^2$ 代入系统模型, 有

$$2p_2 t^2 + (2p_1 + 6p_2)t + (2p_0 + 3p_1 + 2p_2) = 2t^2 + 2t$$

故有

$$\begin{cases} 2p_2 = 2 \\ 2p_1 + 6p_2 = 2 \\ 2p_0 + 3p_1 + 2p_2 = 0 \end{cases}$$

解得

$$p_2 = 1, \quad p_1 = -2, \quad p_0 = 2$$

这样, 特解为

$$y_p(t) = t^2 - 2t + 2$$

全解为

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + t^2 - 2t + 2$$

将初始条件 $y(0_+)=1, y'(0_+)=1$ 代入上式, 得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 2 = 1 \\ -c_1 - 2c_2 - 2 = 1 \end{cases}$$

解得

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -2$$

因此,全响应 $y(t)$ 为

$$y(t) = e^{-t} - 2e^{-2t} + t^2 - 2t + 2 \quad (t \geq 0)$$

3.1.2 响应分解分析法

常系数线性微分方程的全解(全响应)可分解为齐次解和特解两部分。而根据不同标准,全响应还可以有其他几种分解方法,例如零输入和零状态响应、暂态和稳态响应、自由和强迫响应等。这就为人们提供了除经典解法之外求解系统模型的其他途径,例如下面要讲的零输入-零状态响应分析法,即响应分解分析法。

第2章讲过,一个LTI系统的全响应可以分解为零输入响应和零状态响应两部分。即

$$y(t) = y_x(t) + y_f(t) \quad (3-7)$$

其中

$$y_x(t) = T[x_1(0-), x_2(0-), \dots, x_n(0-), 0] = T[\{x(0-)\}, 0] \quad (3-8)$$

$$y_f(t) = T[0, f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)] = T[0, \{f(t)\}] \quad (3-9)$$

因为系统内部起始状态 $\{x(0-)\}$ 可以等效为 n 个激励源,所以系统的全响应就可以看作是外加激励源 $f(t)$ 以及内部等效激励源 $\{x(0-)\}$ 共同作用的结果。据此,我们就找到了一种新的系统分析方法——响应分解分析法。

所谓响应分解分析法,是指先分别求出系统的零输入响应和零状态响应,然后将二者叠加而获得全响应的一种求解方程的方法。

为了运用响应分解分析法,首先要研究电容和电感在 $[-\infty, t]$ 时间段内 ($t \geq 0$) 的响应 $u_C(t)$ 和 $i_L(t)$ 。

对如图3-3(a)所示电容 C ,设起始电压为 $u_C(0-)$,则其电压响应 $u_C(t)$ 可写为

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0-} i_C(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_{0-}^{0+} i_C(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_{0+}^t i_C(\tau) d\tau \\ &= u_C(0-) + 0 + \frac{1}{C} \int_{0+}^t i_C(\tau) d\tau \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

可见,在 $[-\infty, t]$ 时间范围内,一个起始电压不为零(等于 $u_C(0-)$) 的电容,可等效为一个起

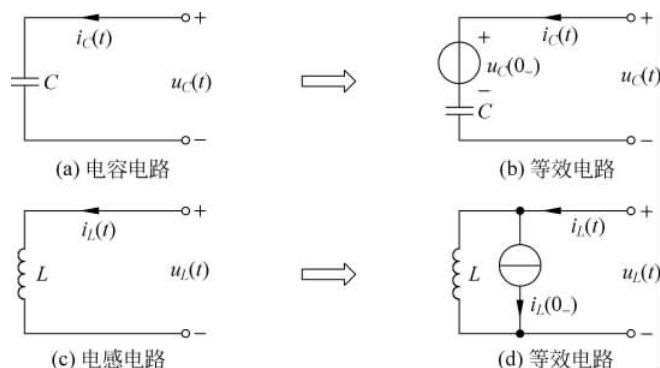


图 3-3 电容、电感电路及其等效电路

始电压为零的电容和一个电压源 $u_C(0_-)$ 的串联,如图 3-3(b)所示。

同样的方法,可以得到对电感电流响应的分析结果。对于起始电流为 $i_L(0_-)$ 电感 L ,如图 3-3(c)所示,有

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{0_-} u_L(\tau) d\tau + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u_L(\tau) d\tau + \frac{1}{L} \int_{0_+}^t u_L(\tau) d\tau \\ &= i_L(0_-) + 0 + \frac{1}{L} \int_{0_+}^t u_L(\tau) d\tau \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

可见,在 $[-\infty, t]$ 时间范围内,一个起始电流不为零(等于 $i_L(0_-)$)的电感 L ,可以等效为一个起始电流为零的电感和一个电流源 $i_L(0_-)$ 的并联,如图 3-3(d)所示。

显然, $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 属于零输入响应,而 $\frac{1}{C} \int_{0_+}^t i_C(\tau) d\tau$ 和 $\frac{1}{L} \int_{0_+}^t u_L(\tau) d\tau$ 则是零状态响应。

基于上述储能元件电容和电感的响应分解概念,下面就可以研究一个 LTI 系统的零输入响应与零状态响应的求解方法。

1. 零输入响应 $y_x(t)$ 的求解方法

令式(3-2)右端为 0,可得

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = 0 \quad (3-10)$$

因为零输入响应是在 $t \geq 0$ 和 $f(t)$ 及其各阶导数为零的条件下,仅由系统的起始状态引起的,所以,零输入响应应该满足式(3-10),与齐次解具有相同的形式,即与式(3-5)或式(3-6)一样。

假定特征根为相异单根,则零输入响应为

$$y_x(t) = \sum_{i=1}^n c_{x_i} e^{\lambda_i t} \quad (t \geq 0) \quad (3-11)$$

式(3-11)中,系数 c_{x_i} ($i=1, 2, \dots, n$) 由零输入响应初始条件 $\{y_x^{(k)}(0_+)\}$ 确定。

根据 LTI 系统的线性概念,系统全响应的初始条件 $y^{(k)}(0_+)$ (即系统的初始条件)应该等于零输入响应初始条件 $y_x^{(k)}(0_+)$ 和零状态响应初始条件 $y_f^{(k)}(0_+)$ 之和,即 $y^{(k)}(0_+) = y_x^{(k)}(0_+) + y_f^{(k)}(0_+)$ 。在零输入条件下,考虑方程在 $-\infty < t < \infty$ 的整个区间内存在,则全响应的起始条件 $y^{(k)}(0_-)$ 实际上就是零输入响应的初始条件 $y_x^{(k)}(0_+)$,此时, $y^{(k)}(0_-) = y_x^{(k)}(0_+) = y_x^{(k)}(0_-)$ 。这说明可由全响应的起始条件 $\{y^{(k)}(0_-)\}$ 确定系数 c_{x_i} 。应该注意,绝对不能用 $y^{(k)}(0_+)$ 确定 c_{x_i} ,因为 $y^{(k)}(0_+)$ 中可能含有激励对系统的作用。

【例题 3-2】 已知一个 LTI 系统微分方程相对应的齐次方程为 $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0$, 系统起始状态 $y(0_-) = 0, y'(0_-) = 2$ 。试求系统零输入响应。

【解】 由系统特征方程

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

得特征根

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 + j \\ \lambda_2 = -1 - j \end{cases}$$

求得零输入响应

$$y_x(t) = c_1 e^{(-1+j)t} + c_2 e^{(-1-j)t}$$

利用欧拉公式,将齐次解化为三角函数形式

$$\begin{aligned} y_x(t) &= c_1 e^{(-1+j)t} + c_2 e^{(-1-j)t} \\ &= e^{-t} (c_1 \cos t + j c_1 \sin t + c_2 \cos t - j c_2 \sin t) \\ &= e^{-t} [(c_1 + c_2) \cos t + j(c_1 - c_2) \sin t] \\ &= e^{-t} (A_1 \cos t + A_2 \sin t) \end{aligned}$$

利用起始状态 $y(0_-) = 0, y'(0_-) = 2$, 可得

$$\begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 2 \end{cases}$$

因此,零输入响应

$$y_x(t) = 2e^{-t} \sin t \quad (t \geq 0)$$

2. 零状态响应 $y_f(t)$ 的求解方法

“零状态”指的是在激励加入系统之前系统没有储能。因此, $t \geq 0$ 时的系统响应只能由 $t \geq 0$ 时所施加的激励信号引起。此时,系统模型为非齐次微分方程。显然,零状态响应应该满足这一非齐次微分方程,即

$$\sum_{i=0}^n a_i y_f^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j f^{(j)}(t) \quad (3-12)$$

要求解式(3-12),还应知道一组初始条件 $\{y_f^{(k)}(0_+)\}$, 即零状态响应的初始条件。需要注意的是: 因为 $\{y_f^{(k)}(0_+)\}$ 与 $t=0$ 时刻加入的激励信号 $f(t)$ 有关, 所以零状态并非意味着 $\{y_f^{(k)}(0_+)\} = 0$ 。其实,在零状态条件下,有 $y_f^{(k)}(0_+) = y^{(k)}(0_+) - y^{(k)}(0_-) = y^{(k)}(0_+)$, 因此, $y_f^{(k)}(0_+)$ 也可称为系统响应的跳变量。

设式(3-12)所表述系统方程的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为相异单根, 那么,零状态响应中的齐次解为

$$y_{f_c}(t) = \sum_{i=1}^n c_{f_i} e^{\lambda_i t} \quad (3-13)$$

由于零状态响应中特解的求解方法同经典法一样, 所以有

$$y_f(t) = y_{f_c}(t) + y_p(t) = \sum_{i=1}^n c_{f_i} e^{\lambda_i t} + y_p(t) \quad (3-14)$$

式(3-13)和式(3-14)中的系数 c_{f_i} 要利用条件 $\{y_f^{(k)}(0_+)\}$ 通过式(3-14)确定。在实际系统分析中,更多的情况是已知 0_- 时刻的起始状态,这就需要通过起始状态来确定 $\{y_f^{(k)}(0_+)\}$ 。一般而言,有两个途径可以解决这个问题: 一是 δ 函数平衡法; 二是利用换路定理等物理概念对电路模型进行分析判断的模型分析法。

δ 函数平衡法的基本原理有如下两条:

(1) 一个描述系统的微分方程要在整个时间范围 $(-\infty, \infty)$ 内都成立。通常,一个函数

在跳变点的导数是不存在的,因此由该函数构成的微分方程不能在 $(-\infty, \infty)$ 时间范围内成立。但冲激函数的引入解决了跳变点导数不存在的问题,即 $\delta(t) = \frac{d\epsilon(t)}{dt}$,从而保证了有跳变的微分方程可以在 $(-\infty, \infty)$ 区间内都成立。

(2) 激励中的冲激信号会导致微分方程右端出现冲激函数项及其各阶导函数项,因此方程左端也应该有对应相等的冲激函数项及其各阶导函数项才能使方程成立。显然,所谓“平衡”,就是使方程左端产生这样一些与右端对应相等的函数项。而这些函数项的产生,意味着 $y^{(k)}(t)$ 中某些函数项在 $t=0$ 处必须有跳变。

简言之,冲激函数平衡法的要点是:

(1) 冲激函数的平衡指的是微分方程两端的 $\delta(t)$ 及其各阶导函数项对应相等。

(2) 若微分方程右端不含冲激函数项,则 $y(t)$ 在 $t=0$ 处不会有跳变。

这里我们主要介绍基于换路定理等物理概念的电路模型分析法。

为确定初始条件,需要利用系统内部储能的连续性,即电容上的电荷连续性和电感中的磁链连续性。设电容的电流 $i_C(t)$ 和电感端电压 $u_L(t)$ 在 $0_- \leq t \leq 0_+$ 区间有界,则有

$$u_C(0_+) - u_C(0_-) = \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_C(t) dt = 0$$

$$i_L(0_-) - i_L(0_+) = \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u_L(t) dt = 0$$

即

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \quad (3-15)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad (3-16)$$

式(3-15)和式(3-16)说明,若电容电流为有限值,则电容电压 $u_C(t)$ 在 $t=0$ 处连续。若电感电压为有限值,则电感电流 $i_L(t)$ 在 $t=0$ 处连续。简言之,电容电压不能跳变,电感电流不能跳变。这个结论被称为“换路定理”。

下面通过一个例题说明如何利用换路定理确定系统的零输入和零状态响应。

【例题 3-3】 如图 3-4(a)所示的电路已处于稳态,当 $t=0$ 时开关 S 快速闭合,求 $t \geq 0_+$ 时 $u_C(t)$ 的零输入响应 $u_{C_x}(t)$ 和零状态响应 $u_{C_f}(t)$ 。

【解】 开关 S 闭合后,系统的等效电路如图 3-4(b)所示。据此可写出等效电路的微分方程。由元件上的电流电压关系及 KCL 可得

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = 0.2 \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$i_R(t) = \frac{u_C(t)}{R} = u_C(t)$$

$$i_L(t) = i_C(t) + i_R(t) = 0.2 \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = 1.25 \frac{d}{dt} \left[0.2 \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) \right] = 0.25 \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + 1.25 \frac{du_C(t)}{dt}$$

再由 KVL 定律可得

$$u_L(t) + u_C(t) = u_S(t) = 2$$

即

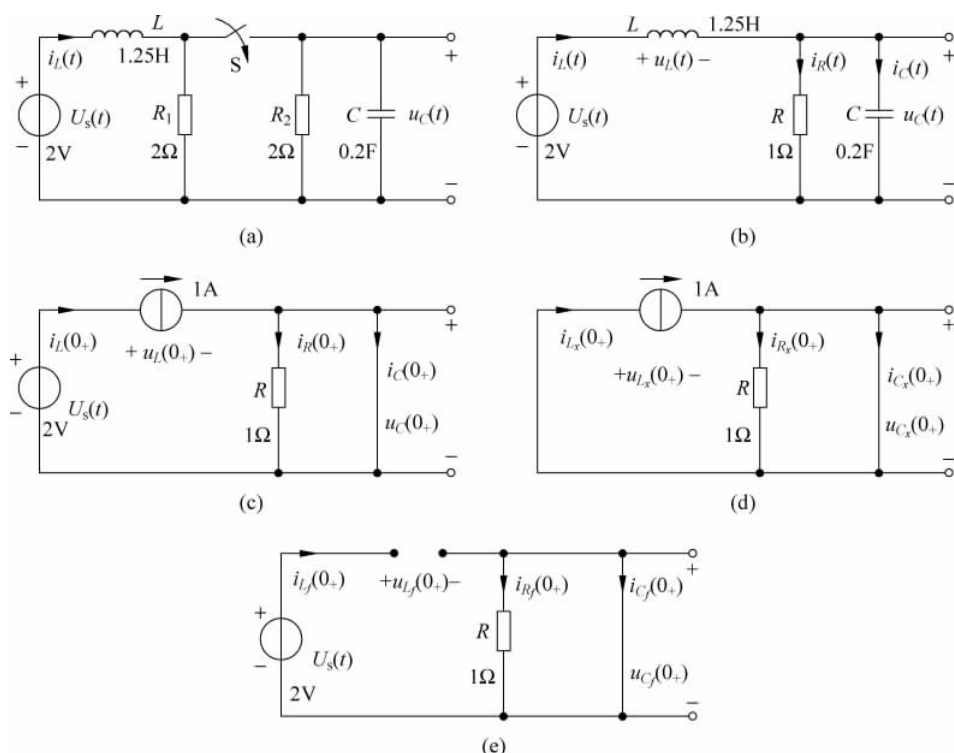


图 3-4 例题 3-3 图

$$0.25 \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + 1.25 \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 2$$

整理后可得

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + 5 \frac{du_C(t)}{dt} + 4u_C(t) = 8$$

由特征方程

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$

得特征根

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -4$$

设零输入响应为

$$u_{C_x}(t) = c_{x_1} e^{-t} + c_{x_2} e^{-4t} \quad (3-17)$$

再设零状态响应齐次解为

$$u_{C_{f_c}}(t) = c_{f_1} e^{-t} + c_{f_2} e^{-4t}$$

容易求得零状态响应特解为

$$u_{C_{f_p}}(t) = 2$$

则零状态响应为

$$u_{C_f}(t) = c_{f_1} e^{-t} + c_{f_2} e^{-4t} + 2 \quad (3-18)$$

为求得系数 c_{x_1} , c_{x_2} , c_{f_1} , c_{f_2} , 需要根据换路定理找出 $u_{C_x}(0_+)$, $u'_{C_x}(0_+)$ 和 $u_{C_f}(0_+)$, $u'_{C_f}(0_+)$ 。由图 3-4(a) 可知该电路为恒定激励, 在 $t=0_-$ 时刻处于稳态, 此时电感可看作短

路,电容看作开路,因此,

$$i_L(0_-) = \frac{u_S}{R_1} = 1\text{A}, \quad u_C(0_-) = 0\text{V}$$

由换路定理可知,在 $t=0_+$ 时刻有

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\text{A}, \quad u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\text{V}$$

$t=0_+$ 时刻等效电路如图 3-4(c) 所示。据此就可画出零输入条件下的等效电路和零状态条件下的等效电路,分别如图 3-4(d)、图 3-4(e) 所示。

由图 3-4(d) 求得 $u_{C_x}(0_+) = 0\text{V}$, $i_{C_x}(0_+) = 1\text{A}$ 。又因为 $i_{C_x}(0_+) = Cu'_{C_x}(0_+)$, 所以, $u'_{C_x}(0_+) = \frac{1}{C}i_{C_x}(0_+) = 5\text{V/s}$ 。即零输入响应的初始条件为

$$\begin{cases} u_{C_x}(0_+) = 0\text{V} \\ u'_{C_x}(0_+) = 5\text{V/s} \end{cases}$$

将初始条件代入式(3-17),得 $c_{x_1} = 5/3$, $c_{x_2} = -5/3$ 。因此,零输入响应为

$$u_{C_x}(t) = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{5}{3}e^{-4t} \quad (t \geq 0)$$

由图 3-4(e) 求得 $u_{C_f}(0_+) = 0\text{V}$, $i_{C_f}(0_+) = 0\text{A}$ 。又因为 $i_{C_f}(0_+) = Cu'_{C_f}(0_+)$, 所以 $u'_{C_f}(0_+) = \frac{1}{C}i_{C_f}(0_+) = 0\text{V/s}$ 。即零状态响应的初始条件为

$$\begin{cases} u_{C_f}(0_+) = 0\text{V} \\ u'_{C_f}(0_+) = 0\text{V/s} \end{cases}$$

将初始条件代入式(3-18),得 $c_{f_1} = -8/3$, $c_{f_2} = 2/3$ 。因此,零状态响应为

$$u_{C_f}(t) = -\frac{8}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} + 2 \quad (t \geq 0)$$

3. 全响应 $y(t)$ 的求解方法

由于零输入响应和零状态响应都已求出,则全响应为

$$y(t) = y_x(t) + y_f(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^n c_{x_i} e^{\lambda_i t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n c_{f_i} e^{\lambda_i t} + y_p(t)}_{\text{零状态响应}} \quad (3-19)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{y_p(t)}_{\text{强迫响应}} \quad (3-20)$$

根据上述两式以及响应的表现特性,可以将全响应表示为以下几种形式:

- (1) 全响应 = 零输入响应 + 零状态响应;
- (2) 全响应 = 自由响应 + 强迫响应;
- (3) 全响应 = 暂态响应 + 稳态响应。

通常,将响应中形如 $ae^{\lambda' t}$ 的指数函数项称为自然型项,则响应中由所有自然型项构成的分量就被称为自然响应或自由响应。可见,自然响应的形式是由系统的特征根决定的。而

自然响应以外的响应分量被称为强迫响应,其形式由激励决定。因此,经典解法中的齐次解就是自然响应,特解就是强迫响应。

由式(3-19)和式(3-20)可以看出:

- (1) 自由响应可以分解为两部分,一部分由起始状态引起,另一部分由激励信号产生。
- (2) 虽然自由响应和零输入响应都是能满足齐次方程的解,但它们的系数却不相同。 c_{x_i} 仅由系统的起始状态决定,而 c_i 要由系统的起始状态和 $t=0$ 时所加的激励共同决定。
- (3) 自由响应包含着零输入响应的全部与零状态响应中的一部分,即零状态响应中的齐次解部分。对于稳定系统,零输入响应必然是自由响应的一部分。

根据响应随时间的变化特性,还可将响应分为暂态响应(过渡响应)和稳态响应。全响应中随着时间的增大而最终衰减为零的部分被称为暂态响应;而随着时间的增大最终变为常数或振荡变化的部分称为稳态响应(一般由阶跃信号或周期信号构成)。通常暂态响应还可能包含强迫响应中的暂态分量。

对于稳定系统,因为特征根(也称为自由频率)均为负值,所有自然项都会随着时间的增大而趋于零,所以自由响应必为暂态响应。对于不稳定系统,特征根会出现复数和正数,显然,由此构成的自然项就不会随着时间的增大而趋于零,则自由响应就不是暂态响应了。

为帮助大家记忆和理解,图 3-5 给出了全响应与上述各子响应之间的关系。

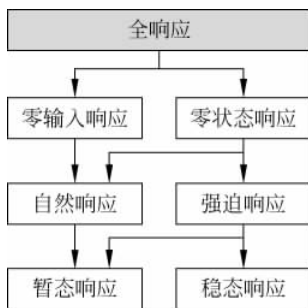


图 3-5 全响应及其构成示意图

注意: 因为零状态响应是零状态系统在 $t=0$ 时刻接入激励后的响应,所以,为了在形式上体现出这一“时间”概念,通常要在零状态响应 $y_f(t)$ 后面乘上 $\epsilon(t)$,或标出 $t \geq 0$ 字样。这里的 $t \geq 0$ 可理解为 $t \geq 0_+$ 。

【例题 3-4】 已知系统输入输出方程为 $y'(t) + 3y(t) = 3\epsilon(t)$, 起始状态 $y(0_-) = \frac{3}{2}$ 。求自由响应、强迫响应和零输入响应、零状态响应。

【解】 首先求自由响应和强迫响应。由特征方程

$$\lambda + 3 = 0$$

得到特征根

$$\lambda = -3$$

则齐次解为

$$y_c(t) = c_1 e^{-3t}$$

设特解 $y_p(t) = A$, 代入系统方程, 得 $A=1$ 。有

$$y_p(t) = 1$$

全解为

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + 1 \quad (3-21)$$

由冲激函数平衡法可知 $y(t)$ 在 $t=0$ 处连续, 即有

$$y(0_-) = y(0_+) = \frac{3}{2}$$

将式(3-21)代入初始条件,得

$$c_1 = \frac{1}{2}$$

由此,系统自由响应和强迫响应分别为

$$y_c(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}$$

$$y_p(t) = 1$$

设零输入响应、零状态响应分别为

$$y_x(t) = c_2 e^{-3t}$$

$$y_f(t) = c_3 e^{-3t} + 1$$

因为 $y_x(0_+) = y(0_-) = \frac{3}{2}$, $y_f(0_+) = y_f(0_-) = 0$, 可分别解得

$$c_2 = \frac{3}{2}, \quad c_3 = -1$$

所以,系统零输入响应和零状态响应分别为

$$y_x(t) = \frac{3}{2}e^{-3t} \quad (t \geq 0)$$

$$y_f(t) = 1 - e^{-3t} \quad (t \geq 0)$$

3.2 冲激响应和阶跃响应

求解系统对任意一个激励的响应是系统分析的终极目标。为了达到这个目的,人们期望找到一种简单、通用的方法,而系统对冲激和阶跃两个基本信号的零状态响应,即冲激响应和阶跃响应,使这个期望成为可能。

3.2.1 冲激响应

系统对单位冲激信号 $\delta(t)$ 产生的零状态响应被称为冲激响应,记为 $h(t)$ 。

把式(2-20)或式(3-2)系统模型中的 $y(t)$ 和 $f(t)$ 分别用 $h(t)$ 和 $\delta(t)$ 代替,则有

$$\sum_{i=0}^n a_i h^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j \delta^{(j)}(t) \quad (3-22)$$

因为冲激信号 $\delta(t)$ 在 $t > 0$ 时为零,所以冲激响应 $h(t)$ 应与微分方程齐次解具有相同的函数形式。假设方程有 n 个互异的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则冲激响应的形式为

$$h(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \epsilon(t) \quad (3-23)$$

将式(3-23)代入式(3-22),可见等式右端含有冲激函数及其各阶导数项,最高阶导数为 $\delta^{(m)}(t)$ 。显然,为保证式(3-22)等号两端所包含各奇异函数平衡,等式左端也应包含 $\delta^{(m)}(t), \delta^{(m-1)}(t), \dots, \delta(t)$ 。由于等式左端的最高阶项为 $h^{(n)}(t)$,所以至少最高阶项 $h^{(n)}(t)$ 应包含 $\delta^{(m)}(t)$ 。可见,冲激响应 $h(t)$ 的形式与 n 和 m 有关。下面通过比较方程两端(激励和响应)最高阶数 m 和 n ,分三种情况讨论 $h(t)$ 的形式。

1. $n > m$

若 $h(t)$ 中有 $\delta(t)$, 则式(3-22)左端 $h^{(n)}(t)$ 中将含有 $\delta^{(n)}(t)$ 项, 但此时方程右端的最高导数项为 $\delta^{(m)}(t)$, 方程两端奇异信号不匹配, 无法获得各项系数。因此, $h(t)$ 中不能包含冲激信号项, 其表达式为

$$h(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \epsilon(t) \quad (3-24)$$

2. $n = m$

如果 $h(t)$ 中包含 $\delta(t)$ 的导数项, 则方程左端的 $\delta(t)$ 的导数阶数将高于右端。因此, 此时的 $h(t)$ 要包含冲激函数项, 而没有其各阶导数项, 即

$$h(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \epsilon(t) + B\delta(t) \quad (3-25)$$

3. $n < m$

此时 $h(t)$ 中不仅包含冲激函数项, 还包含有冲激函数导数项。假设 $n+1=m$, 则

$$h(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \epsilon(t) + A\delta'(t) + B\delta(t) \quad (3-26)$$

此时 $h(t)$ 的形式也是为了代入式(3-22)并使之满足方程两端各奇异函数匹配而构造的。

式(3-24)、式(3-25)和式(3-26)中的各项待定系数 A 、 B 和 c_i 均须代入式(3-22), 利用等号两端各奇异函数项系数对应相等的原则确定。

【例题 3-5】 某二阶连续系统的微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = \frac{d}{dt}f(t) + 2f(t)$$

求该系统的冲激响应 $h(t)$ 。

【解】 令 $f(t) = \delta(t)$ 并考虑零状态条件, 则 $y(t) = h(t)$ 。这样, 有

$$h''(t) + 4h'(t) + 3h(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) \quad (3-27)$$

特征方程为

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

特征根为

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -3$$

因为 $n > m$, 所以, 冲激响应为

$$h(t) = (c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t})\epsilon(t) \quad (3-28)$$

对式(3-28)求导, 得

$$h'(t) = (c_1 + c_2)\delta(t) - (c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{-3t})\epsilon(t) \quad (3-29)$$

$$h''(t) = (c_1 + c_2)\delta'(t) - (c_1 + 3c_2)\delta(t) + (c_1 e^{-t} + 9c_2 e^{-3t})\epsilon(t) \quad (3-30)$$

将式(3-28)、式(3-29)和式(3-30)代入式(3-27), 得

$$(c_1 + c_2)\delta'(t) + (3c_1 + c_2)\delta(t) = \delta'(t) + 2\delta(t)$$

比较等式两端系数可得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 3c_1 + c_2 = 2 \end{cases}$$

解得

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2}$$

则冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t})\epsilon(t)$$

3.2.2 阶跃响应

系统对单位阶跃信号 $\epsilon(t)$ 产生的零状态响应被称为阶跃响应, 记为 $g(t)$ 。

把系统模型中的 $y(t)$ 和 $f(t)$ 分别用 $g(t)$ 和 $\epsilon(t)$ 代替, 即有

$$\sum_{i=0}^n a_i g^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j \epsilon^{(j)}(t) \quad (3-31)$$

因为 $\epsilon(t)$ 的导数为 $\delta(t)$, 所以式(3-31)右端在 $t \geq 0_+$ 时为常数, 即

$$\sum_{i=0}^n a_i g^{(i)}(t) = b_0 \quad (t \geq 0_+) \quad (3-32)$$

显然, 阶跃响应 $g(t)$ 应与非齐次解具有相同的函数形式, 即由齐次解 $g_c(t)$ 和特解 $g_p(t)$ 组成。而特解的形式应为常数, 设为 $B\epsilon(t)$, 代入式(3-32)后可确定 $B = \frac{b_0}{a_0}$, 则特解为

$$g_p(t) = \frac{b_0}{a_0} \epsilon(t) \quad (3-33)$$

假设有 n 个互异的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则齐次解为

$$g_c(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \epsilon(t) \quad (3-34)$$

将式(3-33)和式(3-34)相加可得阶跃响应为

$$g(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \epsilon(t) + \frac{b_0}{a_0} \epsilon(t) \quad (3-35)$$

与冲激响应类似, 在 $t=0$ 时刻, 阶跃响应中也可能包含冲激信号及其各阶导数。

当 $n \geq m$ 时, $g(t)$ 中不包含冲激函数项, 因为式(3-31)方程右端冲激信号 $\delta(t)$ 导数的最高阶数是 $m-1$, 如果 $g(t)$ 中包含冲激函数项, 则方程左端冲激信号 $\delta(t)$ 导数的最高阶数是 n , 显然方程两端奇异函数系数不匹配。此时阶跃响应 $g(t)$ 应为

$$g(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \epsilon(t) + \frac{b_0}{a_0} \epsilon(t) \quad (3-36)$$

当 $n < m$ 时, $g(t)$ 中会包含冲激函数 $\delta(t)$ 及其导数项, 但究竟包含 $\delta(t)$ 几阶导数, 要视 n 小于 m 多少而定。若 $n+1=m$, 则只包含 $\delta(t)$; 若 $n+2=m$, 则包含 $\delta(t)$ 和 $\delta'(t)$, 以此类推。下面给出 $n+1=m$ 时的阶跃响应 $g(t)$:

$$g(t) = A\delta(t) + \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \epsilon(t) + \frac{b_0}{a_0} \epsilon(t) \quad (3-37)$$

式(3-37)中的各项待定系数 A 和 c_i 均须代入原方程式(3-31), 利用等号两端各奇异函数项

的系数对应相等的方法确定。

因为我们讨论的系统是 LTI 系统,且阶跃信号和冲激信号满足微分(积分)关系,所以,阶跃响应和冲激响应也满足微分(积分)关系。即

若

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &\xrightarrow{\text{系统变换}} g(t) \\ \delta(t) &\xrightarrow{\text{系统变换}} h(t)\end{aligned}$$

且因

$$\delta(t) = \frac{d\epsilon(t)}{dt}$$

或者

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

所以,有

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad (3-38)$$

和

$$g(t) - g(-\infty) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (3-39)$$

对于因果系统,因 $g(-\infty)=0$,所以式(3-39)变为

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (3-40)$$

式(3-38)或式(3-40)是线性时不变因果系统的一个重要特性,它揭示了系统两个重要响应之间的关系,对求解线性时不变因果系统有着重要作用。

【例题 3-6】 某线性时不变系统的输入输出方程为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 3f'(t) + f(t)$$

求系统的阶跃响应和冲激响应。

【解】 令 $f(t)=\epsilon(t)$,并考虑零状态条件,则方程可改写为

$$g''(t) + 5g'(t) + 6g(t) = 3\epsilon'(t) + \epsilon(t) \quad (3-41)$$

由特征方程

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

得特征根

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3$$

阶跃响应中的齐次解部分为

$$g_c(t) = (c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t})\epsilon(t)$$

阶跃响应中的特解

$$g_p(t) = \frac{b_0}{a_0}\epsilon(t) = \frac{1}{6}\epsilon(t)$$

又因为 $n>m$,所以,阶跃响应为

$$g(t) = (c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t})\epsilon(t) + \frac{1}{6}\epsilon(t)$$

其一阶导函数为

$$g'(t) = \left(c_1 + c_2 + \frac{1}{6}\right)\delta(t) - 2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t}$$

二阶导函数为

$$g''(t) = \left(c_1 + c_2 + \frac{1}{6}\right)\delta'(t) - (2c_1 + 3c_2)\delta(t) + 4c_1 e^{-2t}\epsilon(t) + 9c_2 e^{-3t}\epsilon(t)$$

将以上三式代入式(3-41),整理得

$$\left(c_1 + c_2 + \frac{1}{6}\right)\delta'(t) + \left(3c_1 + 2c_2 + \frac{5}{6}\right)\delta(t) = 3\delta(t)$$

比较上式两端系数,得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{6} = 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + \frac{5}{6} = 3 \end{cases}$$

解得

$$c_1 = \frac{5}{2}, \quad c_2 = -\frac{8}{3}$$

阶跃响应为

$$g(t) = \left(\frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{8}{3}e^{-3t}\right)\epsilon(t) + \frac{1}{6}\epsilon(t)$$

对 $g(t)$ 求导即得 $h(t)$:

$$h(t) = (8e^{-3t} - 5e^{-2t})\epsilon(t)$$

【例题 3-7】 如图 3-6 所示电路, $i(t)$ 为响应, 试求阶跃响应和冲激响应。

【解】 根据 KCL、KVL 定律, 有

$$\begin{cases} i_1(t) = i(t) + i_c(t) \\ 2i(t) = 2i_c(t) + u_c(t) \\ u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) d\tau \\ 2i_1(t) + 2i(t) = u_s(t) \end{cases}$$

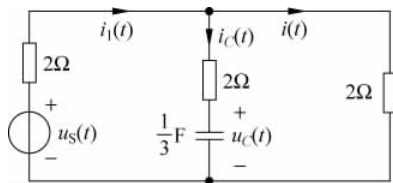


图 3-6 例题 3-7 图

联立以上 4 式, 消去 $i_1(t)$, $u_c(t)$, $i_c(t)$, 并代入元件值, 得微分方程:

$$i'(t) + i(t) = \frac{1}{6}u_s'(t) + \frac{1}{4}u_s(t)$$

设 $u_s(t) = \epsilon(t)$, 系统为零状态, 则有

$$g'(t) + g(t) = \frac{1}{6}\delta(t) + \frac{1}{4}\epsilon(t)$$

根据冲激函数平衡法, 可得初始条件: $g(0_+) = \frac{1}{6}$ 。

解微分方程, 可得阶跃响应:

$$g(t) = \left(ce^{-t} + \frac{1}{4}\right)\epsilon(t)$$

代入初始条件,求得 $c = -\frac{1}{12}$ 。因此,系统阶跃响应为

$$g(t) = \left(-\frac{1}{12}e^{-t} + \frac{1}{4}\right)\varepsilon(t)$$

对阶跃响应求导,得

$$h(t) = \frac{1}{12}e^{-t}\varepsilon(t) + \frac{1}{6}\delta(t)$$

3.3 算子分析法

3.3.1 微分算子与传输算子

为了便于在时域中求解微分方程,我们引入一个新概念——微分算子。所谓微分算子,实际上就是微分运算的简化符号,用小写字母 p 表示,即

$$p = \frac{d}{dt} \quad (3-42)$$

或

$$\frac{1}{p} = \int_{-\infty}^t (\quad) dt \quad (3-43)$$

于是,有

$$px = \frac{dx}{dt}, \quad p^n x = \frac{d^n x}{dt^n}$$

和

$$\frac{1}{p}x = \int_{-\infty}^t x dt$$

同时,还有

$$p \frac{1}{p}x = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t x dt = x$$

即

$$p \frac{1}{p}x = x \quad (3-44)$$

式(3-44)表明,对函数先积分再微分,函数保持不变。从表达式上看,两个 p 能够像变量一样约掉。需要提醒的是,若对函数先微分再积分,即有

$$\frac{1}{p}px = \int_{-\infty}^t \frac{dx}{d\tau} d\tau = x(t) - x(-\infty)$$

可见

$$\frac{1}{p}px \neq x$$

说明此时两个 p 不能够像变量一样约掉,除非 $x(-\infty)=0$ 。

利用微分算子就可以将 LTI 系统模型——常系数线性微分方程

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t)$$

简化为

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0) y(t) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0) f(t) \quad (3-45)$$

显然,微分算子的引入可以将微分方程变成“算子方程”或“伪代数方程”进行求解。之所以称为“伪代数方程”,是因为“算子方程”虽然有代数方程的形和代数方程的部分特性,但还不完全等同于代数方程。因此,还需要了解有关算子的几个运算特性。

特性 1: p 的正幂次多项式可以像代数多项式那样进行展开和因式分解。

特性 2: 一个信号前面的两个 p 多项式可以交换顺序。例如

$$(p+1)(p^2+2p+3)f(t) = (p^2+2p+3)(p+1)f(t)$$

特性 3: 算子方程两边的 p 公因式不能随便消去。例如 $py(t) = pf(t)$ 通常不能轻易变成 $y(t) = f(t)$, 而应该是 $y(t) = f(t) + c$, c 为一常数。

特性 4: 对一个信号进行乘和除运算的顺序不能随意改变。

结论: 以微分算子形式出现的微分方程组可以用代数方程中的克莱梅尔(Cramer)法则消去变量, 这就是引入微分算子的一个主要目的。也就是说, 引入微分算子可以将求解过程相对复杂的微分方程(组)化为求解过程相对简单的代数方程(组)。

整理式(3-45), 得

$$y(t) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} f(t) = \frac{N(p)}{D(p)} f(t) \quad (3-46)$$

其中

$$N(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0 \quad (3-47)$$

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 \quad (3-48)$$

$D(p)$ 称为微分方程(系统)的特征多项式。 $D(p) = 0$ 即为特征方程。由此可以引出另一个重要概念——传输算子。

把算子方程中的响应 $y(t)$ 与激励 $f(t)$ 之比定义为系统的传输算子, 用 $H(p)$ 表示为

$$H(p) = \frac{y(t)}{f(t)} = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (3-49)$$

构造 $H(p)$ 的意义在于能够把系统模型中与输入、输出无关但能直接体现系统本身特性的内容提取出来, 便于对系统进行分析和研究, 而这个结果正是系统线性特性的具体体现。

由式(3-49)可得

$$y(t) = H(p) f(t) \quad (3-50)$$

可见, 输入信号 $f(t)$ 好像是被 $H(p)$ 从系统的输入端“传输”到输出端, 传输算子的名字由此而来。这样, 只要知道系统的传输算子 $H(p)$, 也就确定了系统模型。根据 $H(p)$ 可以求出任何输入信号 $f(t)$ 下的系统响应 $y(t)$ 。另外, $H(p)$ 与后面要介绍的系统函数 $H(j\omega)$ 或 $H(s)$ 结构相同, 即 $H(s) = H(p) \big|_{p=s}$, $H(j\omega) = H(p) \big|_{p=j\omega}$, 这也为寻找系统函数提供了另一种方法。

【例题 3-8】 求例题 2-7 系统的传输算子。

【解】 已知例题 2-7 系统的数学模型为

$$\frac{d^3 u}{dt^3} + 2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 2 \frac{du}{dt} + u = \frac{1}{2} u_s$$

将算子代入上式可得算子方程

$$(p^3 + 2p^2 + 2p + 1)u = \frac{1}{2}u_s$$

则传输算子为

$$H(p) = \frac{1}{2(p^3 + 2p^2 + 2p + 1)}$$

【例题 3-9】 如图 3-7 所示系统,若 $i_2(t)$ 为响应, $f(t)$ 为激励,求系统模型和传输算子。

【解】 根据 KVL 列出回路方程组

$$\begin{cases} i_1 + 3 \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt} = f \\ 3i_2 + \frac{di_2}{dt} - \frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$$

变为算子方程组:

$$\begin{cases} (3p + 1)i_1 - pi_2 = f \\ -pi_1 + (p + 3)i_2 = 0 \end{cases}$$

下面,采用克莱梅尔法则对算子方程组进行消元:

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3p+1 & f \\ -p & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3p+1 & -p \\ -p & p+3 \end{vmatrix}} = \frac{p}{2p^2 + 10p + 3}f$$

即

$$(2p^2 + 10p + 3)i_2 = pf$$

于是,系统模型为

$$2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + 10 \frac{di_2}{dt} + 3i_2 = \frac{df}{dt}$$

传输算子为

$$H(p) = \frac{p}{2p^2 + 10p + 3}$$

【例题 3-10】 已知系统的传输算子和初始条件:

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 5}, \quad y_x(0_+) = 1, \quad y'_x(0_+) = 1$$

求系统的零输入响应。

【解】 由系统的特征方程

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

得特征根

$$\lambda_1 = -1 + 2j, \quad \lambda_2 = -1 - 2j$$

则零输入响应为

$$y_x(t) = e^{-t}[A_1 \cos(2t) + A_2 \sin(2t)]$$

同时,有

$$y'_x(t) = -e^{-t}[A_1 \cos(2t) + A_2 \sin(2t)] + e^{-t}[-2A_1 \sin(2t) + 2A_2 \cos(2t)]$$

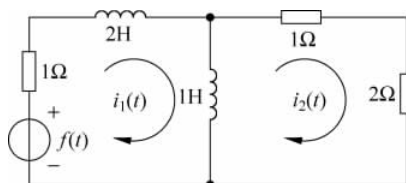


图 3-7 例题 3-9 图

将初始条件 $y_x(0_+) = 1, y'_x(0_+) = 1$ 代入,得

$$A_1 = A_2 = 1$$

则零输入响应为

$$y_x(t) = e^{-t}[\cos(2t) + \sin(2t)] = \sqrt{2}e^{-t}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (t \geq 0)$$

根据上述例题可以得到传输算子的两种常用求解方法:

- (1) 利用系统模型——微分方程(模拟框图)。
- (2) 利用电路约束条件。

引入传输算子的另一个主要目的是为了求解零状态响应。不同的传输算子对应不同的冲激响应,通过数学推导可以得到很多相应的公式。

3.3.2 利用传输算子求得冲激响应

由式(3-49)定义的传输算子可以进行部分分式分解,即有

$$H(p) = \sum_{i=0}^q K_i p^i + \sum_{j=1}^l \frac{K_j}{(p - \lambda_j)^{r_j}} \quad (3-51)$$

根据式(3-51)的不同情况,可以得到与之对应的不同的冲激响应 $h(t)$ 。即有

$$(1) H(p) = \frac{K}{p - \lambda} \rightarrow h(t) = K e^{\lambda t} \epsilon(t); \quad (3-52)$$

$$(2) H(p) = \frac{K}{(p - \lambda)^2} \rightarrow h(t) = K t e^{\lambda t} \epsilon(t); \quad (3-53)$$

$$(3) H(p) = \frac{K}{(p - \lambda)^r} \rightarrow h(t) = \frac{K}{(r-1)!} t^{r-1} e^{\lambda t} \epsilon(t); \quad (3-54)$$

$$(4) H(p) = K p^n \rightarrow h(t) = K \delta^{(n)}(t). \quad (3-55)$$

这样,就可得到利用传输算子求解冲激响应的一般步骤:

第一步:确定传输算子 $H(p)$ 。

第二步:将 $H(p)$ 进行部分分式展开,如式(3-51)。

第三步:根据式(3-52)~式(3-55),确定各分式对应的冲激响应 $h_i(t)$ 。

第四步:将所有的 $h_i(t)$ 相加,即可得到系统的冲激响应 $h(t)$ 。

【例题 3-11】 求系统 $y^{(3)} + 5y^{(2)} + 8y^{(1)} + 4y = f^{(3)} + 6f^{(2)} + 10f^{(1)} + 6f$ 的 $h(t)$ 。

【解】 系统的算子方程为

$$(p^3 + 5p^2 + 8p + 4)y = (p^3 + 6p^2 + 10p + 6)f$$

利用长除法有

$$H(p) = \frac{p^3 + 6p^2 + 10p + 6}{p^3 + 5p^2 + 8p + 4} = 1 + \frac{1}{p+1} - \frac{2}{(p+2)^2}$$

利用式(3-52)~式(3-55),得

$$h(t) = \delta(t) + e^{-t}\epsilon(t) - 2te^{-2t}\epsilon(t) = \delta(t) + (e^{-t} - 2te^{-2t})\epsilon(t)$$

因为传输算子在形式上和后面要讲到的传输函数(系统函数)一样,其求解零状态响应的方法和公式也与传输函数求解法相似,所以本节不再赘述。

3.4 卷积分析法

读者可能会问：引入冲激响应的目的何在？它仅仅是系统对特定信号——冲激信号的零状态响应，且求解过程也比较复杂，对分析任意非周期信号作用下的系统零状态响应有何意义？其实，冲激响应引入的目的恰恰是要解决任意非周期信号作用下系统零状态响应的求解问题（而它本身的求解也会有更方便、更简单的方法），例如下面介绍的卷积分析法。

如图 3-8(a)、图 3-8(b)所示的信号 $f_1(t)$, $p(t)$ 的关系可用下式表示：

$$f_1(t) = A \cdot \Delta \cdot p(t) \quad (3-56)$$

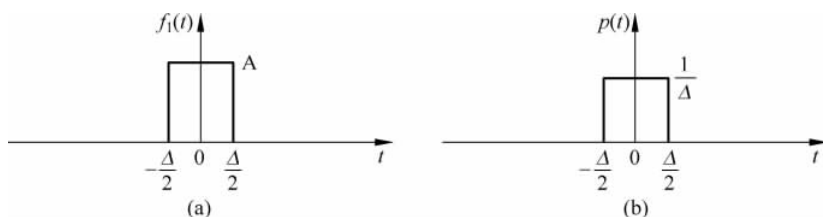


图 3-8 信号 $f_1(t)$ 与信号 $p(t)$ 的关系

现在研究任意信号 $f(t)$ 与 $p(t)$ 之间的关系。由图 3-9 可知， $\tilde{f}(t)$ 可以看作是 $f(t)$ 的近似信号，由若干矩形脉冲相加得到，其中每个脉冲均可用 $p(t)$ 表示。

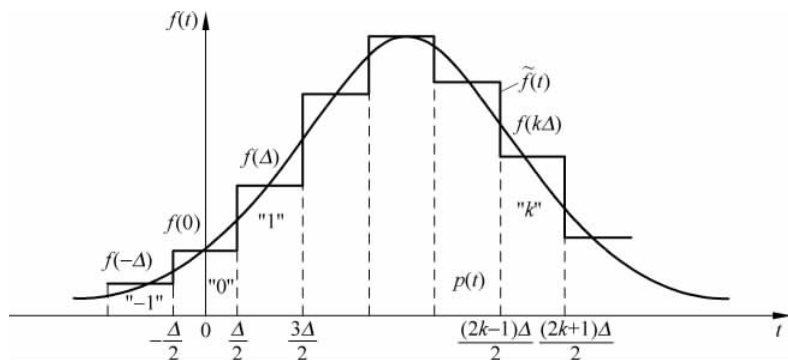


图 3-9 任意信号 $f(t)$ 与信号 $p(t)$ 的关系

0 号脉冲高度为 $f(0)$ ，脉冲持续区间 $-\frac{\Delta}{2} \sim \frac{\Delta}{2}$ ，用 $p(t)$ 表示为 $f(0)\Delta p(t)$ ；

1 号脉冲高度为 $f(\Delta)$ ，脉冲持续区间 $\frac{\Delta}{2} \sim \frac{3\Delta}{2}$ ，用 $p(t)$ 表示为 $f(\Delta)\Delta p(t-\Delta)$ 。以此类推，有

k 号脉冲高度为 $f(k\Delta)$ ，脉冲持续区间 $\frac{(2k-1)\Delta}{2} \sim \frac{(2k+1)\Delta}{2}$ ，用 $p(t)$ 表示为 $f(k\Delta)\Delta p(t-k\Delta)$ 。这样，就有

$$f(t) \cong \tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta)\Delta p(t-k\Delta) \quad (k \text{ 为整数})$$

若 $p(t)$ 作用下的零状态响应记为 $x(t)$, 则根据线性和时不变特性, 一个 LTI 系统在信号 $f(t)$ 激励下的零状态响应 $y_f(t)$ 应近似为

$$y_f(t) \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta)\Delta x(t-k\Delta) \quad (k \text{ 为整数})$$

当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, Δ 记作 $d\tau$, $k\Delta$ 记作 τ , $p(t-k\Delta)$ 记作 $\delta(t-\tau)$ 。同时, 求和符号改写为积分符号, 则

$$f(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta)\Delta p(t-k\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad (3-57)$$

$$y_f(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta)\Delta x(t-k\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (3-58)$$

式(3-57)表明, 任意信号 $f(t)$ 可分解为无数个位于不同时刻且不同强度的冲激信号的连续和。而式(3-58)表明, 系统的零状态响应 $y_f(t)$ 也可看作是无数个冲激响应的连续和。显然, 根据卷积定义, 系统的零状态响应 $y_f(t)$ 等于激励 $f(t)$ 与冲激响应 $h(t)$ 的卷积积分, 即式(3-58)可以被写为

$$y_f(t) = f(t) * h(t) \quad (3-59)$$

上述推导过程可以用图 3-10 描述。

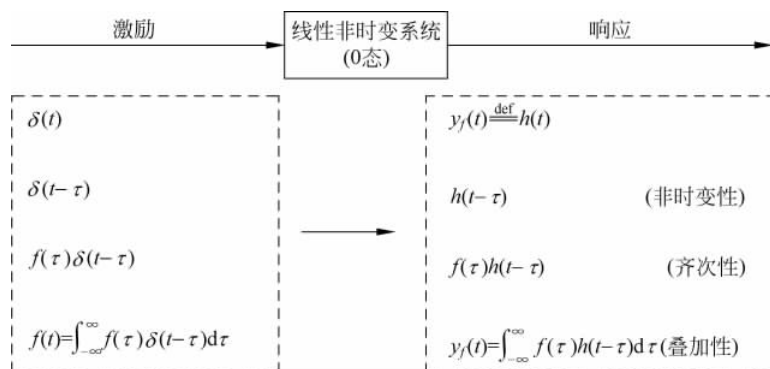


图 3-10 零状态响应与冲激响应的关系推导过程示意图

信号 $f(t)$ 除了可被分解为冲激信号的连续和外, 还可以被分解为阶跃信号的连续和, 即有

$$f(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(k\Delta) - f((k-1)\Delta)}{\Delta} \cdot \epsilon(t-k\Delta) \cdot \Delta \quad (3-60)$$

在 $\Delta \rightarrow 0$ 的条件下, 式(3-60)可演变为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(\tau)}{d\tau} \epsilon(t-\tau) d\tau \quad (3-61)$$

式(3-61)表明, 任意一个信号 $f(t)$ 可以表示为无穷个阶跃信号的连续和(积分)。该式又被称为杜阿美尔积分。

因为冲激信号与阶跃信号的关系, 系统的零状态响应 $y_f(t)$ 也可表示为

$$y_f(t) = f(t) * h(t) = f'(t) * \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = f'(t) * g(t)$$

可见,当已知系统单位阶跃响应求零状态响应时,可直接按

$$y_f(t) = f'(t) * g(t) \quad (3-62)$$

进行计算。该式也可以通过类似图 3-10 的过程推导出来。

综上所述,式(3-59)就是信号分解特性和系统线性与时不变特性对系统分析做出的最大贡献,为求解系统零状态响应提供了一条新路径,而这也正是引入卷积运算的主要目的。

【例题 3-12】 一个线性非时变系统的冲激响应为 $h(t) = e^{at}\epsilon(t)$, 系统的激励为 $f(t) = \epsilon(t-1)$, 试求系统的零状态响应。

$$\begin{aligned} \text{【解】 } y_f(t) &= f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\tau-1)e^{a(t-\tau)}\epsilon(t-\tau)d\tau \\ &= \int_1^t e^{a(t-\tau)}d\tau = e^{at} \int_1^t e^{-a\tau}d\tau = e^{at} \left(-\frac{1}{a} \right) e^{-a\tau} \Big|_1^t = \frac{1}{a} e^{at} (e^{-a} - e^{-at}) \\ &= \frac{1}{a} [e^{a(t-1)} - 1] \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

【例题 3-13】 已知某系统的激励信号 $f(t)$ 、冲激响应 $h(t)$ 之图形分别如图 3-11(a)、图 3-11(b)所示。求系统的零状态响应 $y_f(t)$, 并画出 $y_f(t)$ 的图形。

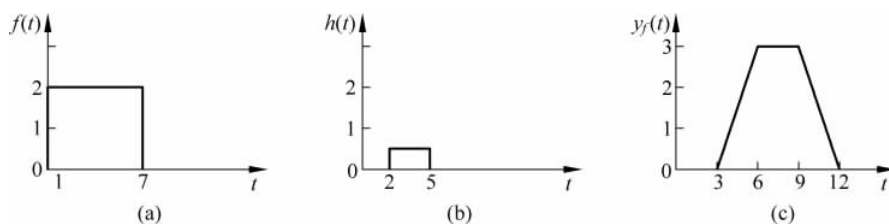


图 3-11 例题 3-13 图

【解】 激励信号和冲激响应可分别表示为

$$f(t) = 2\epsilon(t-1) - 2\epsilon(t-7), \quad h(t) = \frac{1}{2}\epsilon(t-2) - \frac{1}{2}\epsilon(t-5)$$

则有

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\delta(t-1) - 2\delta(t-7) \\ \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau &= \int_{-\infty}^t \frac{1}{2}[\epsilon(\tau-2) - \epsilon(\tau-5)]d\tau \\ &= \frac{1}{2}(t-2)\epsilon(t-2) - \frac{1}{2}(t-5)\epsilon(t-5) \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} y_f(t) &= f(t) * h(t) = f'(t) * \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau \\ &= [2\delta(t-1) - 2\delta(t-7)] * \left[\frac{1}{2}(t-2)\epsilon(t-2) - \frac{1}{2}(t-5)\epsilon(t-5) \right] \\ &= (t-3)\epsilon(t-3) - (t-6)\epsilon(t-6) - (t-9)\epsilon(t-9) + (t-12)\epsilon(t-12) \end{aligned}$$

写成分段函数表示形式

$$y_f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq 3) \\ t-3 & (3 < t \leq 6) \\ 3 & (6 < t \leq 9) \\ 12-t & (9 < t \leq 12) \\ 0 & (t > 12) \end{cases}$$

其波形如图 3-11(c) 所示。

可以用一个生活实例帮助读者了解卷积分析法的应用。某工程师根据实践经验,设计了一个信号变换器(LTI 系统)。由于理论水平不高,他只能采用逐个测试法,即输入一个信号,测试出输出信号,再输入另一个信号,再测试出其对应输出信号的方法了解该系统的变换特性。但现实中的信号有千千万万种,他一辈子也测不完。为此,他请教了某理工大学的张教授。张教授告诉他:你只需测试一种信号即可,也就是说,只要测出系统对窄脉冲信号(冲激信号)的输出波形(冲激响应)即可,其他所有信号对应的输出波形都可通过冲激响应波形和输入信号波形的卷积得到。该工程师高兴地说:您可帮了我大忙了。

3.5 系统动态性、可逆性及因果性的判断

我们说过,冲激响应可以描述或代表一个 LTI 系统,因此,对于 LTI 系统的一些特性可以通过冲激响应进行描述和判断。

3.5.1 动态性判断

对于一个连续系统,若其冲激响应 $h(t)$ 满足

$$h(t) = K\delta(t) \quad (3-63)$$

时,该系统的响应 $y(t)$ 与激励 $f(t)$ 就满足

$$y(t) = Kf(t) \quad (3-64)$$

显然,该系统是一个静态(无记忆)系统。式(3-63)就是系统动态与否的判断条件。若系数 $K > 1$,系统就是一个理想放大器;若 $0 < K < 1$,系统就是一个理想衰减器。

【例题 3-14】 证明一个 LTI 系统是无记忆系统的条件是 $h(t) = K\delta(t)$ 。

【证】 设一个 LTI 系统的激励为 $f(t)$,由该激励产生的响应为 $y(t)$,则在 $t = t_0$ 时刻有

$$y(t_0) = f(t) * h(t) \big|_{t=t_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t_0 - \tau)d\tau \quad (3-65)$$

根据冲激信号的抽样特性,有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \quad (3-66)$$

因为 $\delta(t)$ 为偶信号,式(3-66)可变为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t_0 - t)dt = f(t_0) \quad (3-67)$$

比较式(3-65)和式(3-67)可见,若

$$h(t) = K\delta(t) \quad (3-68)$$

其中, K 为正或负常数,则有

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) K \delta(t_0 - \tau) d\tau = K f(t_0)$$

即系统满足当前响应只决定于当前激励的条件,是无记忆系统。证毕。

3.5.2 可逆性判断

若一个系统的冲激响应为 $h(t)$, 另一个系统的冲激响应为 $h_i(t)$, 则当

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t) \quad (3-69)$$

时, 冲激响应为 $h(t)$ 的系统就是可逆系统, 即原系统; 冲激响应为 $h_i(t)$ 的系统就是原系统的逆系统。

3.5.3 因果性判断

若一个连续系统的冲激响应为 $h(t)$ 满足

$$h(t) = 0 \quad (t < 0) \quad (3-70)$$

则该系统就是一个因果系统。或者说, 冲激响应为因果信号的系统就是因果系统。

3.6 学习提示

时域响应通常是系统分析的最终结果, 提示读者关注以下知识点:

- (1) 算子的引入可以把微分方程转化为伪代数方程, 从而简化了微分方程的求解过程。
- (2) 传输算子能够直接反映系统本身的结构和特性。
- (3) 冲激响应是时域分析法的第一要素或灵魂。
- (4) 冲激响应和传输算子均与系统的激励和响应无关, 只与系统本身参数和结构有关。
- (5) 零状态响应可以通过激励与冲激响应的卷积运算得到, 其本质是激励 $f(t)$ 可以变为冲激信号 $\delta(t)$ 的连续和, 而零状态响应 $y_f(t)$ 可表示为冲激响应 $h(t)$ 的连续和。

习题 3

3-1 描述某 LTI 系统的微分方程为 $y'(t) + 3y(t) = f(t)$, 已知 $y(0_+) = \frac{3}{2}$, $f(t) = 3\epsilon(t)$, 求系统的自由响应和强迫响应。

3-2 已知一个 LTI 系统的微分方程为 $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 2f'(t) + 8f(t)$, 求当 $f(t) = e^{-t}$, $y(0_+) = 3$, $y'(0_+) = 4$ 时的全响应, 并指出其中的自由响应和强迫响应。

3-3 已知系统微分方程 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$, 试求激励和起始条件分别为以下情况时的系统自由响应和强迫响应。

(1) $f(t) = \epsilon(t)$, $y(0_-) = 1$, $y'(0_-) = 2$;

(2) $f(t) = e^{-2t}\epsilon(t)$, $y(0_-) = 1$, $y'(0_-) = 2$ 。

3-4 已知一个 LTI 系统的微分方程为 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f'(t) + 3f(t)$, 若 $f(t) =$

$\epsilon(t)$, $y(0_-)=1$, $y'(0_-)=2$, 求系统的全响应, 并指出自由响应、强迫响应和零输入响应、零状态响应。

3-5 某系统的微分方程为 $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=2f'(t)+4f(t)$, 已知 $y(0_-)=2$, $y'(0_-)=-2$, 求系统的零输入响应 $y_x(t)$ 。

3-6 已知系统的微分方程为 $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f(t)$, 若系统起始条件为 $y(0_-)=1$, $y'(0_-)=2$, 求系统的零输入响应 $y_x(t)$ 。

3-7 一个系统的微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f'(t)+5f(t)$, 已知 $f(t)=e^{-3t}\epsilon(t)$, $y_f(0_+)=1$, $y'_f(0_+)=2$, 求系统的零状态响应 $y_f(t)$ 。

3-8 如图 3-12 所示电路, $t<0$ 时开关位于位置 1 且已处于稳态; $t=0$ 时开关自位置 1 转至位置 2。

(1) 求 $u_C(0_+)$, $i(0_+)$ 的取值。

(2) 求 $u_C(t)$ 的完全响应, 并指出自由响应、强迫响应、零输入响应和零状态响应。

3-9 如图 3-13 所示电路, 已知 $L=2\text{H}$, $C=\frac{1}{4}\text{F}$, $R_1=1\Omega$, $R_2=5\Omega$; 电容上起始电压 $u_C(0_-)=3\text{V}$, 电感上起始电流 $i_L(0_-)=1\text{A}$; 激励电流源 $i_S(t)=\epsilon(t)$ 。求电感电流 $i_L(t)$ 的零输入响应 $i_{L_x}(t)$ 和零状态响应 $i_{L_f}(t)$ 。

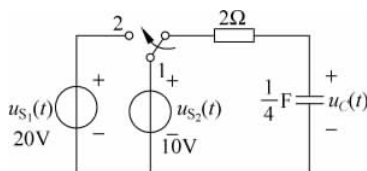


图 3-12 习题 3-8 图

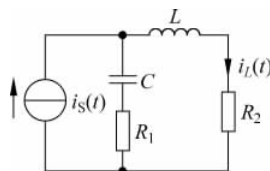


图 3-13 习题 3-9 图

3-10 如图 3-14 所示电路, 分别求电路中 $i(t)$, $u(t)$ 对激励源 $f(t)$ 的传输算子。

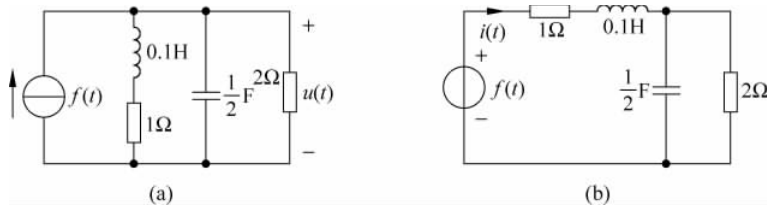


图 3-14 习题 3-10 图

3-11 已知系统的传输算子 $H(p)$ 及 0_+ 时刻的状态或条件, 求零输入响应。

(1) $H(p)=\frac{p+3}{p^2+3p+2}$, $y_x(0_+)=1$, $y'_x(0_+)=2$;

(2) $H(p)=\frac{p+3}{p^2+2p+2}$, $y_x(0_+)=1$, $y'_x(0_+)=2$;

(3) $H(p)=\frac{3p+1}{p(p+1)^2}$, $y_x(0_+)=y'_x(0_+)=0$, $y''_x(0_+)=1$ 。

3-12 一个 LTI 系统对输入 $f(t)=2e^{-3t}\epsilon(t)$ 的零状态响应为 $y_f(t)$, 对 $f'(t)$ 的零状态响应为 $y_{f_d}(t)=-3y_f(t)+e^{-2t}\epsilon(t)$, 求系统的冲激响应 $h(t)$ 。

3-13 一个 LTI 系统对输入 $f(t)$ 的零状态响应为 $y_f(t) = \int_{t-\tau}^{\infty} e^{t-\tau} f(\tau-1) d\tau$, 求系统的冲激响应 $h(t)$ 。

3-14 一个 LTI 系统的一对激励和零状态响应的波形如图 3-15 所示。求该系统对另一个激励 $f_1(t) = \sin(\pi t)[\epsilon(t) - \epsilon(t-1)]$ 的零状态响应 $y_{f_1}(t)$ 。

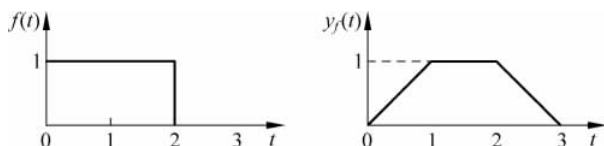


图 3-15 习题 3-14 图

3-15 通信中的匹配滤波器的冲激响应与激励满足关系 $h(t) = f(T-t)$, 其中 T 为 $f(t)$ 的持续时间。若 $f(t) = \epsilon(t) - \epsilon(t-T)$, 求匹配滤波器的零状态响应 $y_f(t)$ 。

3-16 已知某 LTI 系统的单位阶跃响应 $g(t) = (2e^{-2t} - 1)\epsilon(t)$, 利用卷积特性求在如图 3-16 所示各激励信号下的零状态响应。

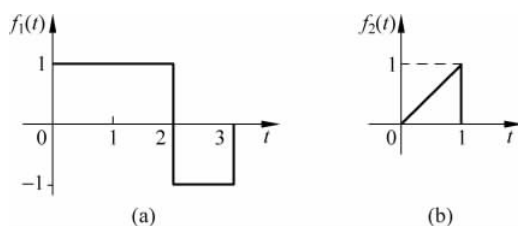


图 3-16 习题 3-16 图

3-17 如图 3-17 所示系统由几个子系统组合而成, 各子系统的冲激响应分别为 $h_1(t) = \epsilon(t)$ (积分器), $h_2(t) = \delta(t-1)$ (单位延时器), $h_3(t) = -\delta(t)$ (倒相器), $h_4(t) = 3\delta(t)$ (三倍乘器)。试求总系统的冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$, 并画出它们的波形。

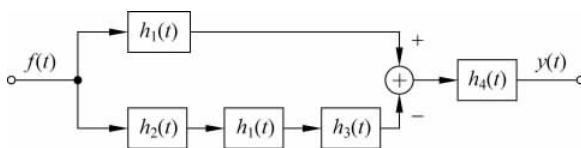


图 3-17 习题 3-17 图

3-18 如图 3-18 所示系统由几个子系统组成, 各子系统的冲激响应分别为 $h_a(t) = \delta(t-1)$, $h_b(t) = \epsilon(t) - \epsilon(t-3)$ 。试求总系统的冲激响应 $h(t)$ 。

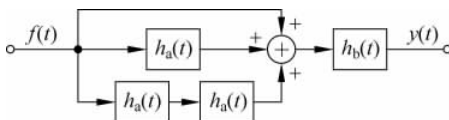


图 3-18 习题 3-18 图

3-19 如图 3-19 所示电路, $i_s(t)$ 为输入, $u_L(t)$ 为输出, 求阶跃响应 $g(t)$ 和冲激响应 $h(t)$ 。

3-20 如图 3-20 所示电路, $f(t)$ 为输入, $u_C(t)$ 为输出, 求冲激响应 $h(t)$ 。

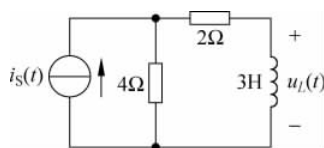


图 3-19 习题 3-19 图

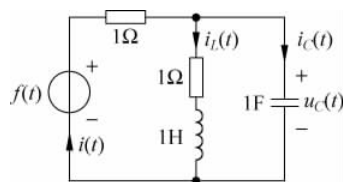


图 3-20 习题 3-20 图