第 3 章

CHAPTER 3

电路分析方法之二——电路方程法

本章提要

本章讨论电路分析的一般方法——电路方程法。这类方法是在选取合适的电路变量后,依据基尔霍夫定律和元件特性列写电路方程(组)求解电路。本章的主要内容有:典型支路及其特性方程、$2b$ 变量分析法、支路电流分析法、节点电压分析法、回路电流分析法等。本章所介绍的电路方程法,不仅适用于线性电阻仅电路分析,也可容易地推广应用于含动态元件电路的正弦稳态分析和暂态分析。

3.1 概述

等效变换法对于较简单电路的求解是一种行之有效的方法,但这类方法具有一定的局限性。本章所介绍的电路方程法是一类普遍适用的方法,也称为网络一般分析法,它既能用于具有任意结构形式的复杂电路的求解,也能借助网络图论的知识用于计算机对电路的计算、分析。

电路方程法是在选取合适的电路变量后建立并求解电路方程从而获得电路响应的方法。这一方法的关键是如何建立选取了特定变量的网络方程,因此本章的学习重点集中于讨论如何建立电路方程的方法上面。通过对电路的直接观察建立电路方程称为视察法,应用网络图论的知识采用系统的方法建立矩阵形式的方程称为系统法。由于系统法主要用于计算机辅助电路分析和设计,因此本书只介绍常用的视察法,而系统法可在相关后续课程中学习。本章的最后一节将简要介绍网络图论的一些基础知识。

任何电路分析方法的基本依据都是电路的两类基本约束,即基尔霍夫定律和电路元件特性(元件的电压、电流关系),电路方程法也不例外。选取了一定的电路变量后所建立的电路方程均是电路两类基本约束的特定表现形式。

建立电路方程时,所需列写的 KCL 和 KVL 方程都应是独立的方程。对应于一组独立的 KCL 方程的节点称为独立节点,对应于一组独立的 KVL 方程的回路称为独立回路。在第 1 章已述及,若一个电路有 b 条支路,n 个节点,则独立节点数为 $n-1$ 个,独立回路数为 $b-n+1$ 个。如何写出一个电路独立的 KCL 和 KVL 方程呢?下面以图 3-1 所示电路为例加以说明。

在图 3-1 所示电路中,共有 4 个节点,6 条支路。则独立节点数为 3 个,独立回路数也为

3 个选取列写 KCL 方程的独立节点的方法是选择四个节点中的任意三个即可，例如选节点①、②、③写出的三个 KCL 方程为一组独立的 KCL 方程。由这三个方程可导出节点④的 KCL 方程，因此，节点④是不独立的节点。若电路中指定了参考节点，则通常就将参考节点之外的 $n-1$ 个节点选作独立节点。

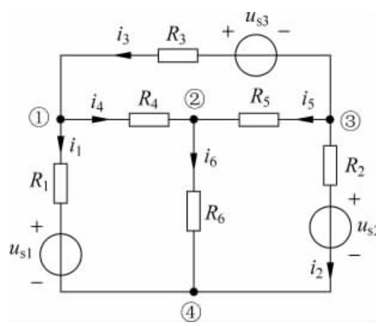


图 3-1　说明独立节点、独立回路的电路

选取列写 KVL 方程的一组独立回路时可按下面的方法去做。在每选择一个新的回路时，使该回路至少包含一条新的支路，即未含在已选回路中的支路，从而使此回路的 KVL 方程中至少含有一个新的未知支路电流。这样选取的新回路的 KVL 方程一定独立于已选取的回路的 KVL 方程。

通常一个电路按上述方法可选出多组独立回路。可以验证图 3-1 所示电路，可以选出 16 组独立回路，而每一组独立回路中的回路数都是 3 个。图 3-2 给出了其中的三组独立回路。

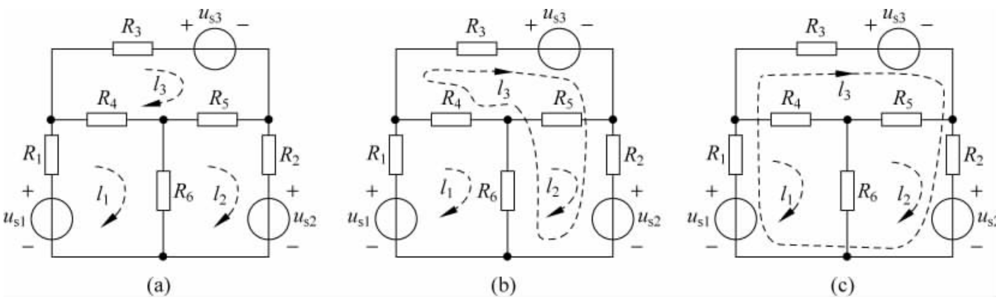


图 3-2　图 3-1 电路的三组独立回路示意

可以证明电路中各组独立回路的 KVL 方程体现的是相同的对回路电压的约束，即由一组独立回路的各 KVL 方程可导出其他各组独立回路的 KVL 方程。例如由图 3-2(a)所示电路的三个独立回路的 KVL 方程可得出图 3-2(b)所示三个回路的 KVL 方程；由图 3-2(b)所示电路的三个独立回路的 KVL 方程可导出图 3-2(c)所示电路的三个独立回路的 KVL 方程等，读者可自行验证之。

电路中的求解对象通常是各支路的电压、电流，可以直接以支路电压电流为变量来建立电路方程而求得电路响应，但这样做往往使所建立的电路方程数目较多而增大计算工作量。为解决这一问题，可以选取电路中的一些中间变量(电量)来建立电路方程，再由这些中间电量来求得各支路电压、电流。这些中间电量包括节点电位(节点电压)、回路电流、网孔电流等。选择不同的中间电量建立电路方程从而求解电路的方法就是本章所要介绍的各种电路分析方法。

3.2　典型支路及其支路特性

元件特性(元件的电压、电流关系)是电路分析的基本依据之一。在实际计算电路的响应时，往往将元件特性转化为用支路特性(支路的电压、电流关系)表示。

一、典型支路及其支路特性方程

图 3-3 是电路中的一条典型支路，它由独立电压源、电流源及电阻元件复合连接而成。所谓“典型”是指该支路基本包含了电路中一条支路构成所可能具有的情形。例如纯电阻电路是其中的所有电源为零的情形，而电源的戴维宁支路则是电流源为零的情形等。这条典型支路暂未包含受控源，含有受控源的情况将在稍后讨论。

该典型支路的特性是支路电压 u_k 和电流 i_k 的关系方程，也称为支路伏安关系或支路方程。支路方程有两种表示形式，即用支路电流表示支路电压，或用支路电压表示支路电流。根据图 3-3 所示典型支路 k 的电压、电流的参考方向，两种形式的支路方程为

$$u_k = R_k i_{Rk} + u_{sk} = R_k(i_k - i_{sk}) + u_{sk} = R_k i_k + u_{sk} - R_k i_{sk} \tag{3-1}$$

或

$$i_k = G_k u_k + i_{sk} - G_k u_{sk} \tag{3-2}$$

式中 $G_k = \dfrac{1}{R_k}$。

具有 b 条支路的电路可认为是由 b 条典型支路构成的，于是便有 b 个上述的支路方程（当然一些方程中的某些项为零）。

例 3-1 试写出图 3-4 所示电路中所有支路的用支路电压表示支路电流的特性方程。

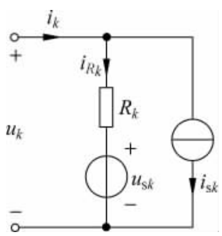


图 3-3 电路中的一条典型支路

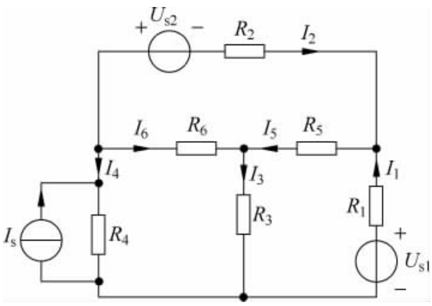


图 3-4 例 3-1 电路

解 依题意，是需写出如式(3-2)所示的支路方程。设各支路电压、电流为关联正向，且 $G_k = 1/R_k$，可写出各支路方程为

$$
\begin{aligned}
I_1 &= G_1U_1 + G_1U_{s1}\\
I_2 &= G_2U_2 - G_2U_{s2}\\
I_3 &= G_3U_3\\
I_4 &= G_4U_4 - I_s\\
I_5 &= G_5U_5\\
I_6 &= G_6U_6
\end{aligned}
$$

二、电路含有受控源时的支路特性方程

在列写含有受控源电路的支路方程时，应注意对受控源控制量的处理，需将受控源的控制量用合适的支路电量表示，即支路方程形式为式(3-1)时，控制量应为支路电流，支路方程形式为式(3-2)时，控制量则为支路电压。

例 3-2 试写出图 3-5 所示电路的支路特性方程（支路电压用支路电流表示）。

解　所需列写的是形如式(3-1)的支路方程。设各支路电压、电流为关联正向，写出各支路特性方程为

$$U_1 = R_1(I_1 - i_s) = R_1I_1 - R_1i_s$$
$$U_2 = R_2I_2$$
$$U_3 = R_3I_3$$
$$U_4 = R_4I_4 + r_mI_2$$
$$U_5 = R_5I_5 + u_s$$
$$U_6 = R_6(I_6 - g_mU_1) = R_6I_6 - R_6g_mU_1$$
$$= -R_1R_6g_mI_1 + R_6I_6 + R_1R_6g_mi_s$$

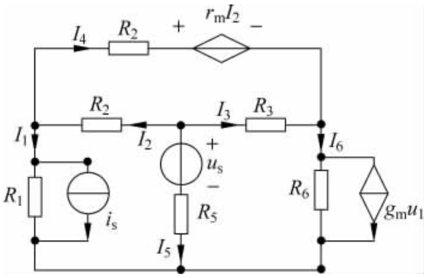


图 3-5　例 3-2 电路

需注意的是，第 6 条支路中的受控源控制量是支路 1 的电压 U_1，应将 U_1 用支路电流 I_1 表示。

3.3　2b 变量分析法

一般而言，对于具有 b 条支路的电路，就有 b 个支路电流变量和 b 个支路电压变量，于是网络变量的总数为 $2b$ 个。若电路有 n 个节点，则可写出 $n-1$ 个独立的 KCL 方程和 $b-n+1$ 个独立的 KVL 方程以及 b 个独立的支路方程。上述独立方程的总数为

$$(n-1)+(b-n+1)+b = 2b$$

这表明网络可列写的独立方程的数目与网络未知变量的数目正好是相等的，因此可用列写上述方程并联立求解的方法来求出网络中的全部 $2b$ 个支路电流、电压变量。这种方法称之为 $2b$ 变量分析法(简称为 $2b$ 法)相应的方程式也称为 $2b$ 方程。

电路分析的依据是基尔霍夫定律和元件特性这两类基本约束。可以看出，$2b$ 法是这两类约束的直接应用。$2b$ 法的优点是建立电路方程简单直观，且适用于任意的网络，包括线性和非线性网络。同时它也是其他电路分析方法方程的基础，即各种电路分析法的方程可视为 $2b$ 法方程演变的结果。但由于该法所需列写的方程数目较多，求解计算较为烦琐，除了一些情况下用于计算机辅助电路分析外，实际中用得较少。

练习题

3-1　电路如图 3-6 所示。

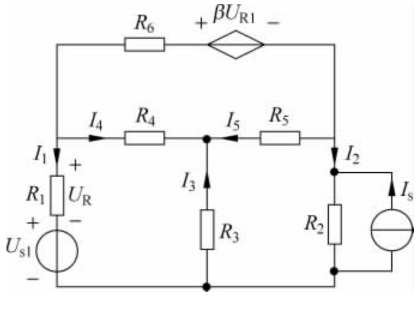


图 3-6　练习题 3-1 电路

(1) 试列写两种形式的支路方程;
(2) 试建立该电路的 $2b$ 法方程式。

3.4 支路电流分析法

以支路电流为变量建立电路方程求解电路的方法称为支路电流分析法,也可简称为支路法。该方法所建立的是电路中独立节点的 KCL 方程和独立回路的 KVL 方程。对于有 b 条支路的电路,电流变量有 b 个,所建立的方程的数目也是 b 个,较 $2b$ 法而言,方程的数目减少了一半。这一方法所对应的电路方程也称为支路法方程。

一、支路法方程的导出

建立支路法方程时所列写的是电路中独立节点的 KCL 方程和独立回路的 KVL 方程,所有方程中的变量均是支路电流。下面举例说明支路法方程的具体形式及导出用视察法列写支路法方程的规则。

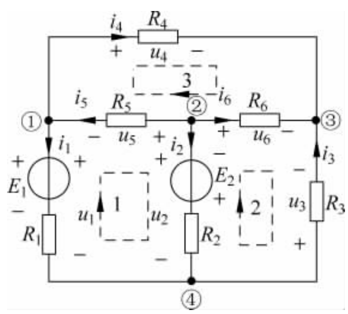


图 3-7 建立支路电流法方程的用图

在图 3-7 所示的电路中,选取各支路电流、电压的参考方向如图中所示。对三个独立节点①、②、③建立 KCL 方程为

$$\left.\begin{aligned} i_1+i_4-i_5&=0\\ i_2+i_5+i_6&=0\\ -i_3-i_4-i_5&=0 \end{aligned}\right\} \tag{3-3}$$

又对三个独立回路(网孔)建立 KVL 方程为

$$\left.\begin{aligned} -u_1+u_2-u_5&=0\\ -u_2-u_3+u_6&=0\\ u_4+u_5-u_6&=0 \end{aligned}\right\} \tag{3-4}$$

各支路的特性方程(伏安关系式)为

$$\left.\begin{aligned} u_1&=R_1i_1+E_1\\ u_2&=R_2i_2-E_2\\ u_3&=R_3i_3\\ u_4&=R_4i_4\\ u_5&=R_5i_5\\ u_6&=R_6i_6 \end{aligned}\right\} \tag{3-5}$$

将支路方程式(3-5)代入 KVL 方程式(3-4),并对方程进行整理,将未知量的项置于方程左边,将已知量移至方程右边,可得

$$\left.\begin{aligned} -R_1i_1+R_2i_2-R_5i_5&=E_1+E_2\\ -R_2i_2-R_3i_3+R_6i_6&=-E_2\\ R_4i_4+R_5i_5-R_6i_6&=0 \end{aligned}\right\} \tag{3-6}$$

将式(3-3)和式(3-6)联立,便得所需的支路电流法方程。

容易看出,式(3-6)实质是 KVL 方程,是将相关支路特性代入到各独立回路 KVL 方程

后的结果。这表明支路法方程和 $2b$ 法方程类似，是电路两类基本约束的一种体现形式。

二、视察法建立支路法方程

支路电流法的方程由两组方程构成。一组是独立节点的 KCL 方程，可任选 $n-1$ 个节点后写出。另一组是在电路中任选一组独立回路后写出的 KVL 方程，该组方程中的第 k 个方程对应于电路中的第 k 个独立回路。考察并分析式(3-6)，可知其一般形式为

$$\sum R_j i_j = \sum E_{sj} \tag{3-7}$$

该方程的左边是 k 回路中所有支路的电阻电压之代数和，当支路电流的参考方向和 k 回路的绕行方向一致时，该电阻电压项前面取正号，否则取负号。式(3-7)的右边是 k 回路中所有电压源(包括由电流源等效的电压源)电压的代数和，当电源电压的参考方向和 k 回路的绕行方向一致时，该电压项前面取负号，否则取正号。

根据上述规则和方法，可由对电路的观察直接写出支路法方程，称为视察法建立电路方程。

视察法建立支路电流法方程的具体步骤归纳如下：

① 指定电路中各支路电流的参考方向。

② 指定各独立回路的绕行方向。若是平面电路，则可直接以网孔作为独立回路，并选定顺时针方向为网孔的绕行方向。

③ 任选 $n-1$ 个节点作为独立节点，列写这些节点的 KCL 方程。

④ 列写各独立回路的 KVL 方程，方程的形式为 $\sum R_j i_j = \sum E_{sj}$，即每一 KVL 方程的左边为回路中各电阻电压的代数和，且每一电阻电压均用该电阻中的电流表示；方程的右边为回路中所有电压源电压的代数和，注意需将与电阻并联的电流源等效变换为与电阻串联的电压源。

例 3-3　如图 3-8 所示电路，已知 $R_1=R_2=1\Omega$，$R_3=2\Omega$，$E_s=10\text{V}$，$I_s=7.5\text{A}$。试用支路电流法求各支路电流及两电源的功率。

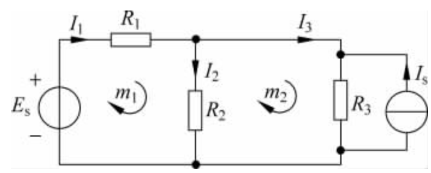


图 3-8　例 3-3 电路

解　(1) 选定各支路电流的参考方向和网孔的绕行方向如图所示。

(2) 该电路共有两个节点，则独立节点只有一个，可任选一个节点为独立节点。写出节点①的 KCL 方程为

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0 \qquad ①$$

(3) 写出各网孔的 KVL 方程为

$$m_1:\quad R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_{s1} \qquad ②$$

$$m_2:\quad -R_2 I_2 + R_3 I_3 = -R_3 I_s \qquad ③$$

(4) 将①、②、③式联立，并代入电路参数求解，解出各支路电流为

$$I_1 = 3\text{A},\quad I_2 = 7\text{A},\quad I_3 = -4\text{A}$$

(5) 两电源的功率为

E_s的功率：　$P_{s1} = -E_{s1} I_1 = -10\times 3 = -30\text{W}$

I_s的功率：　$P_{s2} = -(I_s + I_3) R_3 I_s = -(7.5-4)\times 2\times 7.5 = -52.5\text{W}$

(6) 验算计算结果的正确性。电路中的全部电阻吸收的总功率为

$$P_R = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 (I_3 + I_s)^2 = 1 \times 3^2 + 1 \times 7^2 + 2 \times 3.5^2 = 82.5\text{W}$$

两电源吸收的总功率为

$$P_s = P_{s1} + P_{s2} = -30 - 52.5 = -82.5\text{W}$$

例 3-3 的结果说明电源发出的功率与电阻吸收的功率相等,谓之“功率平衡”,表明了电路的计算结果是正确的。

对电路进行计算后,应验证结果的正确性,验算“功率平衡”是常用方法之一。

事实上,支路分析法还包括了支路电压分析法,即以支路电压为变量列写电路的 KVL 和 KCL 方程的方法。由于支路电压法在实际中用得较少,因此不再作深入讨论。

三、电路中含受控源时的支路电流法方程

在电路中含有受控源时,若用视察法建立支路电流法方程,可根据受控源的特性,先将受控源视为独立电源列写方程,再将受控源的控制量转换用支路电流表示,然后对方程加以整理,将含有待求支路电流变量的项都移放至方程的左边。

例 3-4 试列写图 3-9 所示电路的支路电流法方程。

解 (1) 先将受控源视为独立电源列写方程。列写独立节点①、②、③的 KCL 方程为

$$-I_1 - I_4 + I_6 = 0$$

$$I_2 + I_4 + I_5 = 0$$

$$I_3 - I_5 - I_6 = 0$$

列写回路 1、2、3 的 KVL 方程为

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_4 I_4 = E_{s1} - E_{s2}$$

$$-R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_5 I_5 = E_{s2} + R_3 \alpha U_1$$

$$R_4 I_4 - R_5 I_5 + R_6 I_6 = r_m I_2$$

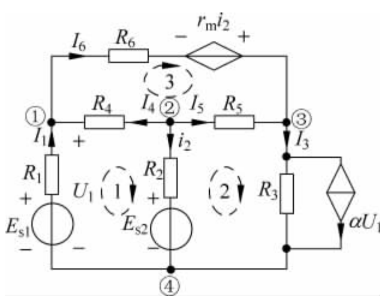


图 3-9 例 3-4 电路

(2) 电路中受控电流源的控制量为电压 U_1,将其转换为支路电流 I_1。由电路,有

$$U_1 = E_{s1} - R_1 I_1$$

(3) 将上式代入回路 2 的 KVL 方程,并对 KVL 方程加以整理,将含未知量的项移至方程左边,则该电路的支路电流法方程为

$$\left.\begin{aligned}
&-I_1 - I_4 + I_6 = 0 \\
&I_2 + I_4 + I_5 = 0 \\
&I_3 - I_5 - I_6 = 0 \\
&R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_4 I_4 = E_{s1} - E_{s2} \\
&R_1 R_3 \alpha I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_5 I_5 = R_3 \alpha E_{s1} + E_{s2} \\
&-r_m I_2 + R_4 I_4 - R_5 I_5 + R_6 I_6 = 0
\end{aligned}\right\}$$

四、应用支路电流法时对无伴电流源支路的处理方法

当电路中含有无伴电流源支路时,因该支路的端电压为未知量,且不能用其支路电流予以表示,所以在用前述方法列写回路的 KVL 方程时会遇到困难。对这种情况可有两种解

决办法。

1. 虚设电压变量法——增设无伴电流源的端电压变量

在列写 KVL 方程时，将无伴电流源两端的未知电压作为待求变量，这一新增变量并非是电流变量，因此称为“虚设变量”。由于无伴电流源支路的电流是已知的，尽管出现了一个新的电压变量，但待求变量的总数并未增加，因此方程的总数亦未增加。

例 3-5 用支路电流法求图 3-10 所示电路中各支路电流及两电源的功率。

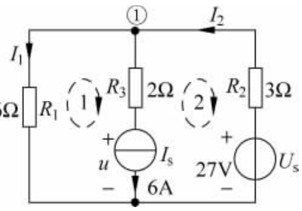


图 3-10 例 3-5 电路

解 设无伴电流源的端电压为 u，其参考方向如图中所示，又设各支路电流的参考方向如图示。节点①的 KCL 方程为

$$I_1 - I_2 + 6 = 0$$

回路 1 和回路 2 的 KVL 方程为

$$-R_1 I_1 + 6R_3 + u = 0$$

$$-R_2 I_2 - R_3 \times 6 - u = -U_s$$

将电路参数代入并对方程加以整理后得

$$\left.\begin{aligned} I_1 - I_2 &= -6 \\ -6I_1 + u &= -12 \\ -3I_2 - u &= -15 \end{aligned}\right\}$$

解上述方程组，求得

$$I_1 = 1\text{A}, \quad I_2 = 7\text{A}, \quad u = -6\text{V}$$

两电源的功率为

$$P_{I_s} = uI_s = -6 \times 6 = -36\text{W}$$

$$P_{U_s} = -U_s I_2 = -27 \times 7 = -189\text{W}$$

2. 选合适回路法——使无伴电流源支路只和一个独立回路关联

在所选的一组独立回路中，无伴电流源支路只和一个独立回路关联，即该支路只出现在一个回路中，而不会成为两个及以上回路的公共支路。

由于该无伴电流源支路的电流为已知，未知的支路电流的数目就比支路数少一个，故该无伴电流源所在独立回路的 KVL 方程无须列写。又因在其他独立回路中不出现该无伴电流源支路，因而避开了无伴电流源的端电压不能用支路电流表示的困难。由于不引入新的变量，从而减少了方程的数目。若一个电路中有 q 个无伴电流源(包括受控电流源)，则所需列写的 KVL 方程将减少 q 个。

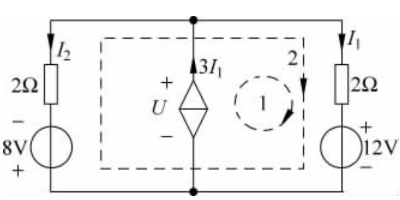


图 3-11 例 3-6 电路

例 3-6 试用支路电流法求图 3-11 所示电路中独立电源和受控源的功率。

解 该电路有两个独立回路，如果使无伴受控电流源只属于右边的独立回路 1，则不需列写该回路的 KVL。而另一不含无伴受控电流源支路的独立回路应是虚线所示的回路 2。于是所需列写的支路电流法方程为

$$\text{KCL:}\quad I_1 + I_2 - 3I_1 = 0$$
$$\text{KVL:}\quad 2I_1 - 2I_2 = -12 - 8$$

即

$$\left.\begin{aligned} -2I_1 + I_2 &= 0 \\ I_1 - I_2 &= -10 \end{aligned}\right\}$$

解之,可得

$$I_1 = 10\text{A},\quad I_2 = 20\text{A}$$

又可求得

$$U = 2I_1 + 12 = 32\text{V}$$

于是求出各电源的功率为

$$P_{8\text{V}} = -8I_2 = -8\times 20 = -160\text{W}$$
$$P_{12\text{V}} = 12I_1 = 12\times 10 = 120\text{W}$$
$$P_{\text{c}} = -3I_1U = -3\times 10\times 32 = -960\text{W}$$

应用支路电流法时所列写的是独立节点的 KCL 方程和独立回路的 KVL 方程,其特点是电路中有多少个未知的支路电流,所需列写的方程数目就有多少个。当电路的支路数较多时,求解方程组的工作量很大。因此对支路数较少的电路适宜用此法,但对较复杂的电路,一般不用支路分析法,而选用其他方法求解。

练习题

3-2 列写图 3-12 所示电路的支路电流法方程。

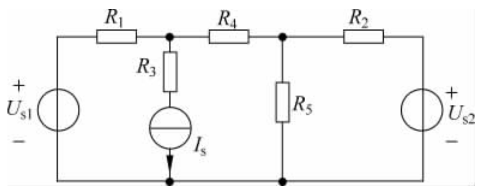


图 3-12 练习题 3-2 电路

3.5 节点分析法

在一个有 n 个节点的电路中,在指定了一个参考节点后,其余 $n-1$ 个节点的电位(也称为节点电压)可作为求解变量。由于在电路中应用了电位的概念后,KVL 将自动获得满足,因此若能将各支路电流用节点电位表示,则只需列写 $n-1$ 个独立节点的 KCL 方程,从而获得一组有 $n-1$ 个方程且正好有 $n-1$ 个节点电位变量的电路方程,就可求得各节点电位。由于每一支路是连接于两个节点之间,因此根据支路特性(元件特性)方程,总能将支路电流用节点电位予以表示。这种以节点电位为待求变量依 KCL 建立方程求解电路的方法,称为节点电位分析法或简称为节点分析法,所对应的电路方程称为节点法方程。

一、节点法方程的导出

节点法的求解对象是节点电位(也称节点电压),所建立的是独立节点的 KCL 方程。在图 3-13 所示电路中,选节点④为参考节点,指定各支路电流的参考方向如图中所示。各独立节点的节点电位为 U_1、U_2 和 U_3。写出独立节点①、②、③的 KCL 方程为

$$\left.\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_6 - I_s &= 0 \\ -I_1 + I_3 + I_4 &= 0 \\ -I_2 - I_3 - I_5 - I_6 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-8}$$

再将各支路电流用节点电位表示为

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_1 - U_2}{R_1} \\ I_2 &= \frac{U_1 - U_3}{R_2} \\ I_3 &= \frac{U_2 - U_3}{R_3} \\ I_4 &= \frac{U_2}{R_4} \\ I_5 &= \frac{-U_3 + E_5}{R_5} \\ I_6 &= \frac{U_1 - U_3 - E_6}{R_6} \end{aligned}\right\} \tag{3-9}$$

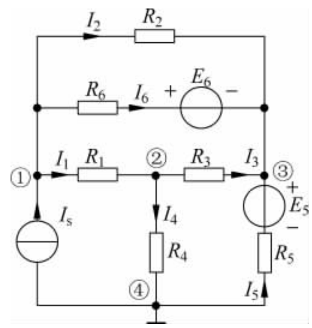


图 3-13　建立节点法方程的用图

将式(3-9)代入 KCL 方程式(3-8)并进行整理,将未知量的项置于方程左边,将已知量移至方程右边,可得

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_6}\right)U_1 - \frac{1}{R_1}U_2 - \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_6}\right)U_3 = \frac{E_6}{R_6} + I_s \\ &-\frac{1}{R_1}U_1 + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)U_2 - \frac{1}{R_3}U_3 = 0 \\ &-\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_6}\right)U_1 - \frac{1}{R_3}U_2 + \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\right)U_3 = \frac{E_5}{R_5} - \frac{E_6}{R_6} \end{aligned}\right\} \tag{3-10}$$

式(3-10)即是所需的节点法方程。可以看出节点法方程实质是 KCL 方程,是把用节点电位表示的支路电流方程代入到 KCL 方程后的结果,它是 $2b$ 法方程的又一种表现形式。

二、视察法建立节点法方程

节点法方程的本质是独立节点的 KCL 方程,显然节点法方程的数目与独立节点数相同,为 $n-1$ 个。每一节点法方程都和一个独立节点对应。考察并分析式(3-10),可知与节点 k 对应的第 k 个方程的一般形式为

$$G_{kk}U_k - \sum G_{kj}U_j = I_{sk} \tag{3-11}$$

上式中的 G_{kk} 为连接于节点 k 上所有支路中电阻元件的电导之和,且 G_{kk} 恒为正值;G_{kk} 也称为节点 k 的自电导。式中的 G_{kj} 为连接于节点 k 和节点 j 之间的全部支路的电阻元件的电导之和,且 G_{kj} 前恒取负号;G_{kj} 也称为节点 k 和 j 的互电导。该式右边 I_{sk} 为连接于节点 k

上全部支路中电流源(含由电压源等效的电流源)电流的代数和。当某个电流源的电流是流入节点 k 时,该项电流前取正号,否则取负号。

按照上述规则和方法,可通过对电路的观察直接写出节点法方程,称为视察法建立节点法方程。

用视察法建立节点电位法方程并求解电路的具体步骤如下。

(1) 给电路中的各节点编号,并指定电路的参考节点。

(2) 在电路图中标示待求电量的参考方向,例如指定各支路电流的参考方向。

(3) 按视察法建立节点法方程的规则,列写出对应于各独立节点的电路方程。

(4) 解第(3)步所建立的方程(组),求出各节点电位。

(5) 由节点电位求得待求的电量,例如支路电压、支路电流或元件的功率等。

例 3-7 试列写图 3-14 所示电路的节点电位法方程。

解 (1) 给电路中的各节点编号如图,并选节点④为参考点,则节点电位变量为 U_1、U_2 和 U_3。

(2) 将电路中的两条戴维宁支路等效变换为诺顿支路后,按前述确定自电导、互电导和节点电流源电流的方法,对各节点逐一写出该电路的节点电位法方程为

$$\left.\begin{aligned}
n_1:&\ \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\right)U_1-\frac{1}{R_1}U_2-\frac{1}{R_5}U_3=-\frac{E_{s5}}{R_5}+I_s\\
n_2:&\ -\frac{1}{R_1}U_1+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)U_2-\frac{1}{R_2}U_3=0\\
n_3:&\ -\frac{1}{R_5}U_1-\frac{1}{R_2}U_2+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)U_3=\frac{E_{s4}}{R_4}+\frac{E_{s5}}{R_5}
\end{aligned}\right\}$$

例 3-8 用节点电位分析法求图 3-15 所示电路中各支路电流及电流源的功率。

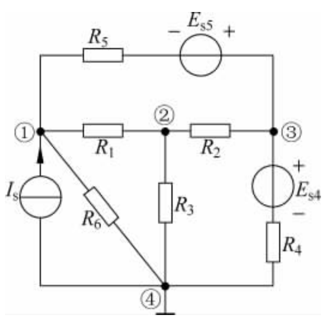


图 3-14 例 3-7 电路

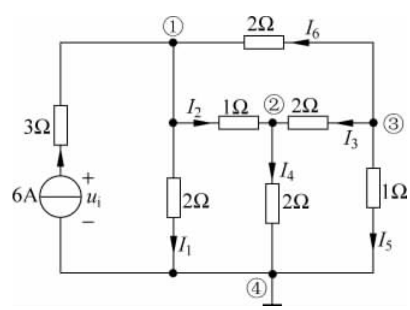


图 3-15 例 3-8 电路

解 (1) 如图 3-15 所示,给各节点编号,并选定节点④为参考点。

(2) 指定各支路电流的参考方向及电流源的端电压的参考方向如图 3-15 中所示。

(3) 各独立节点电位为 U_1、U_2 和 U_3。按视察法的规则建立电路的节点法方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)U_1-U_2-\frac{1}{2}U_3=6\\
&-U_1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)U_2-\frac{1}{2}U_3=0\\
&-\frac{1}{2}U_1-\frac{1}{2}U_2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)U_3=0
\end{aligned}\right\}$$

应注意节点①的自电导中不应包括与电流源串联的 3Ω 电阻的电导，这是因为节点法的实质是按 KCL 建立电路方程，而待求变量是节点电位，每一方程实际是相应节点的 KCL 方程。在节点①方程的右边已写入了与此节点相连的电流源的电流，而此电流与串联的 3Ω 电阻无关，因此在节点法方程中不应出现与电流源串联的电阻之电导值。

（4）将上述方程组进行整理，得

$$\left.\begin{aligned} 2U_1 - U_2 - 0.5U_3 &= 6 \\ -U_1 + 2U_2 - 0.5U_3 &= 0 \\ -0.5U_1 - 0.5U_2 + 2U_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

解之，可得各节点电位为

$$U_1 = 5\text{V}, \quad U_2 = 3\text{V}, \quad U_3 = 2\text{V}$$

（5）将各支路电流用节点电位表示后，可求得

$$I_1 = \frac{U_1}{2} = 2.5\text{A}, \quad I_2 = \frac{U_1 - U_2}{1} = 2\text{A}, \quad I_3 = \frac{U_3 - U_2}{2} = -0.5\text{A}$$

$$I_4 = \frac{U_2}{2} = 1.5\text{A}, \quad I_5 = \frac{U_3}{1} = 2\text{A}, \quad I_6 = \frac{U_3 - U_1}{2} - 1.5\text{A}$$

电流源两端的电压为

$$u_i = U_1 + 3 \times 6 = 5 + 18 = 23\text{V}$$

电流源的功率为

$$P_i = -6u_i = -6 \times 23 = -138\text{W}$$

三、电路中含受控源时的节点法方程

当电路中含受控源时，若用视察法建立节点法方程，可根据受控源的特性，先将受控源视为独立电源，用规则化方法列写方程，再将其控制量用节点电位表示，然后对方程加以整理，将含有未知节点电位的项均移至方程的左边。

例 3-9 电路如图 3-16 所示，试求独立电流源和受控电流源的功率。

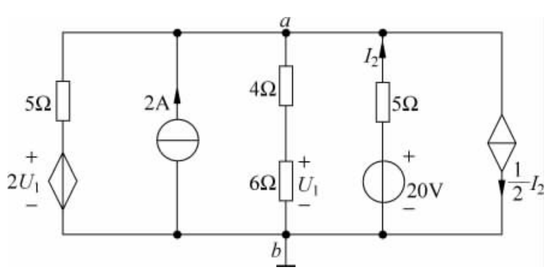


图 3-16 例 3-9 电路

解 用节点法求解。选节点 b 为参考点，先将受控源视为独立电源，控规则化方法建立节点 a 的方程为

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right)U_a = \frac{20}{5} + 2 - \frac{1}{2}I_2 + \frac{2U_1}{5}$$

将受控源的控制量 U_1 和 I_2 用节点电位 U_a 表示，有

$$U_1=\frac{6}{4+6}U_a=\frac{3}{5}U_a$$

$$I_2=\frac{20-U_a}{5}=4-\frac{1}{5}U_a$$

将上述两式代入节点法方程，整理方程并求解，可求得节点电位为

$$U_a=25\text{V}$$

又求得电流 I_2 为

$$I_2=4-\frac{1}{5}U_a=4-\frac{1}{5}\times 25=-1\text{A}$$

于是求出独立电流源的功率为

$$P_1=-2U_a=-2\times 25=-50\text{W}$$

受控电流源的功率为

$$P_c=\frac{1}{2}I_2U_a=\frac{1}{2}\times(-1)\times 25=-12.5\text{W}$$

四、电路中含无伴电压源时的节点法方程

当电路中含无伴电压源支路时，因该支路的电流为未知量，且不能用其支路电压予以表示，因此在用前述方法列写节点法方程时会遇到困难。对此种情况可有三种处理方法。

1. 虚设电流变量法——增设无伴电压源支路的电流变量

在列写节点法方程时，必须计入无伴电压源支路的电流。为此将无伴电压源支路的未知电流作为新的待求变量，这一新增变量并非是节点电位变量，因此称为“虚设变量”。在增加这一变量后，为使方程可解，必须补充一个方程。由于无伴电压源支路的电压是已知的，且这一支路连接在两个节点之间，于是可用这两个节点电位之差表示无伴电压源的电压，这一关系式便是所需补充的方程，也称为“增补方程”。

在列写节点电位方程时，可将无伴电压源支路的未知电流变量视为电流源的电流写入方程。

例 3-10 试列写图 3-17 所示电路的节点电位法方程。

解 (1) 给电路中的各节点编号，并选节点④为参考节点。

(2) 设无伴电压源 E_2 支路中的电流为 I_e，其参考方向如图 3-17 中所示。

(3) 将无伴电压源支路的电流 I_e 视为独立电流源的电流写入节点法方程，并写出“增补方程”，即用节点电位表示的无伴电压源电压的方程。于是列写出采用“虚设电流变量法”的节点电位法方程为

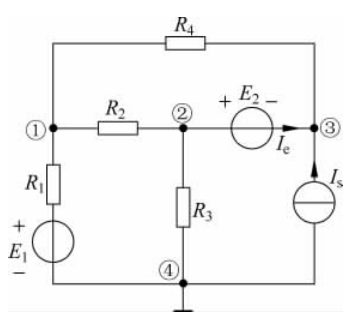


图 3-17 例 3-10 电路

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right)U_1-\frac{1}{R_2}U_2-\frac{1}{R_4}U_3=\frac{E_1}{R_1}$$

$$-\frac{1}{R_2}U_1+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)U_2=I_e$$

$$-\frac{1}{R_4}U_1+\frac{1}{R_4}U_3=I_s+I_e$$

增补方程为

$$U_2 - U_3 = E_2$$

（4）将上述方程中的未知量均移至方程的左边，整理后的节点法方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right)U_1-\frac{1}{R_2}U_2-\frac{1}{R_4}U_3=\frac{E_1}{R_1}\\
&-\frac{1}{R_2}U_1+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)U_2+I_e=0\\
&-\frac{1}{R_4}U_1+\frac{1}{R_4}U_3-I_e=I_s\\
&U_2-U_3=E_2
\end{aligned}\right\}$$

2. 电压源端点接地法——选择无伴电压源支路关联的节点之一为参考节点

当无伴电压源支路的一个端点与参考节点相接时，该无伴电压源支路另一个端点所接节点的电位便是已知的，其值为无伴电压源的电压值。于是这一电位为已知的节点对应的方程就不必列写，从而减少了方程的数目。

例 3-11 用节点电位法求图 3-18 所示电路中两独立电源的功率。

解 给电路中的各节点编号，并选无伴电压源的负极性端所接的节点④为参考节点。指定电压源支路的电流 I 和电流源的端电压 U 的参考方向以及各相关支路电流的参考方向如图中所示。节点①的电位为

$$U_1 = 6\text{V}$$

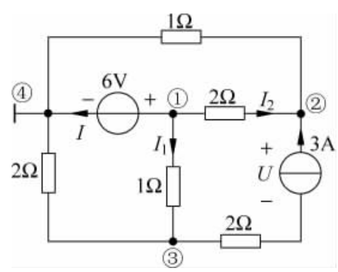


图 3-18 例 3-11 电路

对节点②和③列写的节点法方程为

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\times 6+\left(\frac{1}{2}+1\right)U_2=3\\
&-1\times 6+\left(\frac{1}{2}+1\right)U_3=-3
\end{aligned}\right\}$$

应注意，与电流源串联的 2Ω 电阻不应出现在节点法方程中。

解上述方程组，可得

$$U_2 = 4\text{V},\quad U_3 = 2\text{V}$$

由此可求得各支路电流为

$$I_1=\frac{U_1-U_3}{1}=6-2=4\text{A}$$

$$I_2=\frac{U_1-U_2}{2}=\frac{6-4}{2}=1\text{A}$$

$$I=-I_1-I_2=-4-1=-5\text{A}$$

电流源的端电压为

$$U=(U_2-U_3)+2\times 3=(4-2)+6=8\text{V}$$

于是求得两电源的功率为

$$P_{6\text{V}}=6I=6\times(-5)=-30\text{W}$$

$$P_{3\text{A}}=-3U=-3\times 8=-24\text{W}$$

在例 3-11 中，两个未知的节点电位实际只需分别建立一个方程便可求出。由此可见，对含有无伴电压源支路的电路采用“电压源端点接地法”后可有效地简化计算工作。

3. 作封闭面法——围绕连接无伴电压源支路的两节点作封闭面而后建立该封闭面的 KCL 方程

前述的“电压源端点接地法”避免了对连接有无伴电压源支路的节点建立方程，在未选择某个无伴电压源的一个端点作为参考节点的情况下，可采用“作封闭面法”达到同样的目的。这一方法的步骤是先围绕连接着这一无伴电压源的两个节点作一封闭面，而后对该封闭面列写 KCL 方程。

例 3-12 求图 3-19 所示电路中各电阻支路的电流及两个电压源的功率。

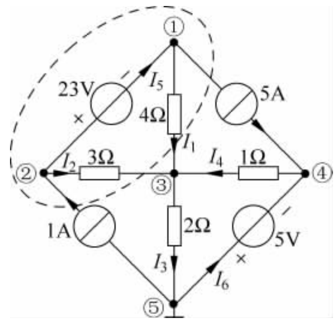


图 3-19 例 3-12 电路

解 给电路中各节点编号并指定各支路电流的参考方向如图所示。该电路中有两个无伴电压源支路，现选择 5V 电压源支路所接的节点⑤为参考节点，则节点④的电位为

$$U_4 = -5\text{V}$$

另一电压为 23V 的无伴电压源支路连接在节点①和节点②之间，围绕这两个节点作一封闭面如图中所示，对此封闭面建立如下的 KCL 方程

$$I_1 + I_2 + 5 - 1 = 0$$

将 I_1 和 I_2 用节点电位表示，则封闭面的 KCL 方程为

$$\frac{1}{4}(U_1 - U_3) + \frac{1}{3}(U_2 - U_3) = -4$$

整理后得

$$\frac{1}{4}U_1 + \frac{1}{3}U_2 - \frac{7}{12}U_3 = -4 \quad ①$$

由于 $U_2 - U_1 = 23$，因此方程①中的未知变量只有两个。再对节点③建立方程，并将 $U_4 = -5\text{V}$ 代入，有

$$-\frac{1}{4}U_1 - \frac{1}{3}U_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right)U_3 = -5 \quad ②$$

将方程①和②联立，并将 $U_2 - U_1 = 23$ 代入，可解得

$$U_1 = -26\text{V}, \quad U_2 = -3\text{V}, \quad U_3 = -6\text{V}$$

由此求得各电阻支路的电流为

$$I_1 = \frac{U_1 - U_3}{4} = \frac{-26 - (-6)}{4} = -5\text{A}$$

$$I_2 = \frac{U_2 - U_3}{3} = \frac{-3 - (-6)}{3} = 1\text{A}$$

$$I_3 = \frac{U_3}{2} = \frac{-6}{2} = -3\text{A}$$

$$I_4 = \frac{U_4 - U_3}{1} = \frac{-5 - (-6)}{1} = 1\text{A}$$

两个无伴电压源支路的电流为

$$I_5 = I_1 + 5 = -5 + 5 = 0\text{A}$$
$$I_6 = I_3 - 1 = -3 - 1 = -4\text{A}$$

于是求得两电压源的功率为

$$P_{23\text{V}} = 23I_5 = 0\text{W},\quad P_{5\text{V}} = 5I_6 = 5\times(-4) = -20\text{W}$$

由例 3-12 可见，若电路中有 m 个无伴电压源支路，在采用“作封闭面法”后，需列写的节点电位方程可减少 m 个。

此外，还可通过电源转移的方法，在消除无伴电压源支路后，再用通常的规则建立节点电位法方程。不过应注意，这种方法在一定的程度上改变了电路的结构。这对求解除无伴电压源支路之外的电路变量无关紧要，但若需求取该无伴电压源支路的电流或功率时，则应在求得电压源转移后的电路中各节点电位后，再回到电源转移前的电路去求解。

五、节点分析法的相关说明

(1) 节点电位法以节点电位为求解对象，所建立的方程实质是独立节点的 KCL 方程。

(2) 若电路有 n 个节点，且电路不含无伴电压源(独立的或受控的)支路时，所建立的节点法方程有$(n-1)$个，这比用支路法时建立的方程数目减少了$(b-n+1)$个，所减少的是独立回路的 KVL 方程。

(3) 节点法既适用于平面电路，也适用于非平面电路，是分析计算电路时常用的一种方法，尤其适用于节点数较少(即节点数少于独立回路数)的电路。由于在电路中易于确认节点电位变量，所以节点法在计算机辅助电路分析中也是最常用的方法之一。

(4) 当用视察法对含有受控源的电路建立节点法方程时，可先将受控源视为独立电源，用规则化方法列写方程，再将受控源的控制量用节点电位表示后代入方程进行整理。

(5) 对含有无伴电压源的电路用视察法建立方程时，可采用“虚设变量法”、“电压源端点接地法”和“作封闭面法”。其中后面两种方法可减少列写的方程的数目，是实际应用中最常用的方法。当电路中有 $m(m\geqslant 2)$条无伴电压源支路时，通常是联合采用“电压源端点接地法”和“作封闭面法”，可使所建立的方程数目减少 m 个。

练习题

3-3　试建立图 3-20 所示电路的节点电位法方程。

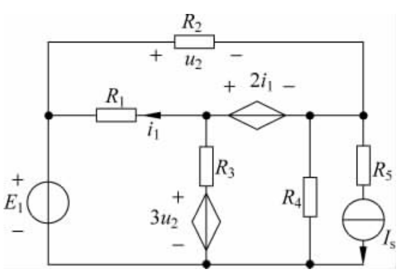


图 3-20　练习题 3-3 电路

3.6 回路分析法

在求解电路时，还可用所谓的"回路电流"为变量来建立电路方程，这一方法所列写的是独立回路的 KVL 方程，称之为回路电流分析法或回路分析法，也简称为回路法，所对应的电路方程称为回路法方程。

一、回路电流的概念

回路电流是一种假想的电量，是设想的沿着一个回路的边沿或在回路内部流通的电流。图 3-21 所示电路有三个独立回路，假定每一回路都有一回路电流在其中流动，如图中所示的电流 i_{l1}、i_{l2}和 i_{l3}。可以看出，电路中的每一支路都有一个或多个回路电流通过，于是每一支路电流就是这些回路电流的代数和。例如图 3-21 中各支路电流用回路电流表示如下：

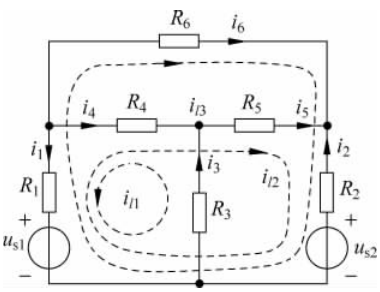


图 3-21　说明回路电流概念的电路

$$
\begin{aligned}
i_1 &= i_{l1} - i_{l2} - i_{l3} \\
i_2 &= - i_{l2} - i_{l3} \\
i_3 &= i_{l1} \\
i_4 &= - i_{l1} + i_{l2} \\
i_5 &= i_{l2} \\
i_6 &= i_{l3}
\end{aligned}
$$

由此可见，只要求得了回路电流，就可以求出各支路电流，进而可由支路方程求得全部的支路电压。由图 3-21 电路还可以看出，有三条支路仅通过了一个回路电流，而正是这三条支路决定了这三个独立回路(由该支路决定的独立回路中不会出现另两条支路)，或者说这三条支路中的电流就是回路电流，这也表明这三个独立回路的电流构成了一组独立变量。

二、回路法方程的导出

回路法的求解对象是回路电流，所建立的是独立回路的 KVL 方程。下面用图 3-22 所示电路导出其回路法方程，并进而得到用视察法建立回路法方程的规则。

在图 3-22 所示电路中，选取三个独立回路并给出三个回路电流的参考方向(绕行方向)。三个独立回路的 KVL 方程为

$$
\left.
\begin{aligned}
u_1 + u_2 - u_3 - u_6 &= 0 \\
u_3 + u_4 + u_6 &= 0 \\
u_2 - u_3 + u_5 &= 0
\end{aligned}
\right\}
\tag{3-12}
$$

写出各支路的特性方程并将各支路电流用回路电流表示，得

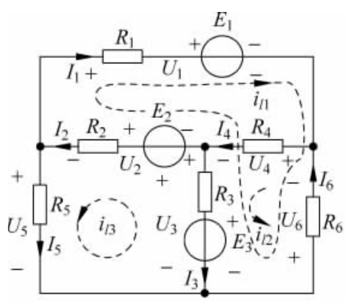


图 3-22　建立回路法方程的电路

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= R_1 I_1 + E_1 = R_1 i_{l1} + E_1 \\
u_2 &= R_2 I_2 - E_2 = R_2(i_{l1} + i_{l5}) - E_2 \\
u_3 &= R_3 I_3 + E_3 = R_3(-i_{l1} + i_{l4} - i_{l5}) + E_3 \\
u_4 &= R_4 I_4 = R_4 i_{l4} \\
u_5 &= R_5 I_5 = R_5 i_{l5} \\
u_6 &= R_6 I_6 = R_6(-i_{l1} + i_{l4})
\end{aligned}\right\} \tag{3-13}$$

将式(3-13)代入式(3-12)并进行整理，将含未知量的项置于方程左边，把已知量的项移至方程右边，得

$$\left.\begin{aligned}
&(R_1 + R_2 + R_3 + R_6)i_{l1} - (R_3 + R_6)i_{l4} + (R_2 + R_3)i_{l5} = -E_1 + E_2 + E_3 \\
&-(R_3 + R_6)i_{l1} + (R_3 + R_4 + R_6)i_{l4} - R_3 i_{l5} = -E_3 \\
&(R_2 + R_3)i_{l1} - R_3 i_{l4} + (R_2 + R_3 + R_5)i_{l5} = E_2 + E_3
\end{aligned}\right\} \tag{3-14}$$

上式即是所需的回路法方程。容易看出，回路法方程是将用回路电流表示的支路电压代入到独立回路的 KVL 方程后的结果，它是 $2b$ 法方程的又一种表现形式。

三、视察法建立回路法方程

回路法方程的实质是独立回路的 KVL 方程，显然回路法方程的数目与独立回路的数目相同，为 $b-n+1$ 个。每一个回路法方程都和一个独立回路对应。考察并分析式(3-14)，可知与回路 k 对应的第 k 个方程的一般形式为

$$R_{kk} i_{lk} \pm \sum R_{kj} i_{lj} = E_{lk} \tag{3-15}$$

上式中的 R_{kk} 为回路 k 中所有支路的电阻之和，且恒取正值；R_{kk} 也称为回路 k 的自电阻。式中的 R_{kj} 为回路 k 和回路 j 所有共有支路的电阻之和。当 k 回路电流和 j 回路电流的方向关于公共支路为一致时，R_{kj} 前取正号，否则取负号；R_{kj} 称为 k 回路和 j 回路的互电阻。该式右边的 E_{lk} 为回路 k 中所有电压源(含电流源等效的电压源)电压的代数和。当某个电压源电压的参考方向与回路 k 的电流方向为一致时，该项电压前取负号，否则取正号。

按照上述规则和方法，可通过对电路的观察直接写出回路法方程，称为视察法建立回路法方程。

用视察法建立回路法方程并求解电路的具体步骤归纳如下。

① 选取一组独立回路并给出各回路电流编号、指定参考方向。通常回路电流的参考方向与决定此独立回路的那一支路的电流方向为一致。

② 按上述视察法建立回路法方程的规则，逐一写出对应于各独立回路的电路方程。

③ 解第②步所建立的回路法方程(组)，求得各回路电流。

④ 由回路电流求出各支路电流。

⑤ 再由支路方程求得各支路电压及功率等待求量。

例 3-13　试用回路法求图 3-23 所示电路中两个电压源及电阻 R 和 R_1 的功率。

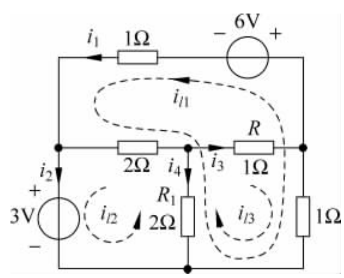


图 3-23　例 3-13 电路

解　选择三个独立回路并给出各回路电流的参考方向如图中所示。如此选择独立回路是因为这三个回路是由两

个电压源支路及 R 支路所决定的，这三条支路的电流便是三个回路的电流。由列写回路法方程的规则，可写出各回路的方程为

$$l_1:\quad (1+2+2+1)i_{l1}-(2+2)i_{l2}-(2+1)i_{l3}=-6$$
$$l_2:\quad -(2+2)i_{l1}+(2+2)i_{l2}+2i_{l3}=-3$$
$$l_3:\quad -(1+2)i_{l1}+2i_{l2}+(1+2+1)i_{l3}=0$$

将上述方程联立求解，求得

$$i_{l1}=-5.1\text{A}\quad i_{l2}=-5.25\text{A}\quad i_{l3}=-1.2\text{A}$$

于是所求各功率为

$$P_{6\text{V}}=6i_1=6i_{l1}=6\times(-5.1)=-30.6\text{W}$$
$$P_{3\text{V}}=3i_2=3i_{l2}=3\times(-5.25)=-15.75\text{W}$$
$$P_R=i_3^2R=i_{l3}^2R=(-1.2)^2\times1=1.44\text{W}$$
$$P_{R_1}=i_4^2R_1=(-i_{l2}-i_{l3})^2\times2=[-5.25-(-1.2)]^2\times2=32.805\text{W}$$

四、电路中含受控源时的回路法方程

在用视察法建立含受控源电路的回路法方程时，可先将受控源视为独立电源用规则化方法列写方程，再将其控制量用回路电流表示，然后对方程加以整理，将含有未知回路电流的项均移至方程的左边。

例 3-14 求图 3-24 所示电路中独立电压源和受控电压源的功率。

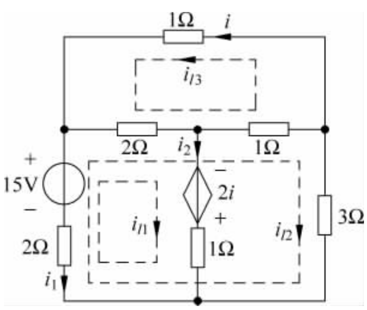


图 3-24 例 3-14 电路

解 用回路法求解。选取三个独立回路及回路电流的参考方向如图 3-24 所示。用规则化方法列写回路法方程为

$$\left.\begin{aligned}&(2+2+1)i_{l1}+(2+2)i_{l2}+2i_{l3}=15+2i\\&(2+2)i_{l1}+(2+2+1+3)i_{l2}+(2+1)i_{l3}=15\\&2i_{l1}+(2+1)i_{l2}+(2+1+1)i_{l3}=0\end{aligned}\right\}$$

将受控源的控制量 i 用回路电流表示，由电路图可见 $i=i_{l3}$，将该式代入回路法方程并对方程进行整理，可得

$$\left.\begin{aligned}&5i_{l1}+4i_{l2}=15\\&4i_{l1}+8i_{l2}+3i_{l3}=15\\&2i_{l1}+3i_{l2}+4i_{l3}=0\end{aligned}\right\}$$

解该方程组，可求出各回路电流为

$$i_{l1}=1.4\text{A},\quad i_{l2}=2\text{A},\quad i_{l3}=-2.2\text{A}$$

又由支路电流和回路电流的关系，求出两个电压源中的电流为

$$i_1=-i_{l1}-i_{l2}=-1.4-2=-3.4\text{A}$$
$$i_2=i_{l1}=1.4\text{A}$$

于是求得两个电压源的功率为

$$P_{15\text{V}}=15i_1=15\times(-3.4)=-51\text{W}$$
$$P_{2i}=-2i\cdot i_2=-2\times(-2.2)\times1.4=6.16\text{W}$$

五、电路中含无伴电流源时的回路法方程

当电路中含无伴电流源支路时，因该支路的电压为未知量，且不能用其支路电流予以表示，因此在用前述方法列写回路法方程时会遇到困难。对此可有两种解决方法。

1. 虚设电压变量法——增设无伴电流源支路的电压变量

方法是在建立方程时增设无伴电流源支路的端电压为新的电路变量并写入方程，同时增补一个用回路电流表示的无伴电流源电流的方程。

2. 选合适回路法——使无伴电流源支路只和一个回路相关联

这一方法和支路电流法中的做法是相似的，即在选择回路时，使每一无伴电流源支路只和一个回路关联，不让它成为两个及以上回路的公共支路。这样，无伴电流源所在回路的电流即是该电流源的电流，此由无伴电流源决定的回路的方程便无须列写，从而减少了方程的数目，使计算得以简化。

例 3-15　求图 3-25 所示电路中的电流 I。

解　该电路中有两个无伴电流源支路，选用回路法求解并采用选合适回路法。

选择电路的四个独立回路并指定各回路电流的参考方向如图中所示。由两个无伴电流源决定的两个独立回路的电流为已知电流源的电流，即 $i_{l1}=6\text{A}$，$i_{l2}=8\text{A}$，这两个回路的方程不必列写。粗看起来，还有 i_{l3} 和 i_{l4} 这两个回路电流是未知的，似乎需解一个二元一次方程组，但仔细观察可发现回路 l_3 和 l_4 之间并无公共电阻支路，它们之间的互电阻为零。这样 l_4 回路的方程中将不含有未知量 i_{l3}，即该方程中只有待求量 $i_{l4}=I$。因此，求 I 只需解一个方程就可以了。写出 l_4 回路的方程为

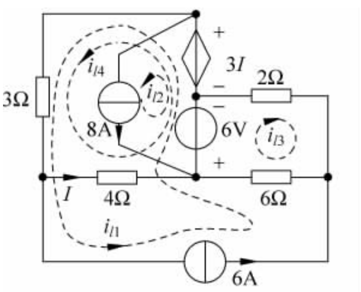


图 3-25　例 3-15 图

$$(3+4)I+3\times 6=3I-6$$

解之，得

$$I=-6\text{A}$$

练习题

3-4　试列写图 3-26 所示电路的回路法方程并求独立电流源的功率。

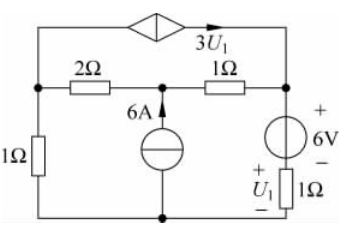


图 3-26　练习题 3-4 电路

六、网孔电流分析法

对一个平面电路，通常其所有内网孔可构成一组独立回路，此时在各网孔内部流通的假想电流称为网孔电流，可见网孔电流可视为回路电流的特例。以网孔电流为变量，建立方程求解电路的方法称为网孔电流分析法或网孔分析法，也简称为网孔法，所建立的方程亦是独立回路（网孔）的 KVL 方程，称之为网孔法方程。

1. 网孔法方程

网孔法的求解对象是网孔电流，所对应的是电路中各网孔的 KVL 方程。在图 3-27 所示电路中，按惯例选顺时针方向为网孔的绕行方向，同时这也是网孔电流的参考方向。又选取各支路电流、电压的参考方向如图所示。电路中三个网孔的 KVL 方程为

$$\left.\begin{aligned} u_1 + u_3 + u_4 &= 0 \\ u_2 - u_3 - u_5 &= 0 \\ -u_4 + u_5 - u_6 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-16}$$

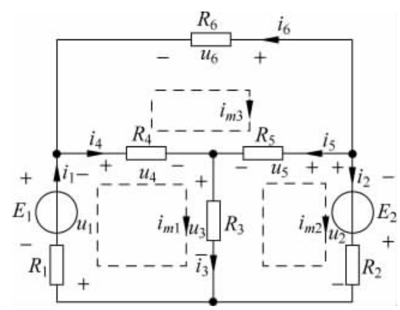


图 3-27 建立网孔法方程的一个电路

写出用支路电流表示的各支路电压的支路方程，再将各支路电流用网孔电流表示，可得

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 - E_1 = R_1 i_{m1} - E_1 \\ u_2 &= R_2 i_2 - E_2 = R_2 i_{m2} - E_2 \\ u_3 &= R_3 i_3 = R_2 (i_{m1} - i_{m2}) \\ u_4 &= R_4 i_4 = R_4 (i_{m1} - i_{m3}) \\ u_5 &= R_5 i_5 = R_5 (-i_{m2} + i_{m3}) \\ u_6 &= R_6 i_6 = R_6 (-i_{m3}) \end{aligned}\right\} \tag{3-17}$$

将式(3-17)代入式(3-16)，并进行整理，将含未知量的项置于方程左边，将已知量的项移至方程右边，得

$$\left.\begin{aligned} (R_1 + R_3 + R_4) i_{m1} - R_3 i_{m2} - R_4 i_{m3} &= E_1 \\ -R_3 i_{m1} + (R_2 + R_3 + R_5) i_{m2} - R_5 i_{m3} &= E_2 \\ -R_4 i_{m1} - R_5 i_{m_2} + (R_4 + R_5 + R_6) i_{m3} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-18}$$

这一方程组就是对应于图 3-27 所示电路的网孔法方程。

2. 视察法建立网孔法方程

一个平面网络的内网孔数目为 $b-n+1$ 个。网孔法方程中的每一个方程均与一个网孔对应。考察并分析式(3-18)，可知与网孔 k 对应的第 k 个方程的一般形式为

$$R_{kk} i_{mk} - \sum R_{kj} i_{mj} = E_{mk} \tag{3-19}$$

上式中的 R_{kk} 为网孔 k 中所有支路的电阻之和，且恒取正值，R_{kk} 也称为网孔 k 的自电阻。式中的 R_{kj} 为网孔 k 和网孔 j 共有支路的电阻，其恒取负值。这是因为已约定所有网孔电流的参考方向均为顺时针方向，因此对于 k、j 两网孔的公共支路来说，两个网孔电流的方向必定相反。这与前述回路法中的情况有所不同，在回路法中，对两个回路的共有支路而言，两回路电流的方向可能一致，也可能相反，这导致相应的电阻项前面可能取正号，也可能取负号。

式(3-19)中的 R_{kj} 称为网孔 k 和 j 的互电阻。该式右边的 E_{mk} 为网孔 k 中所有电压源(含电流源等效的电压源)的代数和。当某个电压源的方向与网孔 k 的电流方向为一致时,该项电压前取负号,否则取正号。

按照上述规则和方法,可通过对电路的观察直接写出网孔法方程,称为视察法建立网孔法方程。可以看出,网孔法是回路法的特例,用网孔法求解网络时步骤和做法与回路法完全相同,且网孔法建立电路方程较回路法更为简便,这是因为平面电路的网孔一目了然,无须费力去选取,且每一网孔法方程中的互电阻项前面恒取负号。

例 3-16 用网孔法求图 3-28 所示电路中两个独立电源和两个受控电源的功率。

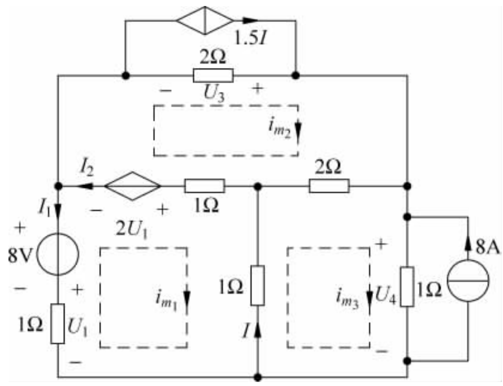


图 3-28 例 3-16 电路

解 用网孔法求解电路的步骤和方法与回路法相似。此电路中含有受控源,列写网孔法方程时,先将受控源视为独立电源写出初步的方程,再将受控源的控制量用网孔电流表示后代入后对方程进行整理。

(1) 给各网孔编号并选取顺时针方向为各网孔的绕行方向。

(2) 指定需计算的有关电压、电流的参考方向如图 3-28 所示。

(3) 将各受控源视为独立电源按视察法的规则列写网孔法方程。在建立方程的同时将诺顿支路转换为戴维宁支路。所建立的方程为

$$\left.\begin{aligned}(1+1+1)i_{m_1}-i_{m_2}-i_{m_3}&=8+2U_1\\-i_{m_1}+(1+2+2)i_{m_2}-2i_{m_3}&=-2U_1+3I\\-i_{m_1}-2i_{m_2}+(1+1+2)i_{m_3}&=-8\end{aligned}\right\}$$

(4) 将两个受控源的控制量 U_1 和 I 用网孔电流表示,即

$$U_1=1\times I_1=-i_{m_1},\quad I=i_{m_3}-i_{m_1}$$

(5) 将用网孔电流表示的受控源的控制量代入前面所列写的网孔法方程中,并对方程进行整理,可得下面的方程组

$$\left.\begin{aligned}5i_{m_1}-i_{m_2}-i_{m_3}&=8\\i_{m_2}-i_{m_3}&=0\\i_{m_1}+2i_{m_2}+4i_{m_3}&=8\end{aligned}\right\}$$

(6) 解上述方程组,求得各网孔电流为

$$i_{m_1}=2\text{A},\quad i_{m_2}=1\text{A},\quad i_{m_3}=1\text{A}$$

(7) 由网孔电流求出各有关电量为

$$U_1=-i_{m_1}=-2\text{V},\quad I=i_{m_3}-i_{m_1}=1-2=-1\text{A}$$
$$I_2=i_{m_2}-i_{m_1}=1-2=-1\text{A},\quad I_1=-i_{m_1}=-2\text{A}$$
$$U_3=2(1.5I-i_{m_2})=2[1.5\times(-1)-1]=-5\text{V}$$
$$U_4=1\times(8+i_{m_3})=8+1=9\text{V}$$

由此求得各电源的功率为

$$P_{8\text{V}}=8I_1=8\times(-2)=-16\text{W}$$
$$P_{8\text{A}}=-8U_4=-8\times9=-72\text{W}$$
$$P_{2U_1}=2U_1I_2=2\times(-2)\times(-1)=4\text{W}$$
$$P_{1.5I}=-1.5IU_3=-1.5\times(-1)\times(-5)=-7.5\text{W}$$

例 3-17 试列写图 3-29 所示电路的网孔法方程。

解 该电路中有一无伴电流源,因其两端的电压未知,且不能用其支路电流予以表示,因此在按规则建立方程时会遇到困难。与回路法的做法相似,可有两种处理方法。

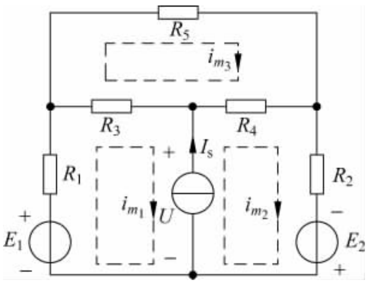


图 3-29 例 3-17 电路之一

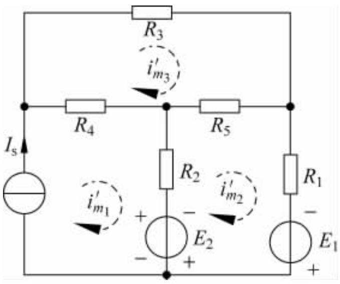


图 3-30 例 3-17 电路之二

方法一 "虚设变量法"

给电路中的各网孔编号,并选取顺时针方向为各网孔电流的参考方向。又设无伴电流源支路的端电压参考方向如图中所示。用规则化的方法写出各网孔的方程为

$$(R_1+R_3)i_{m_1}-R_3i_{m_3}=E_1-U$$
$$(R_2+R_4)i_{m_2}-R_4i_{m_3}=E_2+U$$
$$-R_3i_{m_1}-R_4i_{m_2}+(R_3+R_4+R_5)i_{m_3}=0$$

用网孔电流表示的无伴电流源电流的关系式为

$$-i_{m1}+i_{m2}=I_s$$

将上述方程中未知量的项移至方程的左边,则所建立的网孔法方程为

$$\left.\begin{aligned}&(R_1+R_3)i_{m_1}-R_3i_{m_3}+U=E_1\\&(R_2+R_4)i_{m_2}-R_4i_{m_3}-U=E_2\\&-R_3i_{m_1}-R_4i_{m_2}+(R_2+R_4+R_5)i_{m_3}=0\\&-i_{m_1}+i_{m_2}=I_s\end{aligned}\right\}$$

方法二　使无伴电流源只和一个网孔关联

若无伴电流源支路只与一个网孔关联，则此网孔的电流即是无伴电流源的电流，因此该网孔的方程无须列写，这样可减少方程的数目。为此，将原电路改画如图 3-30 所示。于是 $i'_{m_1}=I_s$，另外两个网孔的方程为

$$-R_2 i'_{m_1}+(R_1+R_2+R_5)i'_{m_2}-R_5 i'_{m_3}=-E_1-E_2$$
$$-R_4 i'_{m_1}-R_5 i'_{m2}+(R_3+R_4+R_5)i'_{m_3}=0$$

将 $i'_{m_1}=I_s$ 代入上面两个方程后，整理得到所需的网孔法方程为

$$\left.\begin{array}{l}(R_1+R_2+R_5)i'_{m_2}-R_5 i'_{m_3}=R_2 I_s-E_1-E_2\\ -R_5 i'_{m_2}+(R_3+R_4+R_5)i'_{m_3}=R_4 I_s\end{array}\right\}$$

练习题

3-5　试列写图 3-31 所示电路的网孔法方程。

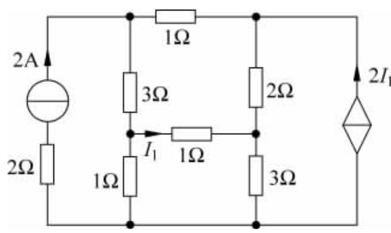
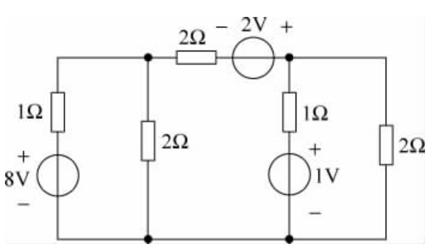


图 3-31　练习题 3-5 电路

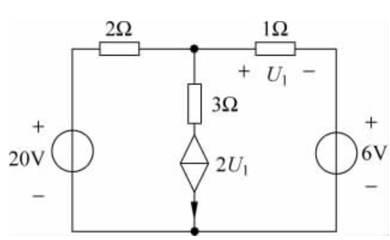
习题

3-1　用支路电流法求题 3-1 图所示电路中的各支路电流及各电压源的功率。

3-2　用支路电流法求题 3-2 图所示电路中独立电压源和受控电流源的功率。



题 3-1 图



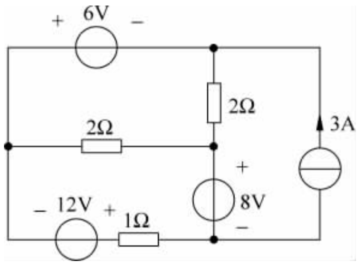
题 3-2 图

3-3　用支路电流法求题 3-3 图所示电路中各支路电流。

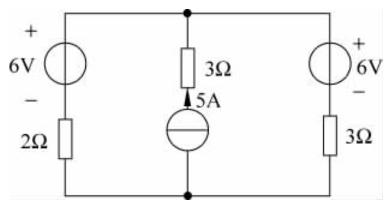
3-4　用节点分析法求题 3-4 图所示电路中各独立电源的功率。

3-5　电路如题 3-5 图所示，用节点分析法求各支路电流。

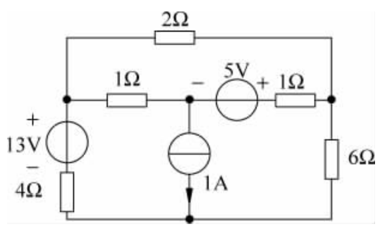
3-6　用节点法求题 3-6 图所示电路中的电流 I。



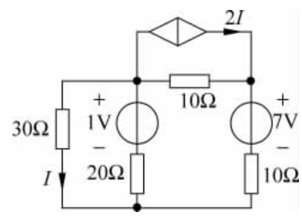
题 3-3 图



题 3-4 图



题 3-5 图



题 3-6 图

3-7 电路如题 3-7 图所示，用节点分析法求两个受控源的功率。

3-8 某网络的节点法方程为

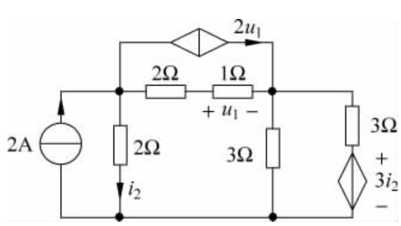
$$\begin{bmatrix} 1.6 & -0.5 & -1 \\ -0.5 & 1.6 & -0.1 \\ -1 & -0.1 & 3.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

试绘出电路图。

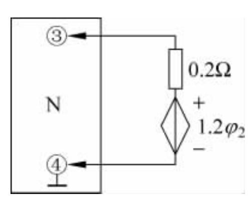
3-9 如题 3-9 图所示电路，网络 N 是具有 4 个节点的含受控源的线性时不变网络，其节点方程如下：

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

现在节点③与节点④之间接入一含受控源的支路，如图中所示，试求 $1.2\varphi_2$ 受控源的功率。



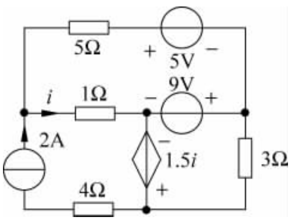
题 3-7 图



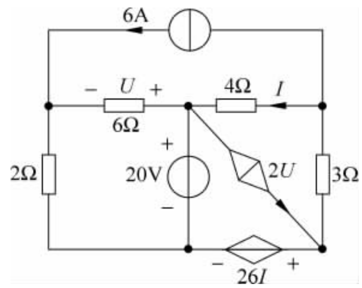
题 3-9 图

3-10 用节点法求题 3-10 图所示电路中受控电源的功率。

3-11 用回路法求题 3-11 图所示电路中的电压 U 和电流 I。



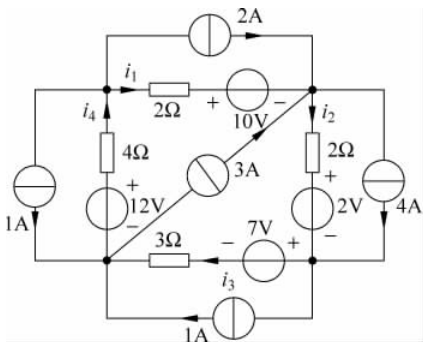
题 3-10 图



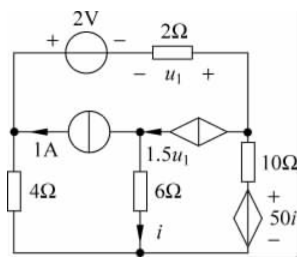
题 3-11 图

3-12 用回路法求如题 3-12 图所示电路中各电压源支路的电流 i_1、i_2、i_3 和 i_4。

3-13 电路如题 3-13 图所示，试用回路法求受控电压源的功率。



题 3-12 图

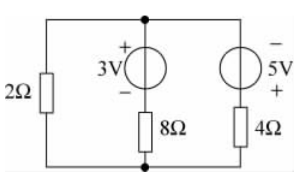


题 3-13 图

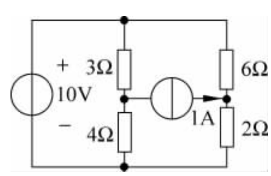
3-14 用网孔法求题 3-14 图所示电路中的各支路电流。

3-15 电路如题 3-15 图所示，用网孔法求各电源的功率。

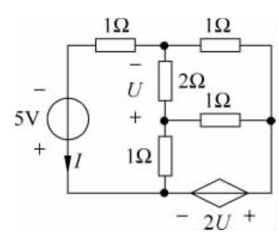
3-16 试用网孔法求题 3-16 图所示电路中的 U 和 I。



题 3-14 图



题 3-15 图



题 3-16 图

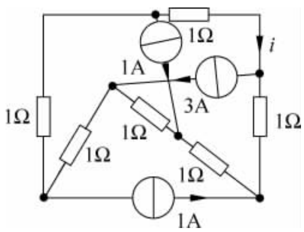
3-17 已知某电路的网孔法方程为

$$\begin{bmatrix} 1.7 & -0.5 & -0.2 \\ 1.5 & 2 & -8 \\ -2.2 & -1 & 3.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m_1} \\ i_{m_2} \\ i_{m_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

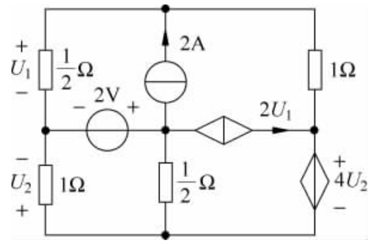
试构造与之对应的电路。

3-18 求题 3-18 图所示电路中的电流 i。

3-19　试求题 3-19 图所示电路中 2V 电压源及 2A 电流源的功率。

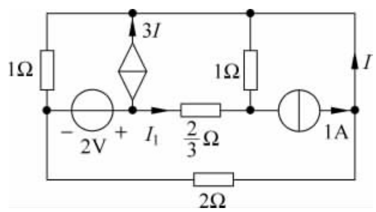


题 3-18 图



题 3-19 图

3-20　电路如题 3-20 图所示，求电流 I_1。



题 3-20 图