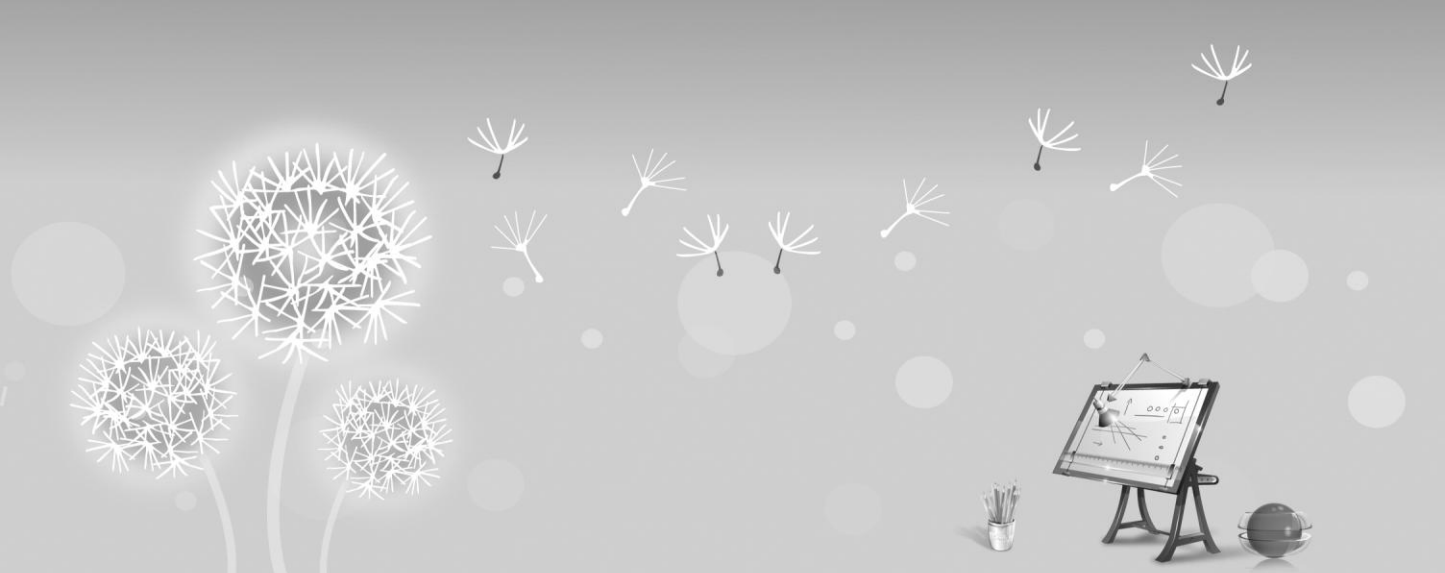
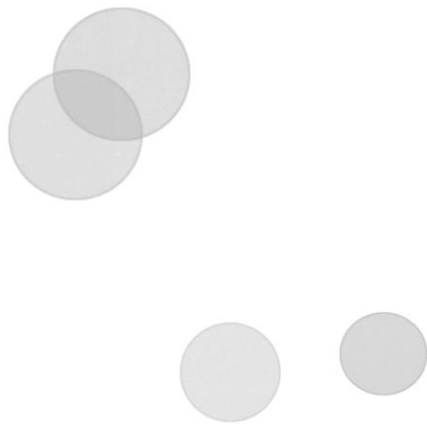




第 1 章 随机事件及其概率

现实世界中普遍存在着两类不同现象. 一类现象具有必然性, 即在一定条件下可以确定某种结果必然会出现, 称为确定性现象. 例如, 向上抛石子必然会下落; 一个标准大气压下纯水加热到 100°C 必然会沸腾等. 另一类现象具有偶然性, 即在一定条件下存在着多种可能结果, 而事先无法确定哪种结果会出现, 称为随机现象. 例如, 掷一枚硬币的结果可能正面向上, 也可能反面向上; 掷一颗骰子的结果可能出现 1 点、2 点、……、6 点等.

随机现象在一次试验中的结果具有不确定性, 但在大量的重复试验中, 其结果将会呈现出某种规律性. 例如, 重复投掷一枚硬币, 当投掷次数充分多时, 正面和反面出现的次数会大致相同; 重复投掷一颗骰子, 随着投掷次数的增加, 不同点数出现的比例会逐渐地接近. 随机现象在重复试验中所呈现的规律性称为统计规律性, 概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的数学分支. 从研究内容来说, 概率论侧重于应用数学理论和方法, 揭示随机现象的统计规律性; 数理统计侧重于分析处理统计数据, 对随机现象做出估计和推断.



1.1 随机事件概述

1.1.1 随机试验

随机现象的统计规律性往往需要通过大量的重复试验方能呈现出其内在属性. 为了研究随机现象的统计规律性, 需要在相同条件下进行重复试验. 这里所称的试验是一个相当广泛的概念, 可以是各种科学实验, 也可以是对事物的状态或特征的观察、调查或测试. 例如, 观察掷一枚硬币时哪一面向上, 观察掷一颗骰子出现的点数, 调查某个商场一天的客流量, 测试某种电子元件的使用寿命等均为试验.

以上列举的试验具有如下共同特征.

- (1) 试验可以在相同的条件下重复进行;
- (2) 每次试验的可能结果不止一个, 但事先知道所有的可能结果;
- (3) 在试验之前无法确定会出现哪一个结果.

在概率论中, 将具有上述三个特征的试验称为随机试验, 简称为试验.

1.1.2 样本空间

定义 1.1 随机试验的每一个可能结果称为一个样本点, 记作 ω ; 全体样本点组成的集合称为样本空间, 记作 Ω .

例 1.1 观察掷一枚硬币时哪一面向上, 有两个样本点, 样本空间为

$$\Omega = \{\text{正面}, \text{反面}\}$$

例 1.2 观察掷一颗骰子出现的点数, 有六个样本点, 样本空间为

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

例 1.3 测试某种电子元件的使用寿命, 有不可列无穷个样本点. 记元件的使用寿命为(小时), 则样本空间为

$$\Omega = \{t | t \geq 0\} = [0, \infty)$$

例 1.4 盒内有编号为 1 到 5 的五个白球和编号为 6 到 10 的五个黑球, 从中任取一球观察. 如果观察的是球的颜色, 则有两个样本点, 样本空间为

$$\Omega_1 = \{\text{白色}, \text{黑色}\}$$

如果观察的是球的编号, 则有十个样本点, 样本空间为

$$\Omega_2 = \{1, 2, \dots, 10\}$$

此例表明, 对于同一个随机试验, 根据不同的试验目的, 可以考虑不同的样本点和样本空间.

1.1.3 随机事件的定义

在随机试验中, 通常所关心的往往并不是试验的具体结果, 而是试验的结果是否满足

某种条件. 满足条件的样本点组成样本空间 Ω 的一个子集. 例如, 在例 1.2 中规定掷出偶数点为中奖, 则关心的是掷出的结果是否为偶数, 满足中奖条件的样本点组成样本空间 Ω 的子集 $\{2, 4, 6\}$. 又如, 在例 1.3 中规定元件的使用寿命大于 1000 小时为合格, 则关心的是测试的结果是否大于 1000 小时, 满足合格条件的样本点组成样本空间 Ω 的子集 $\{t | t > 1000\} = (1000, \infty)$.

定义 1.2 在随机试验中, 由满足某种条件的样本点组成的样本空间 Ω 的子集称为随机事件, 简称为事件, 记作 A, B, C, L .

随机事件可以用集合形式表示, 也可以用带引号的文字形式表示.

每次随机试验必出现一个且仅出现一个样本点, 如果某次试验所出现的样本点属于某个事件, 则称该事件在试验中发生.

关于随机事件概念的几点说明:

(1) 每一个样本点 ω 作为 Ω 的子集, 都表示一个事件, 称为基本事件. 由两个及以上样本点组成的事件可视作基本事件的复合, 称为复合事件.

(2) 样本空间 Ω 作为 Ω 的子集, 也表示一个事件. 由于 Ω 中包含试验的所有样本点, 故每次试验中事件 Ω 都必然发生, 称 Ω 为必然事件.

(3) 空集 $\emptyset$ 作为 Ω 的子集, 也表示一个事件. 由于 $\emptyset$ 中不含试验的任何样本点, 故每次试验中事件 $\emptyset$ 都不可能发生, 称 $\emptyset$ 为不可能事件.

必然事件和不可能事件都不具有随机性, 但为方便起见, 通常将其视作两个特殊的随机事件, 可以理解为随机事件的两个极端情形.

例 1.5 观察掷一颗骰子出现的点数, 设事件 A, B, C, D 分别为“点数为 6”, “点数小于 6”, “点数不大于 6”, “点数大于 6”, 则

事件 $A = \{6\}$ 是基本事件. 当且仅当掷出 6 点时, 事件 A 发生.

事件 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 是复合事件. 当掷出 1, 2, 3, 4, 5 中任一点数时, 事件 B 均发生.

事件 $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$ 是必然事件. 每次掷骰子, 事件 C 都必然发生.

事件 $D = \emptyset$ 是不可能事件. 每次掷骰子, 事件 D 都不可能发生.

1.1.4 事件的关系与运算

因为随机事件是样本空间的子集, 所以事件的关系与运算等同于集合的关系与运算. 应当注意的是: 要从事件的角度理解这些关系与运算, 并能用这些关系与运算表示各种复杂的事件.

1. 事件的包含

如果事件 A 的样本点都属于事件 B , 则称 A 包含于 B , 或称 B 包含 A , 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

事件包含的意义: 事件 A 包含于事件 B 意味着 A 发生时 B 必发生.

2. 事件的相等(等价)

如果事件 A 与事件 B 相互包含, 即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称 A 与 B 相等或等价, 记作 $A = B$.

事件相等的意义: 事件 A 与事件 B 相等意味着 A 与 B 要么同时发生, 要么同时不发生.

例 1.6 观察掷一颗骰子出现的点数, 设事件 A 为“点数是奇数”, 事件 B 为“点数小于 6”, 事件 C 为“点数不大于 5”, 则

$$A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

故 $A \subset B, B = C$.

3. 事件的和(并)

由事件 A 与事件 B 的所有样本点组成的事件, 称为 A 与 B 的和事件或并事件, 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$$

和事件的意义: 和事件 $A \cup B$ 发生意味着 A 与 B 中至少有一个发生.

事件的和可以推广到有限个或可列个事件的情形. 类似地, 和事件发生当且仅当有限个或可列个事件中至少有一个发生.

有限个或可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和事件, 可简记为

$$\bigcup_i A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

4. 事件的积(交)

由事件 A 与事件 B 的共有样本点组成的事件, 称为 A 与 B 的积事件或交事件, 记作 $A \cap B$, 简记为 AB , 即

$$AB = A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$$

积事件的意义: 积事件 AB 发生意味着 A 与 B 都发生.

事件的积可以推广到有限个或可列个事件的情形. 类似地, 积事件发生当且仅当有限个或可列个事件都发生.

有限个或可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的积事件, 可简记为

$$\bigcap_i A_i = A_1 A_2 \dots A_n \dots$$

5. 事件的差

由事件 A 中不属于事件 B 的所有样本点组成的事件, 称为 A 与 B 的差事件, 记作 $A - B$, 即

$$A - B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}$$

差事件的意义: 差事件 $A - B$ 发生意味着 A 发生且 B 不发生.

例 1.7 观察掷一颗骰子出现的点数, 设事件 A 为“点数是偶数”, 事件 B 为“点数

小于 5”，则

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{故 } A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}, \quad AB = \{2, 4\}, \quad A - B = \{6\}.$$

6. 事件的互斥(互不相容)

如果事件 A 与事件 B 满足 $AB = \emptyset$ ，则称 A 与 B 互斥或互不相容.

事件互斥的意义：事件 A 与事件 B 互斥意味着 A 与 B 不可能同时发生.

7. 事件的互逆(对立)

如果事件 A 与事件 B 满足 $AB = \emptyset$ 且 $A \cup B = \Omega$ ，则称 A 与 B 互逆或对立，并称 B 为 A 的逆事件或对立事件，记作 $B = \bar{A}$.

显然，事件 A 的逆事件 $\bar{A}$ 由样本空间 Ω 中不属于 A 的所有样本点组成，即

$$\bar{A} = \Omega - A = \{\omega \mid \omega \in \Omega \text{ 且 } \omega \notin A\}$$

事件互逆的意义：互逆事件 A 与 $\bar{A}$ 在每次试验中必有一个且仅有一个发生，即 A 发生则 $\bar{A}$ 不发生， A 不发生则 $\bar{A}$ 发生.

例 1.8 在投掷一枚骰子的试验中，设事件 A 为“点数等于 3”，事件 B 为“点数大于 4”，事件 C 为“点数小于 5”，则

$$A = \{3\}, B = \{5, 6\}, C = \{1, 2, 3, 4\}$$

故 A 与 B 互斥， B 与 C 互逆.

关于事件的关系与运算，易知有以下结论.

- (1) 对于任何事件 A ，有 $\emptyset \subset A \subset \Omega$ ；
- (2) 对于互逆事件 A 与 $\bar{A}$ ，有 $\bar{\bar{A}} = A$ ， $A\bar{A} = \emptyset$ ， $A \cup \bar{A} = \Omega$ ；
- (3) 对于差事件 $A - B$ ，有 $A - B = A - AB = A\bar{B}$.

事件的关系与运算可用韦恩图直观表示，如图 1.1 所示.

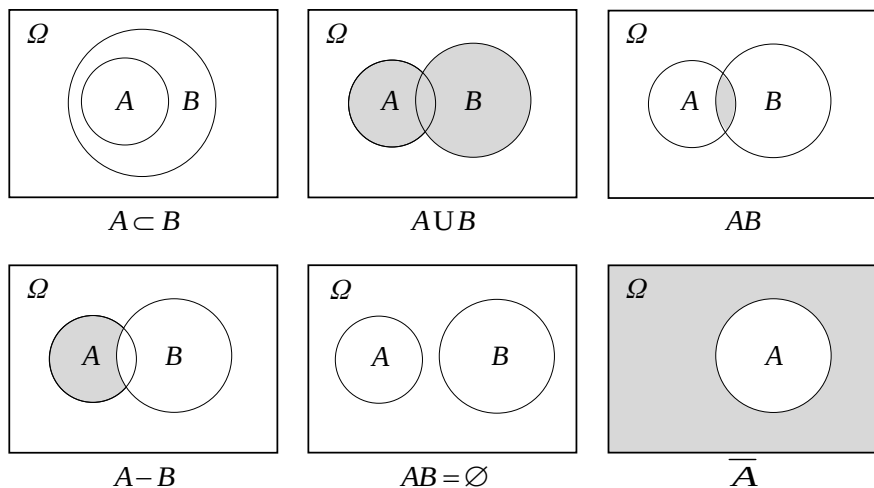


图 1.1 事件的关系与运算

根据集合的运算律,可以得到事件的如下运算律.

- (1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$;
- (2) 结合律: $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $ABC = (AB)C = A(BC)$;
- (3) 分配律: $A(B \cup C) = AB \cup AC$, $A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$;
- (4) 对偶律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

上述各运算律均可推广到有限个或可列个事件的情形.

利用事件的关系与运算可以表示各种复杂的事件. 应当注意, 同一事件可以有不同的表示法, 在实际问题中应根据需要采用合适的表示形式.

例 1.9 设 A, B, C 为同一随机试验中的事件, 则

- “ A, B, C 都发生”可表示为 ABC ;
- “ A, B, C 都不发生”可表示为 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或 $\overline{A \cup B \cup C}$;
- “ A, B, C 中恰好有一个发生”可表示为 $\bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C}$;
- “ A, B, C 中至少有一个发生”可表示为 $A \cup B \cup C$;
- “ A, B, C 中至多有一个发生”可表示为 $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C}$;
- “ A, B, C 中恰好有两个发生”可表示为 $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$;
- “ A, B, C 中至少有两个发生”可表示为 $AB \cup AC \cup BC$;
- “ A, B, C 中至多有两个发生”可表示为 $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ 或 $\overline{ABC}$.

习题 1-1

1. 将一枚硬币连掷两次, 设事件 A, B, C 分别为“第一次出现正面”, “两次出现同一面”, “至少有一次出现正面”. 试写出样本空间 Ω 及事件 A, B, C 的样本点.

2. 袋内有编号 1, 2, 3, 4 的四个球, 从中任取一球后不放回, 再任取一球. 设事件 A, B 分别为“第一次取到的编号为 1”, “两次取到的编号之和为 6 或 8”.

- (1) 试写出事件 A, B 的样本点;
- (2) 将取球方式改为第一次取球后放回, 再第二次取球, 试写出事件 A, B 的样本点.

3. 某城市共发行日报、晚报和体育报三种报纸. 设事件 A, B, C 分别为“订阅日报”“订阅晚报”“订阅体育报”, 试用 A, B, C 表示下列事件:

- (1) 只订日报; (2) 只订日报和晚报; (3) 只订一种报纸;
- (4) 恰好订两种报纸; (5) 至少订一种报纸; (6) 不订任何报纸;
- (7) 至多订一种报纸; (8) 三种报纸全订; (9) 三种报纸不全订.

4. 某射手向靶子射击三次, 设事件 A_i 为“第 i 次射击中靶” ($i=1, 2, 3$), 试说明下列事件的意义:

- (1) $A_1 A_2 A_3$; (2) $\overline{A_1 A_2 A_3}$; (3) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$;
- (4) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$; (5) $A_1 - A_2 - A_3$; (6) $A_1 - A_2 A_3$.

5. 设 A 表示事件“甲种产品畅销, 乙种产品滞销”, 那么对立事件 $\bar{A}$ 表示的意义是什么?

1.2 随机事件的概率

在对随机现象的研究中,不仅需要知道可能发生哪些事件,更需要知道事件发生的可能性有多大.随机事件在一次试验中是否发生,事先是无法确定的,但事件发生可能性的大小是可以度量的.就好比线段长短的度量是长度,平面图形大小的度量是面积,物体运动快慢的度量是速度 L/L ,随机事件发生可能性大小的度量,就是概率.

1.2.1 频率与概率

随机事件的概率反映事件发生可能性的大小,决定了事件发生的规律.这种规律并不表现在一次试验中事件是否发生,而是表现为大量重复试验中事件发生的统计规律性.通过观察事件在重复试验中发生的频繁程度,可以对事件的概率有一个直观的了解和估计.

定义 1.3 设在 n 次重复试验中,事件 A 的发生次数为 n_A ,则称

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

为事件 A 发生的频率.

容易证明,频率具有如下基本性质:

- (1) 非负性: 对任一事件 A , 有 $f_n(A) \geq 0$;
- (2) 规范性: 对必然事件 Ω , 有 $f_n(\Omega) = 1$;
- (3) 可加性: 对任意有限个或可列个两两互斥的事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, 有

$$f_n\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i f_n(A_i)$$

事件发生的频率反映事件在重复试验中发生的频繁程度,频率的大小与事件发生可能性的大小密切相关.可以想象,在重复试验中发生频率大的事件,在一次试验中发生的可能性也应该大;反之,频率小的事件发生的可能性也应该小.

实践表明,进行相同次数的重复试验,任一事件发生的频率未必相同,即频率与具体的试验有关,不能作为事件发生可能性大小的一般度量.但随着试验次数的增加,事件发生的频率会逐渐稳定地在某个数值附近摆动,一般来说,试验的次数越多,摆动的幅度越小,故频率又具有稳定性.在大量重复试验的基础上,频率可以作为事件发生可能性大小的近似估计.

例如,掷一枚硬币,事先无法确定会出现正面朝上还是反面朝上.但如果硬币是均匀的,则有理由认为出现正面朝上和反面朝上的可能性各占一半,故在大量重复试验中,出现正面朝上的频率应该接近于0.5.为了验证这一点,历史上曾有不少人做过投掷硬币试验,其中的一些结果如表1.1所示.

表 1.1 投掷硬币试验的相关资料

试 验 者	投掷硬币次数	出现正面次数	出现正面频率
蒲 丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维 尼	30000	14994	0.4998

根据频率的稳定性, 可以对概率作如下描述.

概率的统计定义 在相同条件下进行重复试验, 如果事件 A 发生的频率在某个数值 p 附近摆动, 并且摆动的幅度能随着试验次数的增加而减小, 则称数值 p 为事件 A 的概率, 记作

$$P(A) = p$$

应当指出, 概率的统计定义是对概率的频率解释, 并非概率的严格定义, 因为概率是事件本身所固有的客观属性, 不是由试验结果决定的. 在实际问题中, 可以通过大量重复试验, 将事件发生的频率作为概率的估计值, 但无法由频率确定概率的准确值.

1.2.2 概率的公理化定义

在概率论的发展历史上, 关于概率曾有过多种定义, 包括上面提到的概率的统计定义, 以及后面要介绍的概率的古典定义、几何定义等, 这些定义都有着各自的缺陷或局限性. 1933 年, 苏联数学家柯尔莫格罗夫在总结前人研究的基础上, 建立了概率的公理化体系, 首次给出了概率的严格定义.

定义 1.4(概率的公理化定义) 设随机试验的样本空间为 Ω . 如果对于试验中的每一个事件 A , 都赋予一个实数值 $P(A)$, 并且赋值规则满足下列三条公理:

- (1) 非负性: 对任一事件 A , 有 $P(A) \geq 0$;
- (2) 规范性: 对必然事件 Ω , 有 $P(\Omega) = 1$;
- (3) 可加性: 对任意有限个或可列个两两互斥的事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, 有

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

容易看出, 概率的三条公理分别对应频率的三条基本性质. 不同之处在于, 频率的三条基本性质是可以根据频率的定义证明的, 而概率的三条公理则是概率必须满足的基本假设, 或者说是概率应当具备而无须证明的基本性质.

概率的公理化定义揭示了概率的数学本质: 概率是随机事件的满足三条公理的实值函数. 基于三条公理建立的概率公理化体系, 为概率论奠定了严密的逻辑基础, 使概率论成为一个严格的数学分支.

1.2.3 概率的性质

根据概率的公理化定义, 可以推出概率的如下性质.

性质 1 对不可能事件 $\emptyset$, 有 $P(\emptyset)=0$.

证明 取 $A_i = \emptyset, i=1, 2, \dots, n$, 则 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥, 且 $\bigcup_i A_i = \emptyset$,

由概率的可加性, 可得

$$P(\emptyset) = P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) = \sum_i P(\emptyset)$$

由概率的非负性知 $P(\emptyset) \geq 0$, 故有 $P(\emptyset)=0$.

性质 2 对于事件 A 的逆事件 $\bar{A}$, 有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (1.1)$$

证明 因为 $A \cup \bar{A} = \Omega$, 且 $A\bar{A} = \emptyset$, 由概率的规范性和可加性, 可得

$$P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

故有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

性质 3 对任一事件 A , 有 $0 \leq P(A) \leq 1$.

证明 由概率的非负性及性质 2, 直接可得

$$0 \leq P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1$$

性质 4 (减法公式) 对任意两个事件 A, B , 有

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) \quad (1.2)$$

证明 因为 $A = (A - B) \cup AB$, 且 $(A - B) \cap AB = \emptyset$. 由概率的可加性, 可得

$$P(A) = P((A - B) \cup AB) = P(A - B) + P(AB)$$

故有 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

推论 如果 $B \subset A$, 则有

$$P(A - B) = P(A) - P(B)$$

性质 5 (加法公式) 对任意两个事件 A, B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (1.3)$$

证明 因为 $A \cup B = A \cup (B - A)$, 且 $A \cap (B - A) = \emptyset$, 由概率的可加性及性质 4, 即可得到

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

一般来说, 对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) \\ &\quad - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \end{aligned} \quad (1.4)$$

利用概率的性质与公式, 可以分析计算比较复杂的事件的概率.

例 1.10 设 A, B 为两个事件, 已知 A 发生的概率为 0.6, A 与 B 都发生的概率为 0.1, A 与 B 都不发生的概率为 0.15, 求

- (1) A 发生且 B 不发生的概率;
 (2) A 与 B 至少有一个发生的概率.

解 由题意知 $P(A)=0.6, P(AB)=0.1, P(\bar{A}\bar{B})=0.15$, 故

- (1) A 发生且 B 不发生的概率为

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.6-0.1=0.5$$

- (2) A 与 B 至少有一个发生的概率为

$$P(A \cup B)=1-P(\overline{A \cup B})=1-P(\bar{A}\bar{B})=1-0.15=0.85$$

例 1.11 已知 $P(\bar{A})=0.5, P(\bar{A}B)=0.2, P(B)=0.4$, 求

- (1) $P(AB)$; (2) $P(A\bar{B})$; (3) $P(\bar{A}\bar{B})$.

解 (1) 由 $P(\bar{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB)$, 可得

$$P(AB)=P(B)-P(\bar{A}B)=0.4-0.2=0.2$$

- (2) 由 $P(A)=1-P(\bar{A})=1-0.5=0.5$, 可得

$$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.2=0.3$$

- (3) 由 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.2=0.7$, 可得

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A \cup B})=1-P(A \cup B)=1-0.7=0.3$$

例 1.12 设事件 A 和 B 满足 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$, 已知 $P(A)=0.3$, 求 $P(B)$ 的值.

解 根据题意, 有

$$P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A \cup B})=1-P(A \cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

由此可得 $1-P(A)-P(B)=0$. 已知 $P(A)=0.3$, 故有

$$P(B)=1-P(A)=0.7$$

习题 1-2

1. 设 $P(A)=0.1, P(A \cup B)=0.3$, 且 A 与 B 互不相容, 求 $P(B)$.
2. 设 $P(A)=0.5, P(B)=0.4, P(A-B)=0.3$, 求 $P(A \cup B)$ 和 $P(\bar{A}\bar{B})$.
3. 已知 A, B 是二事件, 且 $P(A)=0.5, P(B)=0.7, P(A \cup B)=0.8$, 求 $P(B-A)$ 与 $P(A-B)$.
4. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$, 求事件 A, B, C 都不发生的概率.

5. 设 $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{1}{2}$, 试就以下三种情况分别求 $P(B\bar{A})$:

- (1) $AB=\emptyset$; (2) $A \subset B$; (3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

6. 设 $P(A)=0.6, P(B)=0.7$, 试分别求 $P(A \cup B)$ 和 $P(AB)$ 可能取到的最大值与最小值.

7. 设事件 $A \subset B$, 证明 $P(A) \leq P(B)$.

8. 对任意一组事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 证明

- (1) $P(A_1 A_2) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1$;
 (2) $P(A_1 A_2 \cdots A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1)$.

1.3 古典概型与几何概型

概率的公理化定义给出了概率应当具备的基本性质,但并未说明如何确定概率.事实上,对于不同类型的随机试验,有着不同的确定概率的方法.本节介绍两类比较简单的随机试验模型,其共同特点是试验的结果具有等可能性.

1.3.1 古典概型

最简单的随机试验模型是有限等可能模型,即试验仅有有限个可能结果,并且每次试验中各种结果出现的可能性相同.这类随机试验模型是概率论发展初期的主要研究对象,称为古典概型.

古典概型的特征在数学上可表述如下.

- (1) 试验的样本空间由有限个样本点组成,记作

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$$

- (2) 每次试验中各样本点出现的概率相同,有

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n)$$

根据古典概型的上述特征,注意到样本点是两两互斥的,由概率的规范性和可加性,可得

$$P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = 1$$

故各样本点的概率为

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$$

设随机事件 A 含有 k 个样本点,记

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_k}\} = \bigcup_{j=1}^k \omega_{i_j}$$

则根据概率的可加性,事件 A 的概率为

$$P(A) = P\left(\bigcup_{j=1}^k \omega_{i_j}\right) = \sum_{j=1}^k P(\omega_{i_j}) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

根据以上分析,得到古典概型确定概率的方法如下.

概率的古典定义 设古典概型的样本空间 Ω 含有 n 个样本点,事件 A 含有 k 个样本点,则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{事件 } A \text{ 所含样本点的个数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 所含样本点的个数}} \quad (1.5)$$

按古典定义计算的概率称为古典概率.计算古典概率的关键是求出样本空间和事件所含样本点的个数,通常需要用到排列组合知识.

例 1.13 袋内有 5 个白球和 3 个黑球, 从中任取两球, 求下列事件的概率:

- (1) 取到两个白球;
- (2) 取到一个白球一个黑球.

解 从袋内 8 个球中任取两球, 共有 C_8^2 种取法, 即样本空间 Ω 所含样本点的个数为 $C_8^2 = 28$. 下面分别讨论:

(1) 设事件 A 为“取到两个白球”. 从 5 个白球中任取两球, 共有 C_5^2 种取法, 即事件 A 所含样本点的个数为 $C_5^2 = 10$, 故

$$P(A) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

(2) 设事件 B 为“取到一个白球一个黑球”. 从 5 个白球和 3 个黑球中分别任取一球, 共有 $C_5^1 C_3^1$ 种取法, 即事件 B 所含样本点的个数为 $C_5^1 C_3^1 = 15$, 故

$$P(B) = \frac{C_5^1 C_3^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}$$

例 1.14 一批产品共 100 件, 其中 95 件正品, 5 件次品. 从中每次任取一件, 连取两次. 分别按以下两种取法, 求至少取到一件正品的概率.

- (1) 第一次取出产品后放回;
- (2) 第一次取出产品后不放回.

解 设事件 A 为“至少取到一件正品”, 下面分别讨论.

(1) 有放回取法. 从 100 件产品中连取两件, 共有 100^2 种取法. 其中, 取到两件正品有 95^2 种取法; 取到一件正品一件次品(考虑两种顺序)有 $2 \times 95 \times 5$ 种取法, 故所求概率为

$$P(A) = \frac{95^2 + 95 \times 5 \times 2}{100^2} = 0.9975$$

(2) 无放回取法. 从 100 件产品中连取两件, 共有 $P_{100}^2 = 100 \times 99$ 种取法. 其中, 取到两件正品有 $P_{95}^2 = 95 \times 94$ 种取法; 取到一件正品一件次品(考虑两种顺序)有 $2P_{95}^1 P_5^1 = 2 \times 95 \times 5$ 种取法, 故所求概率为

$$P(A) = \frac{95 \times 94 + 95 \times 5 \times 2}{100 \times 99} = 0.9980$$

此例用逆事件概率计算比较简单, 具体说明如下.

设事件 A 为“至少取到一件正品”, 则逆事件 $\bar{A}$ 为“取到两件次品”.

(1) 有放回取法. 从 100 件产品中连取两件, 共有 100^2 种取法. 取到两件次品有 5^2 种取法, 故

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5^2}{100^2} = 0.9975$$

(2) 无放回取法. 从 100 件产品中连取两件, 共有 $P_{100}^2 = 100 \times 99$ 种取法. 取到两件次品有 $P_5^2 = 5 \times 4$ 种取法, 故

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5 \times 4}{100 \times 99} = 0.9980$$

例 1.15 将 n 个球随机放入 N 个盒子 ($n \leq N$), 每个球都等可能地放入任意一个盒子, 求下列事件的概率:

(1) 指定的 n 个盒子中各有一球;

(2) 恰好有 n 个盒子中各有一球.

解 每个球有 N 种放法, 故 n 个球共有 N^n 种放法. 下面分别讨论:

(1) 设事件 A 为“指定的 n 个盒子中各有一球”. 将 n 个球放入指定的 n 个盒子, 每盒一球, 共有 $n!$ 种放法, 故所求概率为

$$P(A) = \frac{n!}{N^n}$$

(2) 设事件 B 为“恰好有 n 个盒子中各有一球”. 考虑先从 N 个盒子中任意选定 n 个盒子, 再将 n 个球放入选定的 n 个盒子, 每盒一球, 共有 $C_N^n n!$ 种放法, 故所求概率为

$$P(B) = \frac{C_N^n n!}{N^n}$$

例 1.16 某班有 50 名学生, 求至少有两人生日相同的概率.

解 此例可用逆事件概率计算, 设事件 A 为“50 名学生的生日互不相同”.

考虑将 50 名学生的生日排成一列, 每个人的生日均可能是 365 天中的任何一天, 共有 365^{50} 种排法. 其中, 50 名学生的生日互不相同的排列, 相当于从 365 天中任选 50 天的排列, 共有 P_{365}^{50} 种排法. 故至少有两人生日相同的概率为

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{P_{365}^{50}}{365^{50}} = 0.97$$

此例表明, 几乎可以肯定一个班 50 名学生中至少有两人生日相同.

例 1.17 在整数 1, 2, ..., 1000 中随机地取一个数, 问取到的数既不能被 3 整除, 又不能被 4 整除的概率是多少?

解 设事件 A 为“取到的数能被 3 整除”, 事件 B 为“取到的数能被 4 整除”, 则积事件 AB 为“取到的数能被 12 整除”, 由

$$333 < \frac{1000}{3} < 334, \quad \frac{1000}{4} = 250, \quad 83 < \frac{1000}{12} < 84$$

分别可得

$$P(A) = \frac{333}{1000}, \quad P(B) = \frac{250}{1000}, \quad P(AB) = \frac{83}{1000}$$

故所求概率为

$$\begin{aligned} P(\bar{A}\bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\ &= 1 - \frac{333}{1000} - \frac{250}{1000} + \frac{83}{1000} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例 1.18 袋内有 m 个白球, n 个黑球. 无放回地每次从中任取一球, 求第 k 次取到白球的概率.

解 将 $m+n$ 个球视作互不相同, 依次取出排成一列, 共有 $(m+n)!$ 种排法. 考虑第 k 个位置为白球的排列, 则该白球可以是 m 个白球中的任意一个, 其余的 $m+n-1$ 个位置

可以是剩下的 $m+n-1$ 个球的任意排列, 故第 k 个位置为白球共有 $m(m+n-1)!$ 种排法. 设 A_k 为事件“第 k 次取到白球”, 则所求概率为

$$P(A_k) = \frac{m(m+n-1)!}{(m+n)!} = \frac{m}{m+n}$$

注意到此例的结果与 k 无关, 即取到白球的概率与取球的先后次序无关. 若将取球理解为抽签, 则意味着抽签是公平的.

1.3.2 几何概型

古典概型是仅有有限个等可能结果的随机试验模型. 现在考虑有不可列个等可能结果的随机试验模型, 其样本空间为某个有界几何区域, 且每次试验中各样本点等可能出现. 这类随机试验模型中的概率可以通过几何方法确定, 称为几何概型.

设 Ω 为几何空间(直线、平面、空间等)中的有界区域, 其测度(长度、面积、体积等)为 $m(\Omega)$. 向区域 Ω 中随机投一点, 设投点落到 Ω 中任何一点的可能性相同, 则投点落入 Ω 中任一子区域 A 的可能性与 A 的测度 $m(A)$ 成正比, 而与 A 的位置和形状无关. 记事件 A 为“投点落入区域 A ”, 则事件 A 的概率

$$P(A) = \lambda m(A)$$

根据概率的规范性, 有

$$P(\Omega) = \lambda m(\Omega) = 1$$

故 $\lambda = \frac{1}{m(\Omega)}$, 从而事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

根据以上分析, 得到几何概型确定概率的方法如下:

概率的几何定义 设几何概型的样本空间 Ω 为一有界区域, 其测度为 $m(\Omega)$; 事件 A 为样本空间 Ω 的子区域, 其测度为 $m(A)$, 则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\text{事件} A \text{的测度}}{\text{样本空间} \Omega \text{的测度}} \quad (1.6)$$

按几何定义计算的概率称为几何概率. 计算几何概率的关键是求出样本空间和事件区域的测度, 有时需要用到积分知识.

例 1.19 甲、乙两人相约上午 9 点到 10 点之间在某处会面, 并约定先到者须等候另一个人 15 分钟, 过时即可离去. 求两人能够会面的概率.

解 考虑以 9 点为时刻 0, 分钟为单位. 记甲、乙的到达时刻分别为 x, y , 则样本空间为平面区域

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}$$

其面积为 $m(\Omega) = 60^2$.

记事件 A 为“两人能够会面”, 则区域

$$A = \{(x, y) | (x, y) \in \Omega, |x - y| \leq 15\}$$

见图 1.2 中阴影部分, 其面积为 $m(A) = 60^2 - 45^2$.

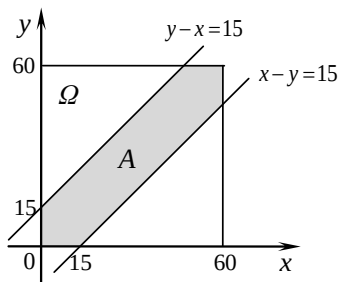


图 1.2

故所求概率为

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{60^2 - 45^2}{60^2} = \frac{7}{16}$$

例 1.20 在区间 $[0, 2]$ 中任取两个数, 求两数之积不小于 1 的概率.

解 记所取的两个数分别为 x, y , 则样本空间为平面区域

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$$

其面积为 $m(\Omega) = 4$.

记事件 A 为“两数之积不小于 1”, 则区域

$$A = \{(x, y) | (x, y) \in \Omega, xy \geq 1\}$$

见图 1.3 中阴影部分. 其面积为

$$m(A) = \int_{0.5}^2 \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx = (2x - \ln x) \Big|_{0.5}^2 = 3 - 2\ln 2$$

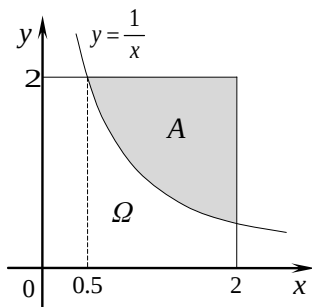


图 1.3

故所求概率为

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{3 - 2\ln 2}{4}$$

习题 1-3

1. 有一批桶装酒共 14 桶, 其中甲级 6 桶, 乙级 8 桶, 不小心把标签搞混了. 现随意取 3 桶酒, 试问恰好有 1 桶甲级酒、2 桶乙级酒的概率是多少?

2. 有不同的数学书 6 本、物理书 4 本、化学书 3 本, 从中任取两本, 试求两本书属于不同学科的概率.

3. 设 10 把钥匙中有 3 把能打开门, 从中任取两把, 求能打开门的概率.

4. 袋内有编号为 1 到 5 的五个球, 中有放回地每次取一球, 连取三次, 问三个球的编号组成奇数的概率为多少?

5. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只, 问这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少?

6. 一批产品共 100 件, 其中 98 件正品, 2 件次品, 从中任取 3 件, 分别按三种取法, 即一次取 3 件, 有放回地连取 3 件, 无放回地连取 3 件, 求下列事件的概率:

(1) 取出的 3 件产品中恰有一件次品的概率;

(2) 取出的 3 件产品中至少有一件次品的概率.

7. n 个朋友随机地围绕圆桌就座, 求其中甲、乙两人坐在一起(即甲、乙两人的座位相邻)的概率.

8. 从 0, 1, L, 9 中任取三个不同的数字, 试求下列事件的概率:

(1) 三个数字中含有 0 或 5;

(2) 三个数字中不含 0 和 5.

9. 某宾馆有三部电梯, 现有五人在一楼要乘电梯上楼, 假定每个人都等可能地进入任何一部电梯, 求每部电梯中至少有一人的概率.

10. 某公共汽车从始发站开出时有 8 名乘客, 沿途将停靠 10 个车站, 假设这 8 名乘客每人都等可能地在各站下车. 试求下列事件的概率:

(1) 8 人在不同站下车;

(2) 8 人在同一站下车;

(3) 8 人都在终点站下车;

(4) 8 人中恰有三人在终点站下车.

11. 一个小组有 5 名成员, 其中每人在一星期 7 天中等可能地任选一天参加义务劳动. 试求下列事件的概率:

(1) 指定的 5 天各有一人参加劳动;

(2) 有 5 天各有一人参加劳动.

12. 公共汽车站每隔 5 分钟有一辆公共汽车通过, 乘客在任一时刻等可能地到达车站的, 求乘客候车不超过 3 分钟的概率.

13. 在区间 $(0, 1)$ 内任取两个实数, 试求两数之和小于 $\frac{6}{5}$ 的概率.

14. 某码头只能容纳一船停靠, 现预知某日将有两船到来, 且在 24 小时内任一时刻到来的可能性相等. 如果两船停靠的时间分别为 4 小时和 6 小时, 试求有一船要在江心等待的概率.

15. (蒲丰投针问题) 设平面上一系列平行线的间距为 a , 向平面投一长为 l 的针 ($l < a$), 求针与平行线相交的概率.

1.4 条件概率

本节介绍随机事件的条件概率的概念. 并由条件概率给出计算概率的三个基本公式: 乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式.

1.4.1 条件概率的定义

在随机试验中, 各随机事件作为同一样本空间的子集, 相互之间有时存在着一定的关系. 因此, 在研究某事件发生的可能性时, 除考虑事件本身的概率外, 有时还需考虑该事件与其他事件的关系, 研究其他事件发生对该事件发生概率的影响.

例 1.21 将一枚硬币连掷两次, 考虑以下两个问题:

- (1) 求有反面出现的概率;
- (2) 在已知有正面出现的条件下, 求有反面出现的概率.

解 根据试验的样本空间, 分别讨论如下:

- (1) 连掷两次硬币共有 4 个样本点:

(正, 正), (正, 反), (反, 正), (反, 反)

易知有反面出现的概率为 $\frac{3}{4}$.

- (2) 在已知有正面出现的条件下, 连掷两次硬币仅有 3 个样本点:

(正, 正), (正, 反), (反, 正)

此时有反面出现的概率为 $\frac{2}{3}$.

显然, 上例中两个问题的概率含义不同. 如果记事件 A 为“有正面出现”, 事件 B 为“有反面出现”, 则第一个问题是求事件 B 的概率 $P(B)$; 第二个问题是求在事件 A 发生条件下的事件 B 的概率, 此概率称为条件概率, 记作 $P(B|A)$.

对上例作进一步分析, 注意到事件 AB 为“正面反面都出现”, 由

$$P(A) = \frac{3}{4}, P(AB) = \frac{2}{4}, P(B|A) = \frac{2}{3}$$

可得到关系式

$$P(B|A) = \frac{2}{3} = \frac{2/4}{3/4} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

此关系式具有普遍意义, 下面给出条件概率的一般定义.

定义 1.5 设 A, B 为两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (1.7)$$

为在事件 A 发生的条件下, 事件 B 的条件概率.

不难验证, 条件概率满足概率的三条公理, 即

- (1) 非负性: 对任一事件 B , 有 $P(B|A) \geq 0$;
- (2) 规范性: 对必然事件 Ω , 有 $P(\Omega|A)=1$;
- (3) 可加性: 对任意有限个或可列个两两互斥的事件 $B_1, B_2, \dots, B_i, \dots$, 有

$$P\left(\bigcup_i B_i | A\right) = \sum_i P(B_i | A)$$

因此, 条件概率具有概率的所有性质, 例如

$$P(\bar{B} | A) = 1 - P(B | A)$$

$$P(B \cup C | A) = P(B | A) + P(C | A) - P(BC | A)$$

在实际问题中, 条件概率可以按定义计算, 也可以用样本缩减法计算: 事件 A 的发生一般将缩减事件 B 的样本空间, 在缩减后的样本空间中计算事件 B 的概率, 即为 $P(B|A)$.

例 1.22 袋内有 7 个白球, 3 个黑球, 从中无放回地每次取一球, 连取两次.

- (1) 已知第一次取到黑球, 求第二次仍取到黑球的概率;
- (2) 已知第二次取到黑球, 求第一次也取到黑球的概率.

解 将 10 个球视作互不相同, 记事件 A_i 为“第 i 次取到黑球”, $i=1, 2$.

(1) 第一次取到黑球后, 样本空间缩减为 7 个白球和 2 个黑球, 故第二次仍取到黑球的条件概率

$$P(A_2 | A_1) = \frac{2}{9}$$

(2) 第二次取到黑球对第一次取球结果的影响不易直观理解, 现按定义计算. 根据题意, 有

$$P(A_1 A_2) = \frac{P_3^2}{P_{10}^2} = \frac{1}{15}$$

由 1.3 节的例 1.18 可知 $P(A_2) = \frac{3}{10}$, 故第一次也取到黑球的条件概率为

$$P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_2)} = \frac{2}{9}$$

1.4.2 乘法公式

根据条件概率的定义, 可以直接得到概率的乘法公式.

乘法公式 设 A, B 为两个事件, 且 $P(A) > 0$, 则有

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad (1.8)$$

一般来说, 对于 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 当 $P(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) > 0$ 时, 有

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1}) \quad (1.9)$$

例 1.23 设一批产品的合格品率为 96%, 合格品中的一等品率为 75%. 在该批产品中任取一件, 求取到一等品的概率.

解 设事件 A 为“取到合格品”, 事件 B 为“取到一等品”. 根据题意, 有 $P(A) = 0.96$, $P(B|A) = 0.75$.

注意到 $B \subset A$, 所求概率为

$$P(B) = P(AB) = P(A)P(B|A) = 0.96 \times 0.75 = 0.72$$

例 1.24 袋内有 m 个白球, n 个黑球. 每次从袋中任取一球, 观察颜色后放回, 并再放入 k 个与其同色的球. 如此连续取球四次, 求第一、二次取到白球且第三、四次取到黑球的概率.

解 设事件 A_i 为“第 i 次取到白球”, 则逆事件 $\bar{A}_i$ 为“第 i 次取到黑球”, $i=1, 2, 3, 4$, 所求概率为

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_1 A_2)P(\bar{A}_4|A_1 A_2 \bar{A}_3) \\ &= \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m+k}{m+n+k} \cdot \frac{n}{m+n+2k} \cdot \frac{n+k}{m+n+3k} \end{aligned}$$

1.4.3 全概率公式

在计算复杂事件的概率时, 往往可以根据事件发生的各种情况或原因, 将复杂事件分解为两两互斥的简单事件, 从而将复杂事件的概率化为简单事件的概率之和来计算.

下面首先介绍完备事件组的概念.

定义 1.6 如果一组有限个或可列个事件 $A_1, A_2, \dots$, 满足

(1) $A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j=1, 2, \dots$;

(2) $\bigcup_i A_i = \Omega$.

则称 $A_1, A_2, \dots$ 为完备事件组.

利用完备事件组 $A_1, A_2, \dots$, 可以将任一事件 B 分解为两两互斥的事件之并

$$B = \Omega B = \left(\bigcup_i A_i \right) B = \bigcup_i A_i B$$

定理 1.1(全概率公式) 设随机试验的样本空间为 Ω , 且 $A_1, A_2, \dots$ 为完备事件组, 满足 $P(A_i) > 0, i=1, 2, \dots$, 则对任一事件 B , 有

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B|A_i) \quad (1.10)$$

证明 将事件 B 表示为

$$B = \Omega B = \left(\bigcup_i A_i \right) B = \bigcup_i A_i B$$

注意到 $(A_i B)(A_j B) = A_i A_j B = \emptyset, i \neq j$. 由概率的可加性及乘法公式, 即可得到

$$P(B) = P\left(\bigcup_i A_i B\right) = \sum_i P(A_i B) = \sum_i P(A_i)P(B|A_i)$$

在实际问题中, 如果有多种原因 $A_i, i=1, 2, \dots$ 可能导致事件 B 发生, 并且已知每种原因 A_i 出现的概率 $P(A_i)$, 以及在原因 A_i 出现的条件下事件 B 发生的条件概率 $P(B|A_i)$, 则可根据全概率公式计算事件 B 的概率 $P(B)$.

例 1.25 设甲、乙两袋内均有 2 个白球和 3 个黑球, 先从甲袋中任取两球放入乙袋, 再从乙袋中任取一球, 求第二次取到白球的概率.

解 设事件 A_i 为“第一次取到 i 个白球”, $i=0, 1, 2$; 事件 B 为“第二次取到白

球”. 根据题意, 有

$$P(A_0) = \frac{C_2^0 C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}, \quad P(A_1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}, \quad P(A_2) = \frac{C_2^2 C_3^0}{C_5^2} = \frac{1}{10}$$

$$P(B|A_0) = \frac{2}{7}, \quad P(B|A_1) = \frac{3}{7}, \quad P(B|A_2) = \frac{4}{7}$$

根据全概率公式, 第二次取到白球的概率为

$$P(B) = \sum_{i=0}^2 P(A_i)P(B|A_i) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{7} + \frac{6}{10} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{10} \times \frac{4}{7} = 0.4$$

例 1.26 设一批产品中, 甲厂产品 8 箱, 每箱 10 件, 次品率为 0.04; 乙厂产品 6 箱, 每箱 15 件, 次品率为 0.05. 问下列两种方式取到次品的概率是否相同?

- (1) 任取一箱产品, 从中任取一件;
- (2) 将所有产品开箱混合后, 从中任取一件.

解 设事件 A_1, A_2 分别为“取到甲厂产品”, “取到乙厂产品”; 事件 B 为“取到次品”. 根据题意, 有

$$P(B|A_1) = 0.04, \quad P(B|A_2) = 0.05$$

- (1) 在任取一箱的情况下, 取到甲、乙两厂产品的概率分别为

$$P(A_1) = \frac{8}{14}, \quad P(A_2) = \frac{6}{14}$$

根据全概率公式, 取到次品的概率为

$$P(B) = \sum_{i=1}^2 P(A_i)P(B|A_i) = \frac{8}{14} \times 0.04 + \frac{6}{14} \times 0.05 = 0.0443$$

- (2) 在开箱混合后任取一件的情况下, 取到甲、乙两厂产品的概率分别为

$$P(A_1) = \frac{80}{170}, \quad P(A_2) = \frac{90}{170}$$

根据全概率公式, 取到次品的概率为

$$P(B) = \sum_{i=1}^2 P(A_i)P(B|A_i) = \frac{80}{170} \times 0.04 + \frac{90}{170} \times 0.05 = 0.0453$$

故两种方式取到次品的概率不相同.

1.4.4 贝叶斯公式

全概率公式是通过分析导致事件发生的各种原因, 综合计算事件的概率. 现在考虑相反的问题: 在事件已经发生的情况下, 分析事件发生由各种原因导致的可能性, 为此需要分别计算事件发生由每种原因导致的概率.

在下面的论述中, 应当注意两种条件概率的区别: $P(B|A_i)$ 表示原因 A_i 导致事件 B 发生的概率; $P(A_i|B)$ 表示事件 B 发生由原因 A_i 导致的概率, 两者有着不同的含义. 例如, 当 $A_i \subset B$ 时, 原因 A_i 必然导致事件 B 发生, 有 $P(B|A_i) = 1$; 但事件 B 发生并不一定由原因 A_i 导致, 还可能由其他原因, 故未必有 $P(A_i|B) = 1$. 现在的问题是如何计算 $P(A_i|B)$.

定理 1.2(贝叶斯公式) 设随机试验的样本空间为 Ω , 且 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为完备事件组, B

为任一事件, 满足 $P(A_i) > 0, i=1, 2, L, P(B) > 0$, 则有

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}, \quad i=1, 2, L \quad (1.10)$$

证明 根据全概率公式, 有

$$P(B) = \sum_j P(A_j)P(B|A_j)$$

故由条件概率的定义及乘法公式, 即可得到

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}, \quad i=1, 2, L$$

例 1.27 某厂有三条流水线生产同一种产品, 第一、二、三条流水线的产量分别占全厂产量的 25%, 35%, 40%; 次品率分别为 0.04, 0.03, 0.02. 现从出厂产品中任取一件, 问:

(1) 取到次品的概率是多少?

(2) 已知取到次品, 该次品由哪条流水线生产的可能性较大?

解 设事件 A_i 为“取到第 i 条流水线的产品”, $i=1, 2, 3$; 事件 B 为“取到次品”. 根据题意, 分别有

$$P(A_1) = 0.25, \quad P(A_2) = 0.35, \quad P(A_3) = 0.40$$

$$P(B|A_1) = 0.04, \quad P(B|A_2) = 0.03, \quad P(B|A_3) = 0.02$$

(1) 根据全概率公式, 有

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i) = 0.25 \times 0.04 + 0.35 \times 0.03 + 0.40 \times 0.02 = 0.0285$$

即取到次品的概率为 0.0285.

(2) 根据贝叶斯公式, 分别有

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.25 \times 0.04}{0.0285} = 0.3509$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.35 \times 0.03}{0.0285} = 0.3684$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0.40 \times 0.02}{0.0285} = 0.2807$$

故该次品由第二条流水线生产的可能性较大.

贝叶斯公式有着多方面的应用. 在实际问题中, 概率 $P(A_i), i=1, 2, L$ 称为先验概率, 反映了事件 B 发生前, 根据以往的数据或经验, 对各种原因 A_1, A_2, L 出现可能性大小的原有衡量和判断. 条件概率 $P(A_i|B), i=1, 2, L$ 称为后验概率, 反映了事件 B 发生后, 根据事件 B 所含的信息, 对各种原因 A_1, A_2, L 出现可能性大小的重新认识和修正.

例 1.28 设某银行根据客户的还款情况及时调整对客户的信用评价(信用良好的可信度). 以往的统计资料表明, 信用良好的客户按期还款率为 95%, 信用不足的客户按期还款率为 50%. 某客户向银行贷款时的信用评价为 0.9, 问: 该客户是否按期还款对其信用评价有何影响.

解 设事件 A 为“信用良好”，事件 B 为“按期还款”。根据题意，分别有

$$P(B|A) = 0.95, \quad P(B|\bar{A}) = 0.5$$

$$P(\bar{B}|A) = 0.05, \quad P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.5$$

已知该客户的原信用评价为 $P(A) = 0.9$ ，则 $P(\bar{A}) = 0.1$ ，下面分别讨论。

(1) 在按期还款的情况下，根据贝叶斯公式，有

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} = \frac{0.9 \times 0.95}{0.9 \times 0.95 + 0.1 \times 0.5} = 0.94$$

故银行对该客户的信用评价将调高为 0.94。

(2) 在未按期还款的情况下，根据贝叶斯公式，有

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A)P(\bar{B}|A)}{P(A)P(\bar{B}|A) + P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})} = \frac{0.9 \times 0.05}{0.9 \times 0.05 + 0.1 \times 0.5} = 0.47$$

故银行对该客户的信用评价将调低为 0.47。

习题 1-4

1. 已知 $P(A) = \frac{1}{4}$ ， $P(B|A) = \frac{1}{3}$ ， $P(A|B) = \frac{1}{2}$ ，求 $P(A \cup B)$ 。

2. 设 10 件产品中有 4 件次品，从中任取两件。已知所取两件产品中有一件次品，求另一件也是次品的概率。

3. 为了防止意外，矿井内同时装有两种报警系统。系统 I 和系统 II 单独使用时，有效的概率分别为 0.92 和 0.93。在系统 I 失灵的条件下，系统 II 仍有效的概率为 0.85，试求：

(1) 系统 I 和系统 II 都有效的概率；

(2) 系统 II 失灵而系统 I 有效的概率；

(3) 在系统 II 失灵的条件下，系统 I 仍有效的概率。

4. 某人忘记了电话号码的最后一个数字而随意拨号，求能在三次拨号内接通电话的概率。如果已知最后一个数字是奇数，则此概率是多少？

5. 有两箱相同型号的零件，第一箱装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱装 30 件，其中 18 件一等品。现从两箱中任选一箱，再从该箱中无放回地每次取一件，连取两次。试求：(1) 第一次取到一等品的概率；

(2) 在第一次取到一等品的条件下，第二次也取到一等品的概率。

6. 在一批产品中，甲、乙、丙三厂的产品分别占 40%, 50%, 10%。已知三厂产品的次品率分别为 0.2, 0.1, 0.3，试求这批产品的次品率。

7. 甲袋中有 2 个白球和 4 个黑球，乙袋中有 5 个白球和 3 个黑球。先从甲袋中任取两球放入乙袋，再从乙袋中任取一球。试求：

(1) 从乙袋中取到的是白球的概率；

(2) 已知从乙袋中取到的是黑球，求从甲袋中取出的是一个黑球与一个白球的概率。

8. 设 10 张奖券中有 4 张可以中奖，每人依次任取一张，求：

(1) 第一人中奖的概率；

(2) 第二人中奖的概率;

(3) 前三人中恰有一人中奖的概率.

9. 有朋友自远方来, 乘火车、轮船、汽车、飞机的概率分别为 0.3, 0.2, 0.1, 0.4; 乘各种交通工具迟到的概率相应为 0.25, 0.3, 0.1, 0. 现已知朋友迟到了, 问乘哪种交通工具的可能性最大.

10. 玻璃杯成箱出售, 每箱 20 只, 其中有 0, 1, 2 个次品的概率分别为 0.8, 0.1, 0.1. 顾客在购买时任选一箱, 开箱任取 4 个察看, 如果未发现次品就买下该箱, 否则退回. 试求:

(1) 顾客买下该箱的概率;

(2) 顾客买下的该箱中确实没有次品的概率.

11. 来自三个地区的考生报名表分别为 10 份、15 份、25 份; 其中女生报名表分别为 3 份、7 份、5 份. 任取一个地区的报名表, 从中无放回地先后抽取两份, 试求:

(1) 先抽到的一份是女生表的概率;

(2) 已知后抽到的一份是男生表, 求先抽到的一份是女生表的概率.

1.5 事件的独立性

在 1.4 节中, 着重讨论了事件之间的关系对概率的影响, 给出了概率的乘法公式: 当 $P(A) > 0$ 时, 有

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

其中, $P(B|A)$ 为事件 A 发生条件下事件 B 的条件概率, 一般不同于事件 B 的概率 $P(B)$. 但在实际问题中, 两个事件 A, B 之间也可能没有任何关系. 例如, 将一枚硬币连掷两次, 可以认为两次掷出的结果彼此无关, 第一次掷出哪一面向上都不会影响第二次掷出正面或反面的概率. 显然, 当事件 A 的发生不影响事件 B 的概率时, 应有

$$P(B|A) = P(B)$$

从而概率的乘法公式为

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

此式反映了事件 A 的发生不影响事件 B 发生的概率. 对称地, 也可理解为事件 B 的发生不影响事件 A 发生的概率, 由此引入事件的独立性概念.

1.5.1 两个事件的独立性

定义 1.7 如果两个事件 A, B 满足

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (1.11)$$

则称事件 A 与 B 相互独立, 简称独立.

应当注意, 独立与互斥是不同的概念: 两个事件互斥是指一个事件发生时另一事件不可能发生; 两个事件独立是指一个事件的发生不影响另一事件发生的概率. 事实上, 独立必不互斥, 互斥必不独立.

关于两个事件的独立性, 有下列性质:

性质 1 当 $P(A) > 0$ 时, A 与 B 独立的充分必要条件是 $P(B|A) = P(B)$.

证明 如果 A 与 B 独立, 则 $P(AB) = P(A)P(B)$, 根据条件概率的定义, 可得

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$$

反之, 如果 $P(B|A) = P(B)$, 则根据概率的乘法公式, 有

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$$

故 A 与 B 独立.

性质 2 如果 A 与 B 独立, 则 $\bar{A}$ 与 B , A 与 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 各对事件均独立.

证明 如果 A 与 B 独立, 则有

$$P(\bar{A}B) = P(B - A) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = P(\bar{A})P(B)$$

故 $\bar{A}$ 与 B 独立. 同理可证 A 与 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 均独立.

性质 3 如果 $P(A) = 0$ 或 1, 则 A 与任何事件独立.

证明 设 B 为任一事件, 分别论证如下:

(1) 如果 $P(A) = 0$, 则由 $0 \leq P(AB) \leq P(A) = 0$, 可得

$$P(AB) = 0 = P(A)P(B)$$

故 A 与 B 独立.

(2) 如果 $P(A) = 1$, 则 $P(\bar{A}) = 0$, 故 $\bar{A}$ 与 B 独立, 再由性质 2 可知 A 与 B 独立.

性质 3 表明, 必然事件及不可能事件与任何事件独立. 但应注意, 概率为 0 的事件未必是不可能事件, 概率为 1 的事件也未必是必然事件.

例 1.29 连掷一枚硬币, 设事件 A 为“正反两面都出现”, 事件 B 为“至多出现一次正面”. 按下列两种情形, 分别判断 A 与 B 的独立性.

(1) 将硬币连掷两次;

(2) 将硬币连掷三次.

解 根据题意, 事件 AB 为“恰好出现一次正面”.

(1) 连掷两次硬币共有 4 个样本点:

(正, 正), (正, 反), (反, 正), (反, 反)

易知事件 A, B, AB 的概率分别为

$$P(A) = \frac{2}{4}, \quad P(B) = \frac{3}{4}, \quad P(AB) = \frac{2}{4}$$

由此可得 $P(AB) \neq P(A)P(B)$, 故 A 与 B 不独立.

(2) 连掷三次硬币共有 8 个样本点:

(正, 正, 正), (正, 正, 反), (正, 反, 正), (正, 反, 反)

(反, 正, 正), (反, 正, 反), (反, 反, 正), (反, 反, 反)

易知事件 A, B, AB 的概率分别为

$$P(A) = \frac{6}{8}, \quad P(B) = \frac{4}{8}, \quad P(AB) = \frac{3}{8}$$

由此可得 $P(AB) = P(A)P(B)$ ，故 A 与 B 独立.

1.5.2 有限个事件的独立性

定义 1.8 如果三个事件 A, B, C 满足

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(AC) = P(A)P(C) \end{cases} \quad (1.12)$$

则称事件 A, B, C 两两独立. 如果同时还满足

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \quad (1.13)$$

则称事件 A, B, C 相互独立.

根据定义可知, 两两独立未必相互独立, 相互独立一定两两独立.

例 1.30 在数字 1, 2, 3, 4 中任取一数. 设事件 A, B, C 分别为“取到 1 或 2”, “取到 1 或 3”, “取到 1 或 4”, 判断 A, B, C 的独立性.

解 根据题意, 有

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}, \quad P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4}, \quad P(ABC) = \frac{1}{4}$$

由此分别得到

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}, \quad P(BC) = P(B)P(C) = \frac{1}{4}, \quad P(AC) = P(A)P(C) = \frac{1}{4}$$

故 A, B, C 两两独立; 但由

$$P(ABC) = \frac{1}{4}, \quad P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$$

可知 $P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$, 故 A, B, C 不相互独立.

一般来说, 对于有限个事件的独立性, 有如下定义:

定义 1.9 如果 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中的任意 k 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$, $2 \leq k \leq n$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, 均满足

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}) \quad (1.14)$$

则称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立.

显然, 由 n 个事件相互独立可推出其两两独立, 但反之不成立.

从直观上来说, n 个事件两两独立是指其中任一事件的概率都不受其他任何一个事件单独发生的影响, 但仍可能受其他两个或以上事件同时发生的影响. 而 n 个事件相互独立是指其中任一事件的概率都不受其他任何一个或多个事件发生的影响.

关于 n 个事件的独立性, 有下列性质:

性质 1 如果 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 则其中任意 m ($2 \leq m \leq n$) 个事件均相互独立.

证明 根据定义直接可证.

性质 2 如果 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 则将其中任意 m ($2 \leq m \leq n$) 个事件替换成相应的逆事件后, 所得到的 n 个事件仍相互独立.

证明 考虑 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意 k ($2 \leq k \leq n$) 个事件, 因为积运算满足交换律, 不妨就取 $A_1, A_2, \dots, A_k$, 并将 A_1 替换成 $\bar{A}_1$. 根据 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 可得

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_1 A_2 \dots A_k) &= P(A_2 \dots A_k) - P(A_1 A_2 \dots A_k) \\ &= (1 - P(A_1))P(A_2) \dots P(A_k) \\ &= P(\bar{A}_1)P(A_2) \dots P(A_k) \end{aligned}$$

以上分析表明, 将 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任一事件替换成逆事件后仍相互独立. 进而可知, 将 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意 m 个事件逐次替换成逆事件后仍相互独立.

性质 3 如果 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$$

证明 根据逆事件的概率及性质 2, 直接可得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$$

利用事件的独立性及相关性质, 可以简化概率的计算. 在实际问题中, 判断事件的独立性往往不是根据定义, 而是根据问题的实际意义, 判断事件之间是否存在影响和关系, 独立意味着不存在任何关系. 例如, 在抽样问题中, 从直观上容易知道, 有放回抽样的结果相互独立, 无放回抽样的结果相互不独立.

例 1.31 设系统由 4 个元件构成, 各元件的工作状态相互独立, 每个元件的可靠性 (正常工作的概率) 为 p , $0 < p < 1$. 分别求图 1.4 所示两个系统的可靠性.

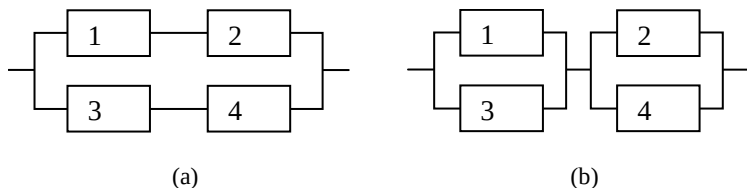


图 1.4

解 设事件 A_i 为“第 i 个元件正常工作”, $i=1, 2, 3, 4$; 事件 B 为“系统正常工作”. 根据题意, A_1, A_2, A_3, A_4 相互独立.

(1) 对于图 1.4(a)所示系统, 事件 $B = A_1 A_2 \cup A_3 A_4$, 系统的可靠性为

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 A_2 \cup A_3 A_4) = P(A_1 A_2) + P(A_3 A_4) - P(A_1 A_2 A_3 A_4) \\ &= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\ &= 2p^2 - p^4 \end{aligned}$$

(2) 对于图 1.4(b)所示系统, 事件 $B = (A_1 \cup A_3)(A_2 \cup A_4)$, 系统的可靠性为

$$\begin{aligned} P(B) &= P((A_1 \cup A_3)(A_2 \cup A_4)) = P(A_1 \cup A_3)P(A_2 \cup A_4) \\ &= (P(A_1) + P(A_3) - P(A_1)P(A_3))(P(A_2) + P(A_4) - P(A_2)P(A_4)) \\ &= (2p - p^2)^2 \end{aligned}$$

例 1.32 生产某种产品共需四道工序, 设各道工序的次品率分别为 0.02, 0.03, 0.05, 0.03, 且各道工序互不影响, 求产品的次品率.

解 设事件 A_i 为“第 i 道工序出次品”， $i=1, 2, 3, 4$ ；事件 B 为“产品为次品”，则 $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ ，且 A_1, A_2, A_3, A_4 相互独立，故产品的次品率为

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} \overline{A_4}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4}) \\ &= 1 - (1 - 0.02)(1 - 0.03)(1 - 0.05)(1 - 0.03) \\ &= 0.124 \end{aligned}$$

例 1.33 设每次试验中事件 A 发生的概率为 $\varepsilon > 0$ ，且各次试验的结果相互独立，则不论 ε 如何小，只要试验重复进行下去，事件 A 迟早会发生的概率为 1.

证明 考虑 n 次重复试验，设事件 A_i 为“第 i 次试验中 A 发生”， $i=1, 2, \dots, n$ ，则 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立. 事件 A 在 n 次试验中至少发生一次的概率为

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i)) = 1 - (1 - \varepsilon)^n$$

当试验次数 $n \rightarrow \infty$ 时，可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon)^n = 1$$

此例表明，虽然小概率事件在一次试验中一般不可能发生，但如果将试验重复进行下去，则无论概率多小的事件都迟早会发生.

习题 1-5

1. 设事件 A 与 B 相互独立，且两个事件中仅有 A 发生的概率和仅有 B 发生的概率均为 $\frac{1}{4}$ ，求 $P(A)$ 和 $P(B)$.

2. 设 $P(A) = 0.4$ ， $P(A \cup B) = 0.7$ ，试就以下两种情况求 $P(B)$ ：

(1) 事件 A 与 B 互斥；

(2) 事件 A 与 B 独立.

3. 求证：如果 $P(A) > 0$ ， $P(B) > 0$ ，则

(1) 当 A 与 B 独立时， A 与 B 不互斥；

(2) 当 A 与 B 互斥时， A 与 B 不独立.

4. 设事件 A, B, C 相互独立，证明： $A \cup B$ 与 C 相互独立.

5. 自动报警器由雷达和计算机两部分组成，任一部分发生故障都将导致报警器失灵. 设两部分的工作状态相互独立，且发生故障的概率分别为 0.1 和 0.3，求报警器不失灵的概率.

6. 三个人各自独立地破译一个密码，且破译成功的概率分别为 $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ ，求密码被破译成功的概率.

7. 投掷一个骰子，问需要掷多少次，才能保证不出现 6 点的概率小于 0.3?

8. 加工某种零件可采用两种工艺，第一种工艺有三道工序，各道工序的废品率分别为 0.1, 0.2, 0.3；第二种工艺有两道工序，各道工序的废品率都是 0.3. 采用第一种工艺，合

格品中的一级品率为 0.9; 采用第二种工艺, 合格品中的一级品率为 0.8, 试问采用哪一种工艺加工得到一级品的概率大?

9. 设构成系统的每个元件的可靠性为 p , $0 < p < 1$, 各元件的工作状态相互独立, 分别求图 1.5 所示两个系统的可靠性.

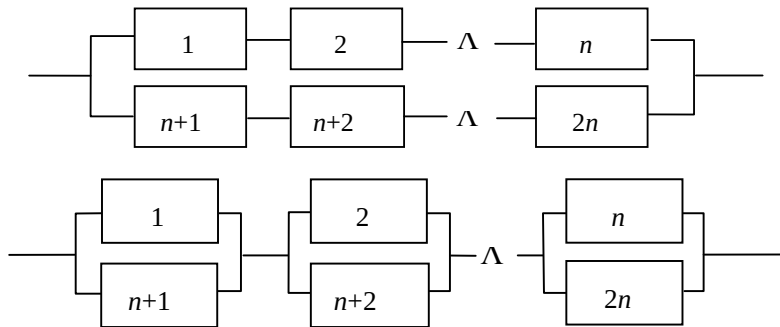


图 1.5

10. 甲、乙两袋内均有两个白球和两个黑球, 从甲、乙两袋中各取一球, 设事件 A 为“甲袋中取到白球”, 事件 B 为“乙袋中取到黑球”, 事件 C 为“两袋中取到同色球”, 试证事件 A, B, C 两两独立但不相互独立.

11. 办公室中有甲、乙、丙三人, 办公室里只有一部电话. 据统计来电话时打给甲、乙、丙的概率分别为 $\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$, 且甲、乙、丙外出办事的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$. 设三人是否外出相互独立, 试求:

- (1) 来电话时无人接的概率;
 - (2) 来电话时被呼叫人在办公室的概率;
- 若某一时间打进三个电话, 试求:
- (3) 这三个电话打给同一个人的概率;
 - (4) 这三个电话打给不同的人的概率.

12. (先下手为强)甲、乙两人射击水平相当, 于是约定比赛规则: 双方对同一目标轮流射击, 若一方失利, 另一方可以继续射击, 直到有人命中目标为止. 首先命中的一方为该轮的获胜者. 你认为先射击者是否一定沾光? 为什么?

1.6 伯努利概型

在实际问题中, 经常遇到在相同条件下重复进行试验, 每次试验只有两种可能结果, 并且各次试验结果相互独立的情况. 本节介绍与此相应的随机试验模型: 伯努利概型.

定义 1.10 如果随机试验只有两种可能的结果, 则称为伯努利试验. 如果在相同条件下将伯努利试验重复进行 n 次, 并且各次试验的结果相互独立, 则称为 n 重伯努利试验或伯努利概型.

一般来说, n 重伯努利试验中每次试验的结果可表示为: 事件 A 发生或事件 $\bar{A}$ 发生. 在相同条件下重复进行试验, 每次试验中事件 A 发生的概率不变. 下面讨论 n 重伯努

利试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率.

定理 1.3(伯努利定理) 设在每次试验中, 事件 A 发生的概率为 p , $0 < p < 1$, 则在 n 重伯努利试验中, 事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n \quad (1.15)$$

证明 设事件 A_i 为“第 i 次试验中事件 A 发生”, 则 $P(A_i) = p$, $i=1, 2, \dots, n$. 在 n 次试验中事件 A 恰好发生 k 次, 可表示为两两互斥的积事件之和

$$\bigcup_{i_1, \dots, i_k} A_{i_1} \bar{A}_{i_2} \bar{A}_{i_3} \dots \bar{A}_{i_n}$$

其中, $i_1, \dots, i_k$ 取遍 $1, 2, \dots, n$ 中任意 k 个数, 共有 C_n^k 种不同取法, $i_{k+1}, \dots, i_n$ 为取定 $i_1, \dots, i_k$ 后剩余的 $n-k$ 个数.

由各次试验结果相互独立, 对每个积事件有

$$P(A_{i_1} \bar{A}_{i_2} \bar{A}_{i_3} \dots \bar{A}_{i_n}) = P(A_{i_1}) P(\bar{A}_{i_2}) P(\bar{A}_{i_3}) \dots P(\bar{A}_{i_n}) = p^k (1-p)^{n-k}$$

故 n 重伯努利试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$\begin{aligned} P_n(k) &= P\left(\bigcup_{i_1, \dots, i_k} A_{i_1} \bar{A}_{i_2} \bar{A}_{i_3} \dots \bar{A}_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} P(A_{i_1} \bar{A}_{i_2} \bar{A}_{i_3} \dots \bar{A}_{i_n}) \\ &= C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

伯努利概型是概率论中最早研究的独立重复试验模型, 具有重要的理论意义和广泛的应用.

例 1.34 袋内有 7 只白球, 3 只黑球. 从袋中有放回地每次取一球, 连取 5 次, 求下列事件的概率:

- (1) 恰好取到 4 次白球;
- (2) 至少取到 4 次白球;
- (3) 至多取到 4 次白球.

解 取球 5 次相当于 5 重伯努利试验, 设事件 A_i 为“恰好取到 i 次白球”, 则

$$P(A_i) = C_5^i (0.7)^i (0.3)^{5-i}, \quad i=0, 1, \dots, 5$$

- (1) 设事件 B 为“恰好取到 4 次白球”, 则 $B = A_4$, 有

$$P(B) = P(A_4) = C_5^4 (0.7)^4 (0.3)^1 = 0.360$$

- (2) 设事件 C 为“至少取到 4 次白球”, 则 $C = A_4 \cup A_5$, 有

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_4 \cup A_5) = P(A_4) + P(A_5) \\ &= C_5^4 (0.7)^4 (0.3)^1 + C_5^5 (0.7)^5 (0.3)^0 \\ &= 0.528 \end{aligned}$$

- (3) 设事件 D 为“至多取到 4 次白球”, 则 $D = \bar{A}_5$, 有

$$P(D) = P(\bar{A}_5) = 1 - P(A_5) = 1 - C_5^5 (0.7)^5 (0.3)^0 = 0.832$$

例 1.35 重复进行伯努利试验, 设每次试验成功的概率为 p , 求:

- (1) 第 n 次试验首次成功的概率;
- (2) 要使至少有一次成功的概率不小于 q , 需要进行多少次试验.

解 设事件 A_i 为“第 i 次试验成功”，则 $P(A_i) = p, i = 1, 2, \dots$

(1) 设事件 B_n 为“第 n 次试验首次成功”，则 $B_n = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{n-1} A_n$ ，故

$$P(B_n) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{n-1} A_n) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_{n-1}) P(A_n) = (1-p)^{n-1} p$$

(2) 设需要进行 n 次试验，且事件 C_n 为“ n 次试验中至少有一次成功”，则 $\bar{C}_n = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n$ 。根据题意，应有

$$P(C_n) = 1 - P(\bar{C}_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) = 1 - (1-p)^n \geq q$$

故 $(1-p)^n \leq 1-q$ ，由此可得

$$n \geq \frac{\ln(1-q)}{\ln(1-p)}$$

习题 1-6

1. 某车间有 10 台功率各为 7.5kW 的机床，如果每台机床平均每小时开动 12 分钟，且各台机床的工作状态相互独立。求 10 台机床用电总功率超过 48kW 的概率。

2. 进行重复独立试验，设每次试验中事件 A 发生的概率为 0.3，当 A 发生超过 2 次时，指示灯将发出信号。试求：

(1) 进行 5 次试验，指示灯发出信号的概率；

(2) 进行 7 次试验，指示灯发出信号的概率。

3. 一批产品的验收方案为：先做第一次检验，任取 10 件产品，如果其中无次品则接受该批产品，如果次品数大于 2 则拒收；否则做第二次检验，再任取 5 件产品，当且仅当其中无次品时接受该批产品。设产品的次品率为 10%，试求：

(1) 该批产品经第一次检验即被接受的概率；

(2) 该批产品需做第二次检验的概率；

(3) 该批产品经第二次检验方被接受的概率；

(4) 该批产品被接受的概率。

4. 某厂生产的仪器以概率 0.7 可以直接出厂，以概率 0.3 需进一步调试，经调试后的仪器以概率 0.80 可以出厂，以概率 0.20 定为不合格品不能出厂。设该厂生产了 $n (n \geq 2)$ 台仪器，且各台仪器是否合格相互独立，试求：

(1) n 台仪器全部能出厂的概率；

(2) n 台仪器中恰有 2 台不能出厂的概率；

(3) n 台仪器中至少有 2 台不能出厂的概率。

5. 设 n 把钥匙中只有一把能打开门，从中有放回地每次任取一把钥匙试开，求第 r 次才打开门的概率。

6. 进行独立重复试验，设每次试验成功的概率为 p ，试求下列事件的概率：

(1) 在 n 次试验中有 $r (1 \leq r \leq n)$ 次成功；

(2) 直到第 n 次试验才取得 $r (1 \leq r \leq n)$ 次成功。

总 习 题 一

1. 设随机事件 A, B 及其事件 $A \cup B$ 的概率分别为 $0.4, 0.3$ 和 0.6 . 若 $\bar{B}$ 表示 B 的对立事件, 求 $P(\bar{A}\bar{B})$.

2. 设 A, B 为两个事件, 已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(B|\bar{A})=0.4$, 求:

(1) $P(\bar{A}\bar{B})$; (2) $P(AB)$; (3) $P(A \cup B)$.

3. 设三个事件 A, B, C 两两独立, 满足:

$$ABC = \emptyset, P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}, P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$$

试求 $P(A)$.

4. 袋内有 m 个白球、 n 个黑球, 从袋中不放回地每次任取一球, 连取 3 次, 试求取到球的颜色依次为“白、黑、白”的概率.

5. 设 1500 个产品中有 400 个次品. 任取 200 个产品, 试求:

(1) 恰好取到 90 个次品的概率;

(2) 至少取到 2 个次品的概率.

6. 设 9 位乘客随机进入共有三节车厢的列车, 试求:

(1) 第一节车厢有 3 位乘客的概率;

(2) 每节车厢都有 3 位乘客的概率;

(3) 三节车厢分别有 4, 3, 2 位乘客的概率.

7. 将 3 个球随机放入 4 个杯中, 求一个杯中球的最大个数分别为 1, 2, 3 的概率.

8. 在电话号码簿中任取一个电话号码, 求后面四位数全不相同的概率.

9. 已知 $P(A)=a, P(B)=0.3, P(\bar{A} \cup B)=0.7$.

(1) 若事件 A 与 B 互不相容, 求 a ;

(2) 若事件 A 与 B 相互独立, 求 a .

10. 在区间 $[0, 1]$ 中随机取两个数, 求下列事件的概率:

(1) 两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$;

(2) 两数之和小于 $\frac{4}{5}$;

(3) 两数之积小于 $\frac{1}{9}$.

11. 已知 $P(\bar{A})=0.3, P(B)=0.4, P(\bar{A}\bar{B})=0.5$, 求条件概率 $P(B|A \cup \bar{B})$.

12. 袋内有 5 个白球, 3 个黑球. 每次从袋中任取一球观察颜色后放回, 并添入两个同色球, 连续取球三次. 试求前两次取到白球, 第三次取到黑球的概率.

13. 排球比赛规定: 发球方赢球时得分, 输球时对方获得发球权. 甲、乙两队进行比赛, 已知甲队发球时, 甲队赢球和输球的概率分别为 0.4 和 0.6 ; 乙队发球时, 甲队赢球和输球的概率均为 0.5 . 求甲队发球时各队得分的概率.

14. 对飞机进行了三次射击, 设命中率依次为 0.4, 0.5, 0.7; 飞机中弹一次而被击落的概率为 0.2, 中弹两次而被击落的概率为 0.6, 中弹三次则必被击落. 求飞机未被击落的概率.

15. 设有编号为 1, 2, 3 的三个口袋. 1 号袋内有两个 1 号球, 一个 2 号球, 一个 3 号球; 2 号袋内有两个 1 号球, 一个 3 号球; 3 号袋内有三个 1 号球, 两个 2 号球. 先从 1 号袋中任取一球, 放入与球上号码相同编号的口袋, 再从该袋中任取一球, 求第二次取到几号球的概率最大.

16. 设事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 且 $P(A_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, n$, 试求下列事件的概率:

- (1) $A_1, A_2, \dots, A_n$ 均不发生;
- (2) $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至多发生 $n-1$ 个;
- (3) $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中恰好发生一个.

17. 某人有两盒火柴, 每盒有 n 根. 每次使用时随机地从其中一盒中取一根, 试求: 当发现一盒火柴已用完时, 另一盒中还有 r 根火柴的概率.

18. 设 A, B 是任意两事件, 其中 A 的概率不等于 0 或 1, 证明:

$P(B|A) = P(B|\bar{A})$ 是事件 A 和 B 独立的充分必要条件.