

3.1 引言

前面介绍了离散时间域信号(序列)的傅里叶变换(DTFT)和 z 变换。DTFT和 z 变换是与连续时间信号的傅里叶变换(CTFT)和拉普拉斯(Laplace)变换相对应的,是对绝对可和、任意长序列进行谱分析和变换域分析的数学工具。

回顾在时间域具有不同特征的信号的谱分析及其频域表述,习惯上对连续时间域信号 $x(t)$ 的频谱分析计算称为傅里叶变换,如果时间连续信号又是周期的,其频域特征常用傅里叶级数(Fourier series, FS)描述;而对于离散时间信号 $x(n)$ 的频谱分析计算则称为序列的傅里叶变换,又叫离散时间傅里叶变换,当离散时间信号又具有周期性时,其频域特征则常以离散傅里叶级数(DFS)描述。

傅里叶变换处理的连续时间域信号及所得到的模拟域频谱函数的特点,如图3.1.1所示。其中,信号时间参数 t 和角频率参数 Ω 均属于模拟域,是连续变量,在实数域取值,有对应的物理量纲。

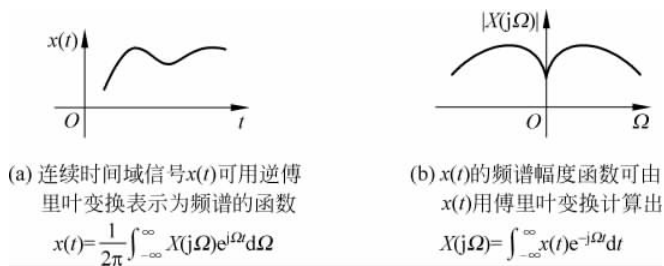


图 3.1.1 模拟域连续时间信号及其傅里叶变换波形示意

连续时间周期信号的时域、频域波形特点如图3.1.2所示。设 $x(t)$ 的周期为 T_0 ,则对应的基波角频率 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ (单位为rad/s)是确定的实数。图3.1.2中时间参数 t 可在实数域上连续取值;频谱函数又称傅里叶级数的系数,是线谱,对应的频点为 $k\Omega_0$, k 为整数。这里时间和频率参数也应理解为模拟域参数。

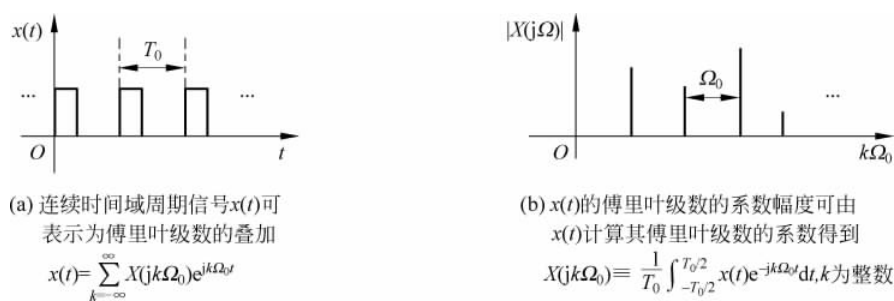


图 3.1.2 连续周期信号的时域、频域波形特点

序列的傅里叶变换(DTFT)对应的信号序列时域、频域特征如图 3.1.3 示意。由图 3.1.3 可见,主要有如下特点。

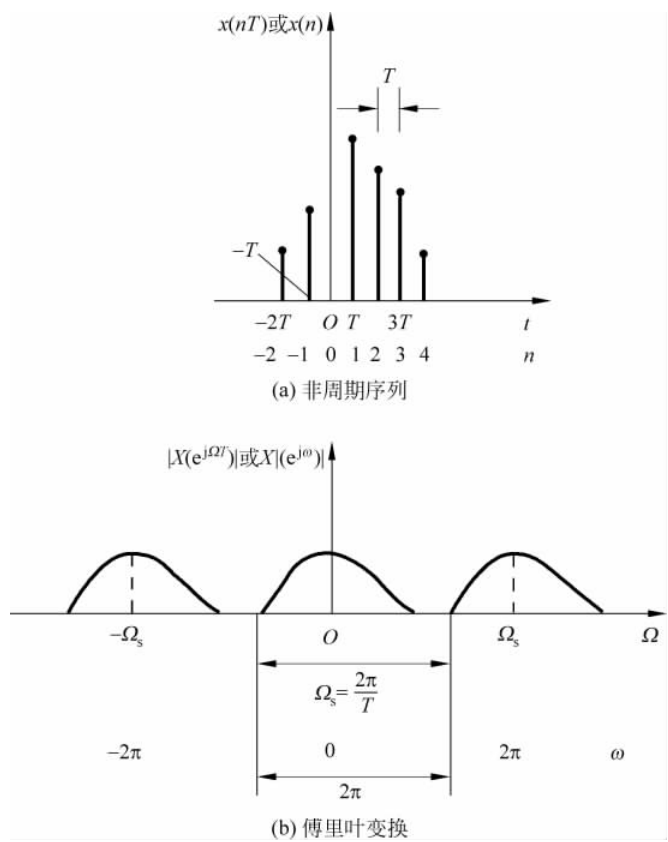


图 3.1.3 非周期序列及其傅里叶变换

注: DTFT 以数字频率为参数时,其周期为 2π

(1) DTFT 分析对欲处理的时域序列 $x(n)$ 的长度无限制,一般是绝对可和的非周期序列。参数 T 是时域序列样值点之间的时间间隔。如果 $x(n)$ 是由连续函数采样得到的,采样

频率为 f_s (单位为 Hz), 则有 $T = \frac{1}{f_s}$ 。

(2) 连续时间信号 $x(nT)$ 的傅里叶变换 (FT) 结果 $X(j\Omega)$ 是模拟角频率 Ω (单位为 rad/s) 的连续函数, 频率变量 Ω 是连续的; 而序列 $x(n)$ 的 DTFT 分析结果 $X(e^{j\omega})$ 一般以数字频率 $\omega = \Omega T$ 为变量, 需注意频率变量 ω (单位为 rad) 也是连续的。

由

$$e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j(\Omega+\frac{2\pi}{T})Tn} = e^{-j2\pi n} e^{-j\Omega Tn} = e^{-j\omega n}$$

得:

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

$$X\left[j\left(\Omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right] = X(j\Omega)$$

因此, 序列 $x(n)$ 的 DTFT, $X(e^{j\omega})$ 是数字频率的周期函数, 周期为 2π ; 而连续时间信号 $x(nT)$ 的 FT, $X(j\Omega)$ 是模拟角频率的周期函数, 周期为 $\frac{2\pi}{T}$ 。

(3) 序列 $x(n)$ 的 DTFT 计算在定义上要求做无限项的求和, 实际数值计算总是取有限的截断序列, 这使计算结果相对理论结果会产生误差。

当离散时间序列又具有周期性时, 其时域波形特点如图 3.1.4(a) 所示。因为周期序列的周期特性, 其时域序列可展开成离散傅里叶级数 (DFS), 从周期序列的 DFS 展开式可见, 周期序列的频谱函数定义在无限多个频点上, 其频谱结构是周期线谱; 各离散频点的幅度为 $|\tilde{X}(k)|$, 如图 3.1.4(b) 所示。

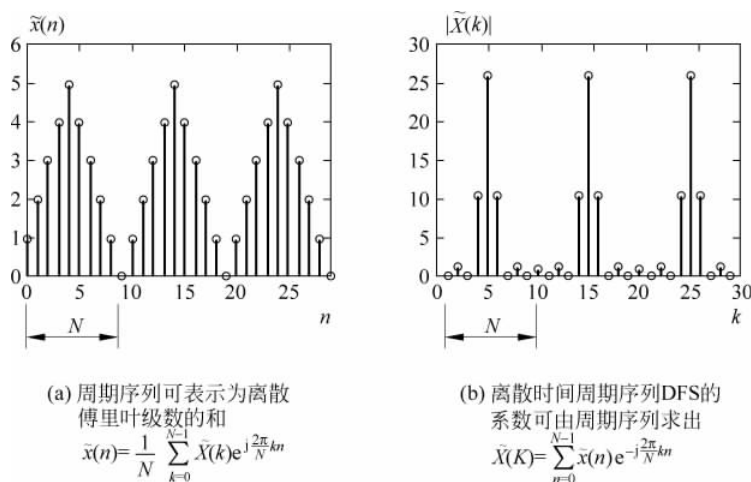


图 3.1.4 离散时间周期序列及其离散傅里叶级数的系数

本章将介绍便于在计算机上实现的, 可对有限长的离散时间信号进行谱分析的新的变换算法: 离散傅里叶变换 (DFT)。离散傅里叶变换的特点是:

(1) 对时域有限长的信号序列, 用有限长的频谱序列 (DFT 的结果), 估计信号序列的频率成分。

- (2) DFT 的结果是离散数字频率的函数,隐含有周期性。
 - (3) DFT 的快速实现算法统称为快速傅里叶变换(FFT),是数字信号处理的基础。
- 离散傅里叶变换(DFT)及其快速算法(FFT)主要有三个用处:
- (1) 离散时间信号(序列)频谱的数值计算。计算机只能对有限的离散数据进行处理,处理结果也是离散数值。
 - (2) 通过 FFT 能够实现高效卷积。
 - (3) 波形编码,尤其是利用 DFT 的变形——离散余弦变换(discrete cosine transform, DCT)实现。

总结: 在信号处理过程中,如傅里叶变换,常涉及信号在时域和频域间的相互转换;若一个域中的函数是周期的,则其相应的变换式在另一个域中是取样形式(离散的);反过来,若一个域中的函数是取样形式(离散的),其相应的变换式在另一个域中一定是周期的(可理解为周期延拓的结果),如表 3.1.1 所示。

表 3.1.1 时域和频域的波形特征的对应关系

类型	函数性质			
时域函数	连续的	非周期	具有周期(T)	取样形式(样值点间隔为 T_s ,对应的取样率为 f_s)
频域函数	非周期	连续的	离散的线谱,角频率间隔 $\Omega=2\pi/T$	具有周期性 (模拟频率域周期为 f_s ; 数字频率域周期为 2π)

本章还将介绍 DFT 和其他信号类型的傅里叶变换相关联时所应满足的条件,最后对用 DFT 分析现实中经常遇到的连续时间信号和离散时间信号的频谱时遇到的主要问题(混叠,频率泄漏,栅栏效应)及解决思路进行归纳总结。

3.2 离散傅里叶变换的定义

3.2.1 离散傅里叶变换和逆离散傅里叶变换的定义

设离散时间信号 $x(n), n=0,1,\cdots,L-1$,是长度为 L 的有限长序列,其 $N(N\geq L)$ 点离散傅里叶变换(DFT)定义为:

$$X(k) \equiv \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{3.2.1a}$$

定义 N 点 DFT 的变换因子为 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$,则式(3.2.1a)可写为:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \tag{3.2.1b}$$

一般情况下,可假设序列 $x(n)$ 长度区间外的序列值为零,则式(3.2.1b)的求和具体为:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) W_N^{kn} \tag{3.2.1c}$$

$$\equiv |X(k)| e^{j\theta(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.2.1d)$$

其中, N 称为离散傅里叶变换的区间长度或 DFT 窗长度, 习惯上称为 DFT 的变换点数; $|X(k)|$ 、 $\theta(k)$ 分别称为序列 $x(n)$ 的幅度谱和相位谱。显然 DFT 是把时域有限长序列 $x(n)$ 变换成数字频率域的有限长序列 $X(k)$ 。

对 $X(k)$ 进行逆离散傅里叶变换 (inverse discrete Fourier transform, IDFT), 可得到对应的时域有限长序列 $x(n)$, IDFT 定义为:

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{IDFT}[X(k)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, L-1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

由式(3.2.2)可见, N 点 DFT 的逆变换得到的时域有限长序列是 N 点的, 而原时域序列长是 L 点的。须特别注意, 当 $N > L$ 时, 从理论上讲, IDFT 求出的 $x(n)$ 在 $n = 0, 1, \dots, L-1$ 的区间上等于原有限长时域序列; 而在 $L-1 < n \leq N-1$ 的区间上, $x(n)$ 序列值等于 0。实际因计算机的运算误差, N 点 IDFT 算出的 N 点时间序列可能和原输入时域序列有误差。

另外, 在保证从 IDFT 结果中能唯一地恢复原时域序列的前提下, 为了减少计算量, 对长为 L 的序列 $x(n)$ 进行 DFT 分析时, 通常取变换区间长度为 $N=L$ 的 DFT 就可以。

实际应用中有的一点是: 从 DFT、IDFT 的数学定义上, 根据 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 因子的特性: $W_N^* = e^{j\frac{2\pi}{N}} = W_N^{-1}$, 计算序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 及计算 N 点 IDFT 可以共享同一个已有的 DFT 算法程序实现。说明如下。

(1) 设通过已有算法程序, 得到序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT $X(k)$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

(2) 根据 $X(k)$, 计算 N 点 IDFT, 求时域序列 $x(n)$:

• 将 DFT 的定义式 $X(k)$ 取共轭, 得:

$$X^*(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{-kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

• 对 $X^*(k)$ 计算 N 点 DFT, 得:

$$x'(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

• 对结果再取共轭:

$$x'(n)^* = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

• 对结果乘以 $\frac{1}{N}$, 得到序列:

$$x(n) = \frac{1}{N} x'(n)^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

恰好是式(3.2.2)给出的 IDFT 的定义式。根据这个特点, 编一个 DFT 子程序, 完成 DFT 运算; 只要再配合两次共轭运算, 就能通过 DFT 实现 IDFT 的运算。

从 DFT 的定义可知,序列 $x(n)$ 的长度 L 和 DFT 变换区间长度 N 可以不同。 $N > L$ 的 DFT 计算,数学上可理解为原序列 $x(n)$ 后面补 $N-L$ 个零的序列的 N 点 DFT。显然,序列 $x(n)$ 后补零不影响其 N 点 DFT 的结果。证明如下。

证明: 设 $x_1(n)$ 长为 $L, n=0,1,\dots,L-1$; $x'_1(n)$ 是后面增补 $N-L$ 个零后的序列,长 $N, n=0,1,\dots,L-1,\dots,N-1$,如图 3.2.1 所示。它们的 N 点 DFT 分别为:

$$\begin{aligned} X_1(k) &= \text{DFT}[x_1(n)] \\ &= \sum_{n=0}^{L-1} x_1(n) W_N^{kn}, \quad k=0,1,\dots,N-1 \\ X'_1(k) &= \text{DFT}[x'_1(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x'_1(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{L-1} x_1(n) W_N^{kn}, \quad k=0,1,\dots,N-1 \end{aligned}$$

显然: $X'_1(k) = X_1(k)$ 。

通过上面的证明,我们已了解,序列 $x(n)$ 及其后补零序列,进行相同变换区间长度的离散傅里叶变换,结果是一样的。但序列 $x(n)$ 及其前补零序列进行相同变换区间长度的 DFT 的结果则是不一样的;下面介绍这两个序列的 DFT 之间的差异。

对长为 L 的 $x(n)$ 序列,前面补 D 个零后,得到长为 $L+D$ 的序列,记为 $g(n), n=0,1,\dots,L+D-1$ 。为了比较 $x(n)$ 和 $g(n)$ 的 DFT 之间的关系,取 DFT 的点数 $N \geq L+D$,为计算简单,取 $N=L+D$,如图 3.2.2 所示。根据定义, $x(n)$ 、 $g(n)$ 的 N 点 DFT 分别为:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k=0,1,2,\dots,N-1 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) W_N^{kn} = \sum_{n=D}^{N-1} g(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3.2.4)$$

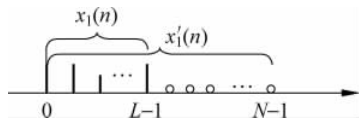


图 3.2.1 L 点序列及其后补零序列

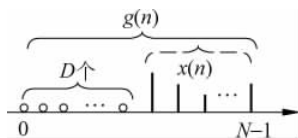


图 3.2.2 L 点序列及其前补零序列

式(3.2.4)取变量代换 $n = n' + D$, 则 $g(n) = x(n')$; $n = D, N-1$ 时, 对应 $n' = 0, L-1$, 故:

$$\begin{aligned} G(k) &= \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n+D)} \\ &= e^{-j\frac{2\pi}{N}Dk} \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= W_N^{Dk} X(k), \quad k=0,1,\dots,N-1 \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

比较式(3.2.3)和式(3.2.5)可见: $x(n)$ 前补 D 个零的序列 $g(n)$ 的 N 点 DFT $G(k)$ 的相位相对于原 $x(n)$ 的 N 点 DFT $X(k)$ 的相位, 叠加了一线性相移 $(-\frac{2\pi}{N}Dk)$; 因为 $|W_N^{Dk}|=1$, $G(k)$ 和 $X(k)$ 的幅度是相同的。

在同一个工程实践中, 当有两个有限长序列 $x_1(n)$, $x_2(n)$ 均要进行 DFT 分析, 如果 $x_1(n)$ 长 L , $x_2(n)$ 长 N , $L < N$, 为了模块化的计算程序的统一应用, DFT 分析子程序常按长的序列取变换区间长度, 如进行 N 点 DFT。按式(3.2.1a)的定义分别计算:

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)]$$

$$X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)]$$

这样做带来的方便之处: 各不同信号片断可以用同一个 DFT 子程序实现处理; 且当要对这些数据片段进行加权组合, 产生新的处理对象时, 对应的数字频率域的序列(即频谱序列)也遵循同样的加权组合, 结果的长度就等于原离散傅里叶变换的点数, 也是规格化的。

例 3.2.1 给定长度 $L=8$ 的序列 $x(n)=[1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0]$ 。

(1) 求其 $N=16$ 点 DFT $X(k)$;

(2) 前补三个零。求其 $N=16$ 点 DFT $X_D(k)$ 。

解: 例 3.2.1 的 MATLAB 程序参考实现见 3.8.1 节。

运行 3.8.1 给出的程序, 结果如图 3.2.3 和图 3.2.4 所示。

也可根据定义计算:

$$X(k) = \sum_{n=0}^7 x(n) e^{-j\frac{2\pi}{16}kn} = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j\frac{2\pi}{16}kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 15$$

$$X_D(k) = e^{-j\frac{2\pi}{16}3k} X(k) = W_{16}^{3k} X(k), \quad k = 0, 1, \dots, 15$$

图 3.2.3 给出了 8 点序列 $x(n)$ 及其前补零序列 $x_D(n)$ 的时域波形及其 16 点 DFT 的幅度谱, 显然对同样点数的 DFT, 前补零序列和原序列的幅度谱相同。图 3.2.4 是两个序列相应的 DFT 之相位谱; 为了清楚地观察两个序列的相位谱关系, 图 3.2.4 还画出了两个序列相位谱的差, 可见前补零序列的相位谱相对于原序列的相位谱随数字频率的变化而出现线性附加相位移。

在工程实践中, 经常会遇到的问题是要对已获得的时域离散信号(序列)进行频谱分析时, 先要确定用多少点数的 DFT 比较合适; 或者考虑, 用现成的 DSP 芯片对给定的数据进行分析是否适当。回答这些问题要考虑多种因素。其中之一是要了解对某一有限长的时域序列, 其不同变换区间长度 DFT 之间存在什么样的联系。

给定时域序列为 $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, 根据定义, 其 N 点 DFT:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

式(3.2.6)表明, N 点 DFT 离散数字频率间隔 $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$ 。

(1) 考虑 $x(n)$ 的 $L=rN$ 点 DFT $G(k)$, r 为整数, 即 L 是 N 的整倍数。

先对 $x(n)$ 后补零成为 L 点序列, 再根据定义求 rN 点 DFT:

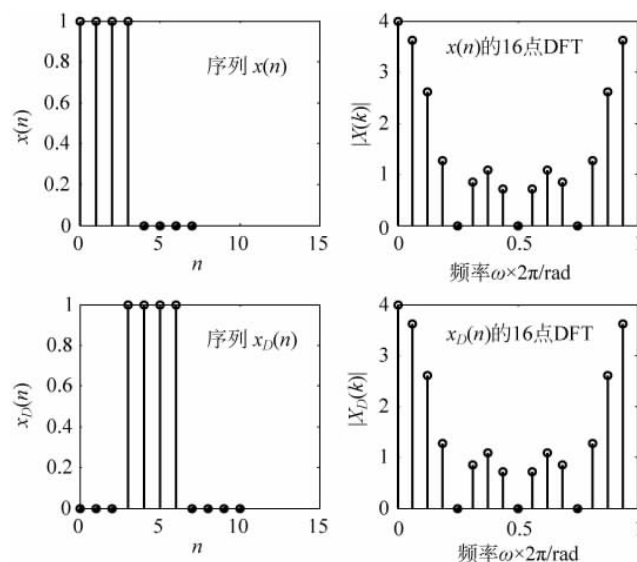
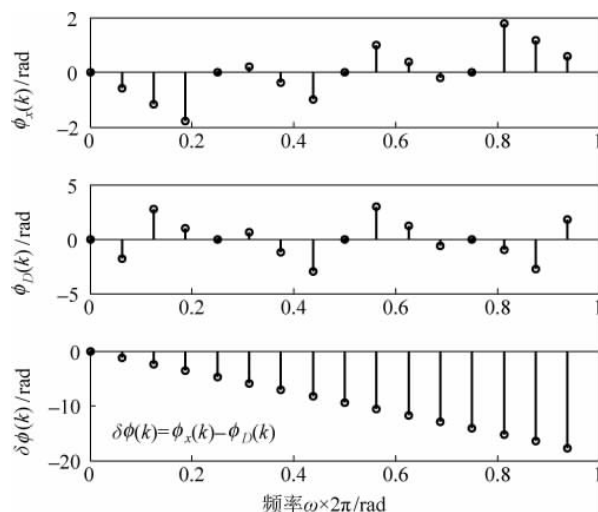


图 3.2.3 例 3.2.1 中 8 点序列及其前补零序列时域及 DFT 幅度谱波形

图 3.2.4 8 点序列 $x(n)$ 及其前补零序列的 16 点 DFT 相位谱及线性相移

$$\begin{aligned}
 G(k) &= \sum_{n=0}^{rN-1} x(n) W_{rN}^{kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, N, \dots, rN-1 \\
 &= \sum_{n=0}^{rN-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{rN}kn} \quad (\text{因 } x(n) \text{ 只有前 } N \text{ 点, 该求和具体为}) \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(\frac{k}{r})n}
 \end{aligned}$$

当 k 是 r 的整数倍时:

$$G(k) = X\left(\frac{k}{r}\right) \quad (3.2.7)$$

$G(k)$ 的离散数字频率间隔 $\omega'_1 = \frac{2\pi}{rN}$, 比原 N 点 DFT 离散数字频率间隔 $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$ 小。所以 rN 点 DFT $G(k)$ 谱线数目在 2π 的数字频率范围内是 $X(k)$ 的 r 倍, 更加密集, 如图 3.2.5 中 z 平面单位圆上等间隔相邻点之间的角度差形象地表示了相应点数的 DFT 的离散数字频率间隔。

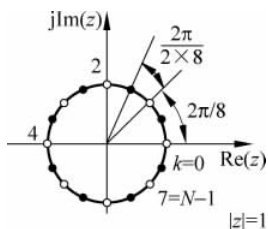


图 3.2.5 8 点及 16 点 DFT 中的数字频率值在 z 平面单位圆上的分布

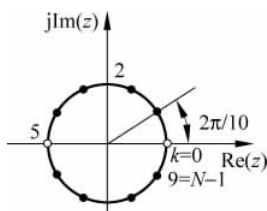


图 3.2.6 10 点 DFT 中的 10 个数字频率值在 z 平面单位圆上的分布

(2) 考虑 $x(n)$ 的 L 点 DFT $G(k)$, 其中 $L \neq rN$, 不是原 DFT 变换区间长度的整数倍。

先对 $x(n)$ 后补零成为 L 点序列, 再根据 DFT 的定义, 当 $L > N$ 时, 则 $x(n)$ 的 L 点 DFT $G(k)$, 数字频率离散间隔 $\omega'_1 = \frac{2\pi}{L}$ 。 $G(k)$ 谱线数目在 2π 的数字频率范围内比 $x(n)$ 原来的 N 点 DFT $X(k)$ 多 $L-N$ 根谱线, 也更加密集。当设 z 平面单位圆上的点的幅角为数字频率值时, 如图 3.2.6 形象地给出了 10 点 DFT 的数字频率值在 z 平面单位圆上的位置。

例 3.2.2 设长为 8 的时域序列 $x(n) = [1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0]$ 。

- (1) 求其 $N=8$ 点 DFT;
- (2) 后补 8 个零, 即 $r=2$, 求其 $N=16$ 点 DFT;
- (3) 后补 3 个零, 即 $L=11$, 求其 $N=11$ 点 DFT。

解: 例 3.2.2 的 MATLAB 程序参考实现见 3.8.1 节。

运行 3.8.1 节给出的程序, 结果如图 3.2.7 和图 3.2.8 所示。

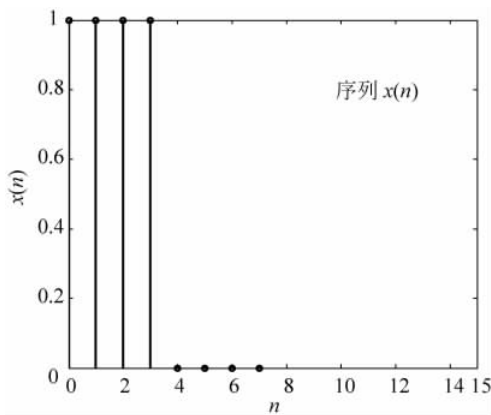


图 3.2.7 例 3.2.2 中 8 点序列 $x(n)$ 的时域波形

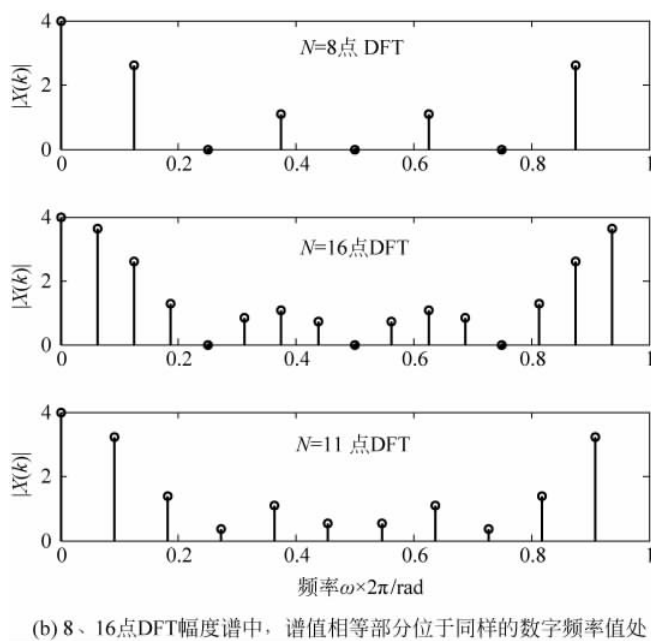
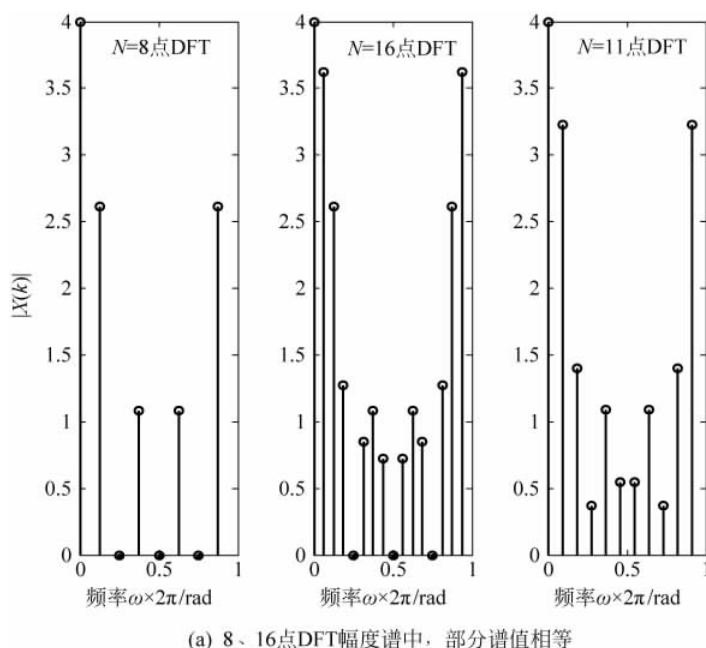


图 3.2.8 例 3.2.2 序列 $x(n)$ 的 8 点、16 点和 11 点 DFT 谱线的幅度波形比较

也可根据定义式(3.2.1a)计算出 $x(n)$ 的 $N=8, 16, 11$ 点离散傅里叶变换。

(1) 8 点 DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{7} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j\frac{\pi}{4}kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 7$$

(2) 16 点 DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{15} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{16}kn} = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j\frac{\pi}{8}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, 15$$

(3) 11 点 DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{10} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{11}kn} = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j\frac{2\pi}{11}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, 10$$

图 3.2.7 是给定的 $x(n)$ 序列时域波形。图 3.2.8 画出了 $N=8, 16, 11$ 点离散傅里叶变换的幅度分布。由图 3.2.8 可见, DFT 的结果仅出现在数字频率 $\frac{2\pi}{N}k, k=0, 1, \dots, N-1$ 处; 因 16 点 DFT 与 8 点 DFT 涉及 8 个相同的数字频率值, 正如式 (3.2.7) 描述的, 这些频率处的序列频谱值相等。

3.2.2 离散傅里叶变换和 z 变换的关系

设序列 $x(n)$ 长 $M=N$ 时, 其 z 变换和 N 点 DFT 根据定义分别为:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \quad (\text{且设其 ROC 含 } z \text{ 平面上的单位圆}) \quad (3.2.8)$$

$$X(k) \equiv \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.2.9)$$

显然, 当 $z = z_k = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}, k=0, 1, 2, \dots, N-1$, 则 z 变换和 DFT 的函数值是相等的; 而 z_k 是 z 平面单位圆上的点, 相邻 z_k 点的角度间隔 $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$ 。另外根据 z 变换和 DTFT 的关系已知: 序列 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 在单位圆上 (即 $z = e^{j\omega}$ 时) 的函数值就是序列 (系统) 的频谱特性 (DTFT)。因此 z_k 处 $X(z)$ 的函数值就是序列的 DTFT, $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 范围的 N 点等间隔采样, 可记为 $X(e^{jk\omega_1})$ 。

显然相邻 z_k 的角度间隔 $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$ 也就是序列 $x(n)$ 的 DTF $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 范围上 N 点等间隔采样的采样频率间隔。

综上所述, 当给定时域序列 $x(n)$, 可按下列步骤从其 z 变换求出其 N 点 DFT:

$x(n) \rightarrow$ 求 z 变换, $X(z)$, 且其收敛域包含 z 平面上的单位圆

$\rightarrow$ 令 $z = z_k = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \equiv e^{jk\omega_1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

$\rightarrow$ 代入 $X(z)$, 得到离散频点处的函数值 $X(e^{jk\omega_1})$, 其中: $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$

$\rightarrow X(k) \equiv X(e^{jk\omega_1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, 即为 $x(n)$ 的 N 点 DFT 序列

数字频率间隔 $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$, 和对应的模拟频率间距 f_1 的关系如下

$$\omega_1 = \Omega_1 T = 2\pi f_1 T \quad (3.2.10a)$$

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi T} = \frac{1}{NT} = \frac{f_s}{N} \quad (3.2.10b)$$

其中, T 为采样序列的时间间隔。如果给定系统的采样频率 f_s , 则 $f_s = \frac{1}{T}$ 。

通过上面的分析可以推知序列(离散时间信号)的 DFT 具有如下的物理意义:

信号 $x(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k)$ 是对其 z 变换 $X(z)$ 在 z 平面单位圆上的 N 点等间隔采样, $k=0,1,\dots,N-1$ 。等效于对 $x(n)$ 的 DTFT $X(e^{j\omega})$ 在 $[0,2\pi]$ 频率范围内的 N 点等间隔采样 $X(e^{jk\omega_1})$, 序号 k 采样点处的离散数字频率值为: $\omega_k = k\omega_1 = k\frac{2\pi}{N}$; 将数字频率 ω_k 隐去其频率单位, 简记为频率序号 k , 对应的就是信号 $x(n)$ 的 DFT 函数 $X(k)$ 。显然当 DFT 变换区间长度 N 不同, 在 $0\sim 2\pi$ 范围内对 $X(e^{j\omega})$ 的采样频率间隔 ω_1 和点数不同, 得到的 DFT 结果自然不同。

总结 DFT 的主要特点:

- (1) DFT 是关于有限长序列的离散傅里叶变换;
- (2) DFT 只有 N 个独立复值, 是数字频率域上的有限长序列;
- (3) DFT 隐含有周期性。

这是因为在 DFT、IDFT 中, $x(n)$ 、 $X(k)$ 均为有限长序列, 且 $W_N^k = W_N^{(k+mN)}$, 所以序列 $x(n)$ 的 DFT 结果 $X(k)$ 在数字频率域“隐含有”以 N 为周期的特点: $X(k+mN) = X(k)$; $X(k)$ 的 IDFT 结果在离散时间域也“隐含有”以 N 为周期的特点: $x(n+mN) = x(n)$ 。

下面讨论的周期序列与有限长序列的内在联系, 可以从另一个角度, 理解离散傅里叶变换隐含有周期性的特点。

3.2.3 周期序列与有限长序列的内在联系

因周期序列 $\tilde{x}(n)$ 及其频谱 (DFS) $\tilde{X}(k)$ 都是周期离散序列, 所以只要知道它们一个周期内的内容, 其他的所有情况就完全确定了。因此把前面介绍的离散傅里叶级数 (DFS) 和逆离散傅里叶级数 (IDFS) 的无限长序列的序号取值范围都限定在一个周期内, 这时离散时间域周期序列 $\tilde{x}(n)$ 可由主值区间上的主值序列表示。

1. 主值区间

设周期为 N 的序列 $\tilde{x}(n)$ 。序号取值为 $n=0,1,2,\dots,N-1$ 的范围称为主值区间。

2. 主值序列

周期为 N 的序列 $\tilde{x}(n)$ 在主值区间上的函数值称为周期序列的主值序列。常记为 $x(n)$ 。这时, $\tilde{x}(n)$ 又可称为 $x(n)$ 的周期延拓。

周期序列中的主值区间与主值序列如图 3.2.9 所示。

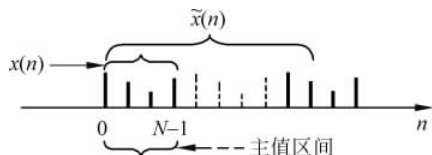


图 3.2.9 周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的主值区间和主值序列 $x(n)$

3. 周期序列与主值序列的关系

(1) 时域关系: $x(n)$ 是周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列; $\tilde{x}(n)$ 是 $x(n)$ 的周期延拓。两者可以相互表示:

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1, N \text{ 为周期序列的周期} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.2.11)$$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mN + n_1) \quad (3.2.12a)$$

其中, $n = mN + n_1$, 取值在 $(-\infty, +\infty)$ 的整数区间任意, $0 \leq n_1 \leq N-1$ 。式(3.2.12a)就是周期延拓的数学表示。习惯上常省略等号右边的下标, 周期延拓简记为:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mN + n) \quad (n \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 整数区间上任意取值}) \quad (3.2.12b)$$

(2) 频域关系: 设 $X(k)$ 是 $x(n)$ 的 N 点 DFT, $\tilde{X}(k)$ 是周期为 N 的 $\tilde{x}(n)$ 的 DFS。则在数字频率域 $X(k)$ 是周期序列 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列; $\tilde{X}(k)$ 是 $X(k)$ 的周期延拓。

4. 余数运算(求 N 模数)

定义: 余数运算的结果为整数域上, 任意数 n 除以 N 所得的余数 n_1 。

由欧几里得除法可得, 任给整数 $n > N$, 总存在整数 m, n_1 , 满足:

$$n = mN + n_1, \quad m \text{ 为整数}, \quad 0 \leq n_1 \leq N-1 \quad (3.2.13)$$

反过来, 如果式(3.2.13)成立, n_1 称为 n 除以 N 的余数。该余数运算可用式(3.2.14)表示:

$$((n))_N = n_1 \quad (3.2.14)$$

这里 $((n))_N$ 应看成余数运算的运算符号。例如, 序列 $\tilde{x}(n)$ 的周期为 9, n 为任意整数。其主值序列记为 $x(n_1)$, $0 \leq n_1 \leq 8$:

$$\tilde{x}(25) = x((25))_9 = x(7)$$

$$\tilde{x}(-5) = x((-5))_9 = x(4)$$

周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的函数值可通过模 N 的余数运算, 用其主值序列的相应函数值 $x(n_1)$ 求出。

利用列长为 N 的单位矩形序列符号 $R_N(n)$ 和余数运算符号, 周期为 N 的周期序列和其主值序列的时域关系可记为紧凑形式:

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) \quad (3.2.15)$$

其中, $R_N(n)$ 是单位矩形序列, $0 \leq n \leq N-1$, 列长为 N 。

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N = x(n_1), \quad 0 \leq n_1 \leq N-1, \quad ((n))_N \text{ 是余数运算} \quad (3.2.16)$$

式(3.2.16)表明: 周期延拓后任意序号 n 对应的序列值 $\tilde{x}(n)$ 可用主值序列的相应值 $x(n_1)$ 求出。类似地, 主值序列的 DFT $X(k)$ 和周期序列的 DFS $\tilde{X}(k)$ 在数字频率域, 有如下的相互关系:

$$X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) \quad (3.2.17)$$

其中, $R_N(k)$ 是长为 N 的单位矩形序列, $k=0, 1, \dots, N-1$ 。

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N, \quad -\infty < k < +\infty \quad (((k))_N \text{ 是余数运算}) \quad (3.2.18)$$

式(3.2.17)表明: 有限长序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT $X(k)$ 是其周期延拓序列 $x((n))_N$ 的 DFS $\tilde{X}(k)$ 的主值序列。

N 点 DFT 从物理上可看成是对离散时间傅里叶变换(DTFT)的(频域)取样, 取样间隔为数字频率 ω_1 。类似于对连续信号以时间间隔 T 的取样, 会导致信号频谱的周期延拓, 并且延拓周期为 $\frac{1}{T} = f_s$; 在频率域对离散时间傅里叶变换以间隔 ω_1 , 即进行频率间隔为 f_1 的取样也会引起时域序列的周期化——周期延拓。原有限长序列 $x(n)$ 经过此周期延拓成为周期序列 $\tilde{x}(n)$, 且周期 $= \frac{1}{f_1} = NT$, 其中 N 为频率范围 $0 \sim f_s$, 即 2π 内对 DTFT 取样的取样点数; 隐去具体时间间隔 T , 该周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的周期可计为 N 。图 3.2.10 给出相关变换的关系示意。

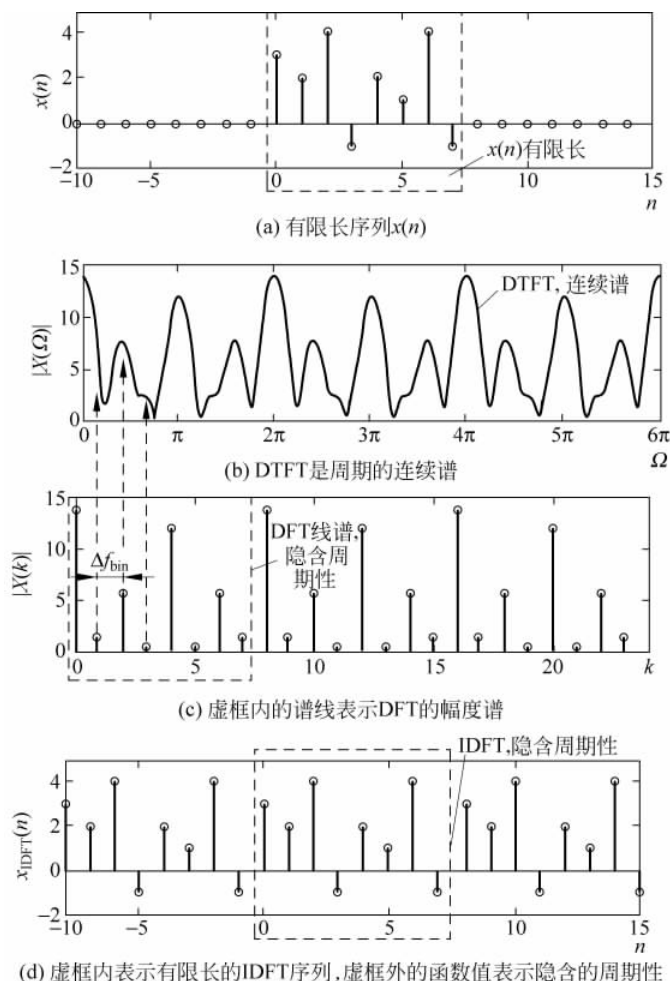


图 3.2.10 序列的 DTFT, DFT, IDFT 的物理特性示意

反过来,抽样后的 DTFT 频谱函数就是周期离散序列 $\tilde{x}(n)$ 的 DFS 的系数,等于离散数字频率点 $\omega_k = k\omega_1 = k \frac{2\pi}{N}$ 处的 DTFT 函数值:

$$\begin{aligned}\tilde{X}(e^{j\omega}) \big|_{\omega=(2\pi/N)k} &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \tilde{X}(k), \quad k \text{ 为任意整数}\end{aligned}$$

$\tilde{X}(k)$ 是离散数字频率的周期序列。虽然 k 任意,因为 $N\omega_1 = N \frac{2\pi}{N} = 2\pi$,一个周期内有 N 点,这 N 个独立的函数值就是周期序列的离散傅氏级数 (DFS) 系数 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列。这 N 个离散的数字频率点从几何上可看成是 z 平面上单位圆的 N 个等分点所对应的极角。如图 3.2.11 所示, $N=6$, 对应的数字频率分别为 $0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$ 。

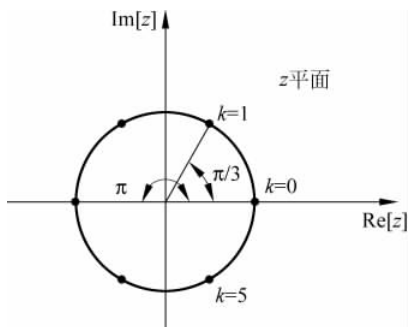


图 3.2.11 z 平面单位圆上 6 等分点的极角

3.3 离散傅里叶变换的性质

3.3.1 线性性质

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 是两个长度分别为 N_1, N_2 的有限长序列,其线性组合为序列:

$$x_3(n) = a x_1(n) + b x_2(n)$$

其中, a, b 为任意常数,序列 $x_3(n)$ 的长为 $N = \max[N_1, N_2]$ 。若序列 $x_1(n), x_2(n)$ 和 $x_3(n)$ 的 N 点 DFT 分别记为 $X_1(k), X_2(k)$ 和 $X_3(k)$, 则:

$$X_3(k) = \text{DFT}[a x_1(n) + b x_2(n)] = a X_1(k) + b X_2(k) \quad (3.3.1)$$

3.3.2 序列的和

对长为 N 的序列 $x(n)$, 其 N 点 DFT 记为 $X(k)$, 则式(3.3.2)成立:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) = X(k) \big|_{k=0} \quad (3.3.2)$$

证明: 由 DFT 的定义:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \big|_{k=0}, \quad \text{当 } k=0, \quad W_N^0 = 1$$

故

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

有限长序列 $x(n)$ 的各取样值和等于其 DFT 在 $k=0$ 处的函数值。

3.3.3 序列的初值

对长为 N 的序列 $x(n)$, 其 N 点 DFT 记为 $X(k)$, 则式(3.3.3)成立。

$$x(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \quad (3.3.3)$$

由逆离散傅里叶变换的定义可以证明式(3.3.3)。

3.3.4 序列的圆周移位(循环移位)

1. 圆周移位(循环移位)

考虑在一个直角坐标系中, 以原点为圆心画一个圆, 将有限长序列 $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, 均匀排列在这个圆周的 N 等分点上, 正水平轴方向与圆周相交的点记为 $n=0$ 的序列值; 显然, 圆周上相邻两序列值间隔 $\frac{2\pi}{N}$ 的角度。

如果将整个序列 $x(n)$ 逆时针方向沿圆周旋转(移位) $m \frac{2\pi}{N}$ 的角度, 其中 $m > 0$ (若 $m < 0$, 则整个序列顺时针旋转); 再从水平正轴方向开始作为旋转后所得序列 $x_m(n)$, $0 \leq n \leq N-1$ 的起始点, 则就是原序列的移 $|m|$ 个单位的圆周移位序列。这种在圆周上的序列圆周移位, 用数学定义式表示如下:

$$x_m(n) = x((n-m))_N R_N(n) \quad (3.3.4)$$

其中, $x((n-m))_N$ 是周期为 N 的周期序列, 由原长为 N 的序列 $x(n)$ 周期延拓并移位 m 个单位得到。 $R_N(n)$ 为长为 N 的单位矩形序列, 在这里起到取出主值的作用。

从一维时间轴上, 如图 3.3.1 所示, 对式(3.3.4)表达的序列循环移位(又称圆周移位, 本书两种叫法不再区分)的物理过程如下解释:

- (1) 给定有限长序列 $x(n)$;
- (2) 将 $x(n)$ 周期延拓, 得到无限长的周期序列 $\tilde{x}(n) = x((n))_N$;
- (3) 若右移位 m 个单位, 则 $m > 0$, 得到移位 m 个单位的序列:

$$\tilde{x}(n-m) = x((n-m))_N$$

图 3.3.1 中 $m = -2$, 表示左移位 2 个单位:

$$\tilde{x}(n-m) = \tilde{x}(n+2) = x((n+2))_N$$

- (4) 取出主值序列:

$$x_m(n) = x((n-m))_N R_N(n)$$

$x(n)$ 循环移 $|m|$ 单位的结果是与原 $x(n)$ 同样长的有限长序列。

当把有限长序列均匀地排列到一个圆周上时, 如图 3.3.2 所示, 又可以从二维几何角度, 对序列圆周移位(循环移位)过程如下解释:

- (1) 将 $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, 均匀排列在 N 等分的圆周上, 图 3.3.2(a) 中不同的序列值用不同的符号点区别。正水平轴方向排列 $n=0$ 的序列值。圆周上相邻两序列值间隔角度 $\frac{2\pi}{N}$;

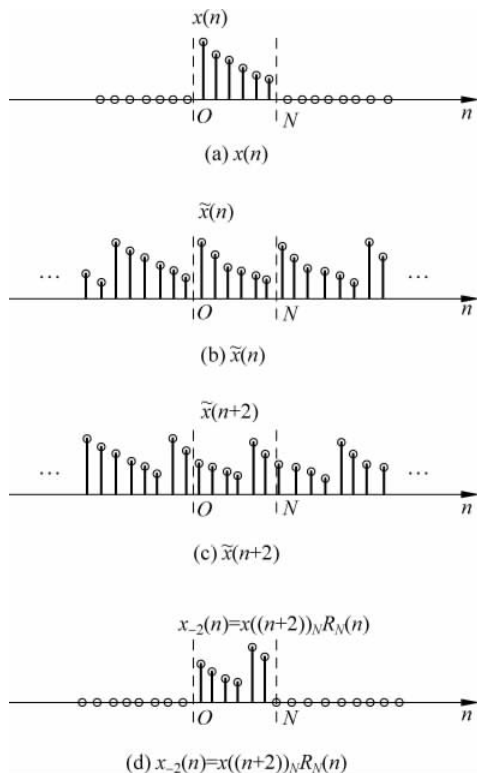


图 3.3.1 循环移位过程一维示意图

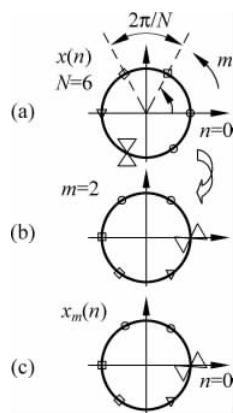


图 3.3.2 圆周移位过程二维示意图

(2) 将整个 $x(n)$ 序列值逆时针方向沿圆周旋转(移位) $m \frac{2\pi}{N}$ 的角度, $m > 0$ 。图 3.3.2(b) 中 $m=2$, 如果是顺时针旋转, 则对应于 $m < 0$;

(3) 从正水平方向开始逆时针地赋予序列值的序号 $n, 0 \leq n \leq N-1$, 得到 $x(n)$ 的圆周移位 m 个间隔的序列, 如图 3.3.2(c) 所示。

$$x_m(n) = x((n-m))_N R_N(n)$$

从这个过程可见, 圆周移 m 个单位, 所得序列相对原序列 $x(n)$, 只是顺序的重新定义。

2. 时域圆周移位定理

设序列 $x(n)$ 的长为 N 。其 N 点 DFT 记为:

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$x(n)$ 在圆周上移位 m 个单位的时间移位序列记为:

$$x_m(n) = x((n-m))_N R_N(n)$$

则 $x_m(n)$ 的 DFT 为:

$$X_m(k) = \text{DFT}[x_m(n)] = W_N^{km} X(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.3.5)$$

其中, $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 。式(3.3.5)表明, 时域移 m 个单位的序列之 DFT 相对于原序列的 DFT 有斜率为 $m \frac{2\pi}{N}$ 的附加线性相位, 附加相位 $\Delta\varphi(k) = k \cdot m \frac{2\pi}{N}$ 。

证明:

$$\begin{aligned}
 X_m(k) &= \text{DFT}[x_m(n)] \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x((n-m))_N R_N(n) W_N^{kn}, \quad \text{作变量代换 } i = n - m \\
 &= \sum_{i=-m}^{-m+N-1} x(i) W_N^{k(i+m)}
 \end{aligned}$$

因 $x(n)$ 的圆周移位均匀地分布在圆周上, 所以对 $x(n)$ 在 $[-m, -m+N-1]$ 范围上求和等同于对 $x(n)$ 在 $[0, N-1]$ 范围上的求和。所以

$$\begin{aligned}
 X_m(k) &= W_N^{km} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) W_N^{ki} \\
 &= W_N^{km} X(k) \\
 &= e^{-j\frac{2\pi}{N}km} X(k)
 \end{aligned}$$

3. 频域圆周移位定理——调制特性

如果给定长为 N 的序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k)$, 则其 IDFT 为时域序列 $x(n)$:

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

设 $X(k)$ 在数字频率域的圆周移位记为 $X_m(k) = X((k-m))_N R_N(k)$, 则其 IDFT 为时域序列:

$$\begin{aligned}
 x'(n) &= \text{IDFT}[X_m(k)] = W_N^{-nm} x(n) \\
 &= e^{j\frac{2\pi}{N}nm} x(n)
 \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

式(3.3.6)的证明类似于时域圆周移位定理, 可用 IDFT 的定义直接证明。

根据欧拉公式: $e^{j\frac{2\pi}{N}nm} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}nm\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{N}nm\right)$ 。当数字系统的采样频率为 f_s 时, 数字频率 $\frac{2\pi}{N}m = 2\pi f/f_s$, 即对应于模拟频率 $f = \frac{f_s}{N}m$ 。式(3.3.6)右边表达式物理上可解释为用时域序列 $x(n)$ 对频率为 $\frac{f_s}{N}m$ 的载波进行幅度调制。

根据幅度调制的特点, 序列 $x(n)$ 的频谱将被搬移到“载波频率” $\Omega = 2\pi \frac{f_s}{N}m$ 附近。故频域圆周移位定理具有“调制特性”的物理意义是: 把序列 $x(n)$ 的 DFT $X(k)$ 在数字频率域上进行圆周移位 m 个单位得到 $X_m(k)$, 对应的是原序列 $x(n)$ 在离散时间域上的“幅度调制序列 $e^{j\frac{2\pi}{N}nm} x(n)$ ”的谱。

3.3.5 圆周卷积(循环卷积)及其与有限长序列线性卷积的关系

1. 时域圆周卷积定理

设 $x_1(n), x_2(n)$ 长分别为 N_1, N_2 ; 它们的 N (即 $\max[N_1, N_2]$) 点 DFT 记为: $X_1(k)$ 、

$X_2(k)$ 。若 $X_3(k) = X_1(k)X_2(k), k=0, 1, \dots, N-1$, 则:

$$\begin{aligned} x_3(n) &= \text{IDFT}[X_3(k)], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N R_N(n) \\ &\equiv x_1(n) \circledast x_2(n) \end{aligned} \quad (3.3.7a)$$

或

$$\begin{aligned} x_3(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m)x_1((n-m))_N R_N(n) \\ &\equiv x_2(n) \circledast x_1(n) \end{aligned} \quad (3.3.7b)$$

其中, $x_2((n-m))_N R_N(n)$ 、 $x_1((n-m))_N R_N(n)$ 分别是 $x_2(n)$ 、 $x_1(n)$ 的 N 点圆周移位序列, $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 序列中较短的序列要先后补零成 N 长, 所以圆周移位序列的长为 N 。符号 $\circledast$ 表示 N 点圆周卷积运算, 也可以用符号 $\circledast$ 表示, 以区别线性卷积常用运算符 $*$ 。

式(3.3.7)表示的运算定义为两个序列 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 的 N 点圆周卷积, 也称为 N 点循环卷积(简称圆周卷积或循环卷积。本书不再区分两种叫法)。

显然, 因式(3.3.7)中序列 $x_3(n)$ 长为 N , 故两个序列 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 的 N 点圆周卷积的结果是长为 N 的序列; 一般地, 设两个序列长分别为 N_1 、 N_2 点, 则两者的圆周卷积结果至少是长为 N (即 $\max[N_1, N_2]$) 点的序列。圆周卷积的具体计算可由式(3.3.7)给出的定义进行, 更形象的图解方法将在下面通过例题给出。

时域圆周卷积定理表明: 两时域序列的 DFT 之积, 是离散时间域上这两个序列的圆周卷积的 DFT。

2. 频域循环卷积定理

设 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 的 N 点 DFT 为 $X_1(k)$ 、 $X_2(k), k=0, 1, \dots, N-1$ 。如果 $x_3(n) = x_1(n) x_2(n)$, 其 N 点 DFT 为:

$$\begin{aligned} X_3(k) &= \text{DFT}[x_3(n)] \equiv \frac{1}{N} X_1(k) \circledast X_2(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} X_1(j) X_2((k-j))_N R_N(k) \end{aligned} \quad (3.3.8a)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} X_2(j) X_1((k-j))_N R_N(k) \\ &\equiv \frac{1}{N} X_2(k) \circledast X_1(k) \end{aligned} \quad (3.3.8b)$$

其中, $X_1((k-j))_N R_N(k)$ 、 $X_2((k-j))_N R_N(k)$ 是 $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 的圆周移位。式(3.3.8)就是频域循环(圆周)卷积定理。

频域圆周卷积定理表明: 离散时间域上两序列之积的 DFT, 对应着离散数字频率域上这两个序列的 DFT 之圆周卷积。

3. 循环卷积的计算

不管是时域序列的圆周卷积还是频域序列的圆周卷积, 计算方法是一样的。下面根据

式(3.3.7)表示的圆周卷积的定义,从表达式的物理意义出发,通过例子说明 N 点圆周卷积的图解计算方法。

例 3.3.1 设 $x_1(n)=[1,1,1,0,0,0,0,0]$; $x_2(n)=[1,1,0,0,0,0,0,1]$; 求其 8 点圆周卷积, $x_3(n)=x_1(n)\textcircled{N}x_2(n)$ 。

解: 因为 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 长度均为 8,恰好与要求的圆周卷积的最少点数相等,均不再需要进行后补零处理。

图解法计算圆周卷积的第一步:将 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 按逆时针方向均匀地排列到单位圆的 8 个等分点上。序号 n 换成 m ,正水平方向为 $m=0$ 的序列值,以便区别最终圆周卷积结果的顺序号 n ,如图 3.3.3(d)和图 3.3.3(b)所示。针对式(3.3.7a)和式(3.3.7b)两个定义式,给出下面两个图解方法流程,两个方法的计算结果是完全等效的。

1) 方法 1

(1) 将 $x_1(m)$ 循环反序:等效于有限长序列在圆周上反序,即原序列相对水平对称轴对褶,简记为 $x_1(-m)$,如图 3.3.3(a)所示,原序列相对水平轴的对称点序列值互换。

(2) 循环反序序列 $x_1(-m)$ 逆时针移位 n 个单位,图 3.3.3(a)表示 $n=0$ 的情况。

(3) 步骤(2)得到的序列与如图 3.3.3(b)所示序列 $x_2(m)$ 的对应点函数值两两相乘,并将 8 个积求和,得到 $x_3(n)$:

$$\begin{aligned} x_3(n) &= x_2(n) \textcircled{N} x_1(n) \\ &= \sum_{m=0}^7 x_2(m) x_1((n-m))_8 R_8(n) \end{aligned}$$

(4) 令 $n=0,1,\dots,7$,重复步骤(2)和步骤(3)。得到完整的圆周卷积结果,如图 3.3.3(c)所示,图 3.3.3(c)括号中的数值为该顺序点的序列值,正水平方向为 $n=0$ 的序列值。表 3.3.1 也给出了 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 8 点循环卷积的结果。

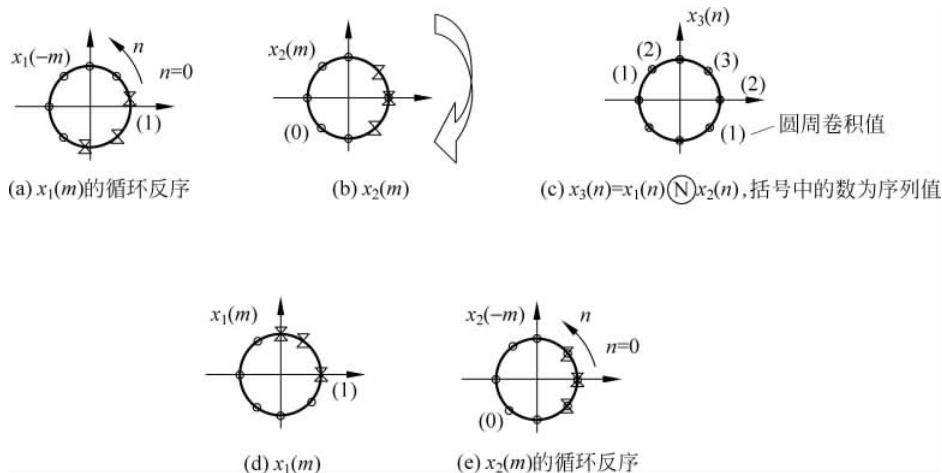


图 3.3.3 序列(圆周卷积)循环卷积过程图解

表 3.3.1 例 3.3.1 的循环卷积结果

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_3(n)$	2	3	2	1	0	0	0	1

2) 方法 2

(1) 由于序列的循环卷积具有可交换性,所以也可以把 $x_2(m)$ 循环反序,如图 3.3.3(e) 所示。

(2) 将 $x_2(-m)$ 逆时针移位 n 个单位,图 3.3.3(e) 表示 $n=0$ 的情况。

(3) 将步骤(2)得到的序列与图 3.3.3(d)所示的 $x_1(m)$ 序列对应顺序点序列值两两相乘并将 8 个积相加,得 $x_3(n)$:

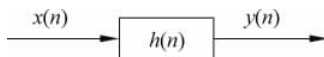
$$x_3(n) = x_1(n) \textcircled{N} x_2(n) = \sum_{m=0}^{7} x_1(m) x_2((n-m))_8 R_8(n)$$

(4) 令 $n=0,1,\dots,7$,重复步骤(2)和步骤(3)得到最终的圆周卷积序列。结果与方法 1 的完全一样。

4. 循环卷积和线性卷积的关系

在实际数字信号处理中,(数字信号)序列 $x(n)$ 通过单位取样脉冲响应为 $h(n)$ 的数字系统,则输出 $y(n)$ 是输入序列和系统单位取样脉冲响应的线性卷积,如图 3.3.4 所示。

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

图 3.3.4 序列通过单位取样脉冲响应为 $h(n)$ 的数字系统

线性卷积能否用运算更快的圆周卷积实现? 回答是肯定的,但需要在一定的条件下才能实现。

首先,考虑到两列长为 N 的序列,它们的循环卷积结果仍是长为 N 的序列,而它们的线性卷积结果是长为 $2N-1$ 的序列。更一般地,给定两列长分别为 M 、 N 的序列,它们的线性卷积结果是长为 $N+M-1$ 的序列,它们之间圆周卷积结果的长为 $\max(N,M)$ 。

为了能用循环卷积代替线性卷积,就要保证循环卷积的结果恰好是期望的线性卷积结果;显然,圆周卷积结果至少应该和线性卷积结果一样长。为此,按下列方法计算循环卷积的点数 L ,就可以通过 L 点的圆周卷积实现两序列的线性卷积。

设序列 $x(n)$ 、 $h(n)$ 的长分别为 M 、 N ,则知其线性卷积 $y(n)$ 是长为 $N+M-1$ 点的序列。

一般地,取 $L \geq N+M-1$ 。将 $x(n)$ 和 $h(n)$ 后面分别补 $L-M$ 、 $L-N$ 个零,使其长均为 L 点;对这两个后补零后得到的新的长为 L 的序列进行 L 点的圆周卷积,则结果是长 L 点的序列。可以证明,这 L 点圆周卷积结果的前 $N+M-1$ 点序列值即等于原两序列的线性卷积结果。

若取圆周卷积的点数 L 小于线性卷积结果长 $N+M-1$,则由于圆周卷积隐含的周期延拓特性,两序列的 L 点圆周卷积结果可看成是周期为 L (小于 $M+N-1$) 的周期序列的主

值序列,圆周卷积结果不能正确地表示线性卷积结果。

例 3.3.2 设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 是两个 4 点序列:

$$x_1(n) = \{1, 2, 2, 1\}, \quad x_2(n) = \{1, -1, 1, -1\}, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

- (1) 确定它们的线性卷积 $x_3(n)$;
- (2) 计算补零后的 7 点循环卷积 $x_4(n)$;
- (3) 讨论不补零的 4 点循环卷积和其他补零数目的循环卷积结果之间的区别。

解: 例 3.3.2 的 MATLAB 程序参考实现见 3.8.2 节。

根据给定的两个序列,可画出 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的时域波形,如图 3.3.5 所示。

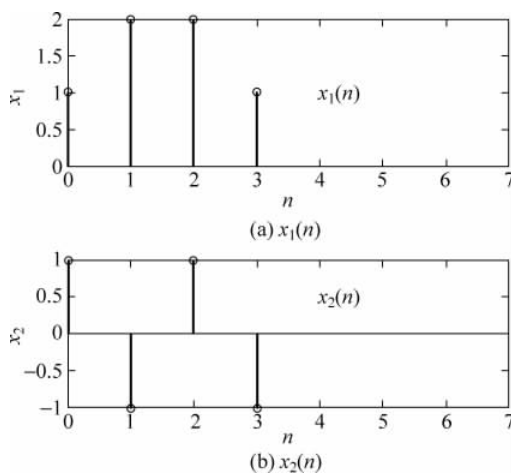


图 3.3.5 例 3.3.2 的两时域序列

(1) $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的线性卷积结果应长: $4+4-1=7$ 点。运行 3.8.2 节的有关 MATLAB 参考程序,得到 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的线性卷积结果。图 3.3.6 中 x_3 画出了线性卷积结果波形 $x_3(n)$:

$$x_3(n) = \{1, 1, 1, 0, -1, -1, -1\}, \quad n = 0, 1, \dots, 6$$

(2) 依题目给定条件知,两序列的循环卷积至少长 $\max[4, 4]=4$ 点,但为保证循环卷积与线性卷积结果一致,应将两序列后补至少 $7-4=3$ 个零,再进行延长序列的循环卷积,即循环卷积点数 $N \geq 7$ 。

运行 3.8.2 节的有关 MATLAB 参考程序结果如图 3.3.6 所示,其中 x_4 、 x_5 分别画出了 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 7 点、6 点圆周卷积结果波形 $x_4(n)$ 、 $x_5(n)$:

$$x_4(n) = \{1, 1, 1, 0, -1, -1, -1\}, \quad n = 0, 1, \dots, 6$$

$$x_5(n) = \{0, 1, 1, 0, -1, -1\}, \quad n = 0, 1, \dots, 5$$

(3) 讨论。比较图 3.3.6 中 $x_4(n)$ 、 $x_3(n)$ 波形可见,7 点圆周卷积完全等于给定序列的线性卷积。验证了我们所介绍的,即在给定条件下,可通过圆周卷积实现线性卷积的原则。

再比较图 3.3.6 中 6 点圆周卷积结果 $x_5(n)$ 和 7 点圆周卷积结果 $x_4(n)$ 波形可见, $x_5(n)$ 的长度为 6 点,比 $x_4(n)$ 少了一点,且 $x_5(0)=0$, 而 $x_4(0)=1$ 。

可以证明:6 点圆周卷积结果 $x_5(n)$ 可以通过将 7 点圆周卷积结果 $x_4(n)$, 以 6 为周期

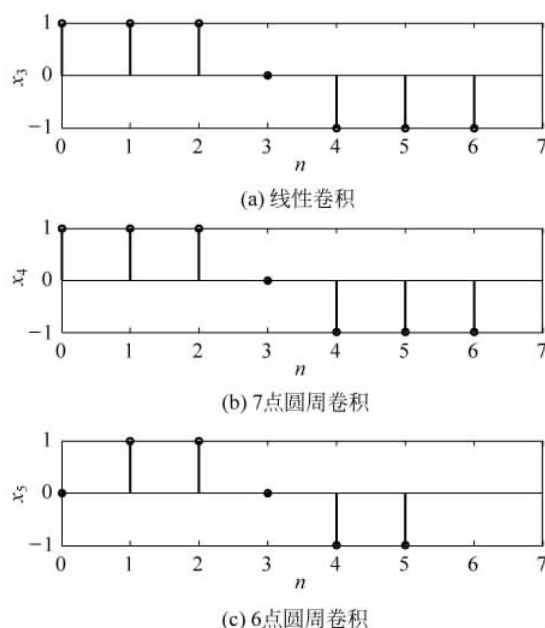


图 3.3.6 例 3.3.2 线性卷积和圆周卷积的比较

进行周期延拓,并取延拓后的 6 点主值序列得到。显然,长为 7 的序列 $x_4(n)$ 在这个延拓过程中,其首尾序列值将会“混叠”,结果导致 $x_5(0) = x_4(0) + x_4(6) = 1 + (-1) = 0$,正如图 3.3.6 所示的波形 $x_5(n)$ 。

根据上述不同点数的圆周卷积结果的关系特点,请读者思考:本例子中,如果直接进行 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 4 点圆周卷积,将其结果和这两个序列的线性卷积相比较,4 点圆周卷积结果哪些点与线性卷积的结果不同?提示:把线性卷积结果序列,以 4 为周期进行周期延拓,再取 4 点的主值序列,就是 4 点圆周卷积的结果。

5. 圆周卷积的应用

实现快速卷积:因为有限长圆周卷积的快速计算可以通过 DFT 的快速实现(FFT)进行,从而,用圆周卷积代替线性卷积,则等效于快速线性卷积。

如图 3.3.4 所示,设输入序列 $x(n)$ 长 L ,系统单位取样脉冲响应 $h(n)$ 长 M ,系统的时域输出 $y(n)$ 为线性卷积:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

可通过计算 $x(n)$ 、 $h(n)$ 的 $N=L+M-1$ 点圆周卷积,快速实现。具体步骤如下:

- (1) 计算 $x(n)$ 、 $h(n)$ 的 N 点 DFT(FFT), $X(k)$, $H(k)$;
- (2) 计算 $X(k) \cdot H(k)$;
- (3) 根据时域圆周卷积定理,对(2)的结果进行 IDFT 即为 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的圆周卷积 $x(n) \circledast h(n)$;
- (4) 根据圆周卷积与线性卷积的关系,步骤(3)的结果即为系统的时域输出 $y(n)$ 。

下面讨论快速卷积和直接卷积的运算量差异。根据定义,直接进行 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的线性卷积,其乘法运算量为:

$$m_d = LM \quad (3.3.9)$$

后面将介绍,通过快速傅里叶变换(FFT)实现快速卷积的乘法运算量为

$$m_F = \frac{3}{2}N \log_2 N + N, \quad N = L + M - 1 \quad (3.3.10)$$

当 L 不太大,且 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的长近似时,比较适合用式(3.3.10)表示的 N 点 FFT 的乘法运算量估计快速卷积的运算量;当 $L \approx M > 64$ 时,随着 M 的增加,有 $m_F \ll m_d$ 。对于 L 很大,且 $L \gg M$ 的情况, $N = L + M - 1$ 将会非常大,这时更常用的快速卷积是分段圆周卷积(如重叠相加,重叠保留法)。这方面的内容将在第 4 章具体介绍。

3.3.6 序列的相关性

两 N 点序列 $x(n)$ 、 $y(n)$ 的相关主要有线性相关和圆周相关(也称循环相关)。

1) N 点圆周相关定义

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*((n-m))_N R_N(m) \quad (3.3.11a)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N R_N(m) y^*(n) \quad (3.3.11b)$$

其中,相关延迟 m 等于 $x(n)$ 的时间序号减去 $y^*(n-m)$ 的时间序号; $x((n+m))_N R_N(m)$ 、 $y((n-m))_N R_N(m)$ 分别是 $x(n)$ 、 $y(n)$ 的 m 单位圆周移位,但序列不需要反褶。

2) 两序列的线性相关定义

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n-m) \quad (3.3.12a)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+m)y^*(n) \quad (3.3.12b)$$

$$= r_{yx}^*(-m) \quad (3.3.12c)$$

其中, m 是相关延迟, $x(n+m)$ 、 $y(n-m)$ 分别是 $x(n)$ 、 $y(n)$ 的 m 单位线性移位,也不需要反褶。

3) N 点圆周相关与线性相关的关系

式(3.3.12)是计算两个序列线性相关的理论模型,求和限在 $\{-\infty, +\infty\}$ 之间,表示线性相关计算应包括全部序列值的影响。当两个序列 $x(n)$ 、 $y(n)$ 为有限长,分别为 N_1 点、 N_2 点时,将序列 $x(n)$ 、 $y(n)$ 后补零成 $N \geq N_1 + N_2 - 1$ 点长后,求出的 N 点圆周相关序列的前 $N_1 + N_2 - 1$ 点等于其线性相关序列。

4) 讨论

(1) 比较式(3.3.7)和式(3.3.11)可知:圆周卷积要将一个序列循环反褶后再移位计算;而圆周相关不需循环反褶,只要移位,就可以求出两序列的相关序列。

(2) 定义式(3.3.11)通常称为序列 $x(n)$ 、 $y(n)$ 的 N 点互圆周相关。如果序列的相关是对同一个序列进行的,则习惯上称之为序列 $x(n)$ N 点自圆周相关。

$$r_{xx}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*((n-m))_N R_N(m) \quad (3.3.13)$$

当一个较短的序列和一个很长的序列计算圆周相关时,类似于圆周卷积,也存在有分段相关的方法。本书不做介绍。

3.3.7 帕斯瓦尔定理

帕斯瓦尔(Parseval)定理:设有限长序列 $x(n)$ 、 $y(n)$ 的 N 点 DFT 分别为 $X(k)$ 、 $Y(k)$,则:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k) \quad (3.3.14)$$

如果 $y(n)=x(n)$,则式(3.3.14)左边是时域有限序列的能量 E ,右边是序列的谱域能量和,即:

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (3.3.15)$$

显然,帕斯瓦尔定理把序列时域能量表达与其频域能量表达联系起来了,因此,有的文献称该定理为“能量定理”。式(3.3.15)也可理解为信号能量守恒的体现。

比较序列自相关定义式(3.3.13)和式(3.3.15)可见,相关间隔为零的自相关序列值:

$$r_{xx}(m) \big|_{m=0} = r_{xx}(0) = \text{序列的能量}$$

对有限长序列,式(3.3.15)表示能量 E ,也即 $r_{xx}(0)$ 有限,因此有限长序列一定是能量有限信号。这与“通信原理”课程中介绍的零均值平稳随机过程的自相关函数的性质类似,即自相关函数值 $R(0)$ 为功率有限信号的平均功率。

3.3.8 有限长序列及其离散傅里叶变换的奇偶性和对称性

类似于第2章中讨论的 DTFT 的对称性,有限长序列 $x(n)$ 及其 DFT(离散傅里叶变换) $X(k)$ 也可以定义对称性。但是,假设有限长序列长为 N ,定义区间为 $[0, N-1]$,其 N 点 DFT 的列长也为 N ,则其奇偶性和对称性,应理解为是关于“中心($N/2$)点”的对称性。下面讨论有限长序列及其 DFT 相关的共轭对称性和奇偶性的定义和性质。

1. 有限长共轭对称序列和共轭反对称序列

设 $x_{\text{ep}}(n)$ 、 $x_{\text{op}}(n)$ 分别表示有限长共轭对称序列和共轭反对称序列。则有如下定义式:

$$x_{\text{ep}}(n) = x_{\text{ep}}^*(N-n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.3.16a)$$

$$x_{\text{op}}(n) = -x_{\text{op}}^*(N-n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.3.16b)$$

当 N 为偶数时,定义式(3.3.16a)和式(3.3.16b)中的 N 可换成 $\frac{N}{2}-n$,得另一种定义式:

$$x_{\text{ep}}\left(\frac{N}{2}-n\right) = x_{\text{ep}}^*\left(\frac{N}{2}+n\right), \quad 0 \leq n \leq \frac{N}{2}-1 \quad (3.3.17a)$$

$$x_{\text{op}}\left(\frac{N}{2}-n\right)=-x_{\text{op}}^*\left(\frac{N}{2}+n\right), \quad 0 \leq n \leq \frac{N}{2}-1 \quad (3.3.17b)$$

图 3.3.7 给出了 $N=7$ 和 $N=8$ 两种长度对应的共轭对称和共轭反对称序列示意图,可清楚地说明有限长序列的“中心”对称性。图中 * 表示对应点为序列值取共轭后的值。

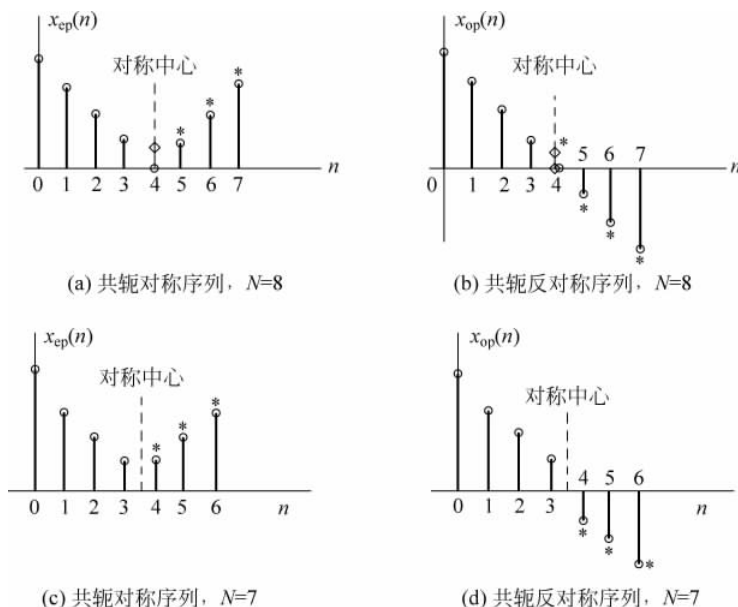


图 3.3.7 共轭对称和共轭反对称序列示意图

性质 3.3.1 任何有限长序列 $x(n)$ 均可分解为共轭对称分量和共轭反对称分量之和,即:

$$x(n) = x_{\text{ep}}(n) + x_{\text{op}}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.3.18)$$

若给定序列 $x(n)$, 其共轭对称分量 $x_{\text{ep}}(n)$ 和共轭反对称分量 $x_{\text{op}}(n)$ 可由如下计算获得。

将式(3.3.18)中的 n 换成 $N-n$, 并取复共轭, 再将定义式(3.3.16a), 式(3.3.16b)代入得到:

$$\begin{aligned} x^*(N-n) &= x_{\text{ep}}^*(N-n) + x_{\text{op}}^*(N-n) \\ &= x_{\text{ep}}(n) - x_{\text{op}}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

式(3.3.18)分别加、减式(3.3.19), 整理可得:

$$x_{\text{ep}}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.3.20a)$$

$$x_{\text{op}}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.3.20b)$$

注意: 有限长序列的长度 N 不管是偶数还是奇数, 其第 1 个样本 $x(0)$, 在 $[0, N-1]$ 的定义区间上都没有其对称样本, 如图 3.3.7 所示。

仔细观察定义式(3.3.16a)和式(3.3.16b)可见, 当 $n=0$ 时, 有 $x_{\text{ep}}(0) = x_{\text{ep}}^*(N)$, $x_{\text{op}}(0) = -x_{\text{op}}^*(N)$; 而长为 N 的序列定义区间是 $[0, N-1]$, $x_{\text{ep}}(N)$, $x_{\text{op}}(N)$ 的取值多少?

这个问题的物理解释如下:

首先,性质 3.3.1 中,有限长序列 $x(n)$ 的共轭对称分量 $x_{\text{ep}}(n)$ 和共轭反对称分量 $x_{\text{op}}(n)$,有的文献上分别称为“圆周共轭对称分量”和“圆周共轭反对称分量”。

其次,长为 N 的有限长序列 $x(n)$ 若理解成某周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列,则 $x(n)$ 的 $x_{\text{ep}}(n)$ 分量和 $x_{\text{op}}(n)$ 分量,对应地分别为周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的共轭对称分量 $\tilde{x}_e(n)$ 和共轭反对称分量 $\tilde{x}_o(n)$ 的主值序列,参见第 2 章 2.2.2 节“对称性”的内容。因此,从周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}_e(n)$ 、 $\tilde{x}_o(n)$ 看, $x_{\text{ep}}(N) = \tilde{x}_e(N)$, $x_{\text{op}}(N) = \tilde{x}_o(N)$ 的取值也就得到了合理解释。

最后,考虑到周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的共轭对称分量 $\tilde{x}_e(n)$ 、共轭反对称分量 $\tilde{x}_o(n)$ 亦是周期序列,故 $x_{\text{ep}}(N)$ 、 $x_{\text{op}}(N)$ 数值与其主值序列 $x_{\text{ep}}(n)$ 、 $x_{\text{op}}(n)$ 中的 $x_{\text{ep}}(0)$ 、 $x_{\text{op}}(0)$ 呈对称关系。

类似地,式(3.3.20a)、式(3.3.20b)中, $n=0$ 时,令序列值 $x(N) = \tilde{x}(N)$ 就是自然而然的了。

2. DFT 的共轭对称性

根据已经掌握的基础知识,我们知道任何复序列都可以分解为纯实序列和纯虚序列分量之和,也可以分解为共轭对称和共轭反对称序列分量之和。

给定任意有限长复序列 $x(n)$,其 DFT 记为 $X(k)$ 。则 $x(n)$ 有如下分解形式:

$$x(n) = x_{\text{ep}}(n) + x_{\text{op}}(n)$$

即,分解为共轭对称序列和共轭反对称序列之和,由式(3.3.20a)和式(3.3.20b)可计算各分量。或者:

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

即,分解为实序列 $x_r(n)$ 和纯虚序列 $jx_i(n)$ 之和;其中各分量可由式(3.3.21a)和式(3.3.21b)计算:

$$x_r = \text{Re}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)] \quad (\text{为 } x(n) \text{ 的纯实分量序列}) \quad (3.3.21a)$$

$$jx_i(n) = j\text{Im}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)] \quad (\text{为 } x(n) \text{ 的纯虚分量序列}) \quad (3.3.21b)$$

类似地, $x(n)$ 的 DFT $X(k)$ 在数字频率域也可分解如下:

$$\begin{aligned} X(k) &= X_{\text{ep}}(k) + X_{\text{op}}(k) \quad (\text{分解为共轭对称序列和共轭反对称序列之和}) \\ &= X_R(k) + jX_I(k) \quad (\text{分解为实序列 } X_R(k) \text{ 和纯虚序列 } jX_I(k) \text{ 之和}) \end{aligned}$$

实际上,由 DFT 的线性性和序列的共轭对称、共轭反对称的定义,可以证明:

$$\text{DFT}[x_r(n)] = X_{\text{ep}}(k) \quad (3.3.22a)$$

$$\text{DFT}[jx_i(n)] = X_{\text{op}}(k) \quad (3.3.22b)$$

其中, $X_{\text{ep}}(k)$ 、 $X_{\text{op}}(k)$ 分别为 $x(n)$ 的 DFT $X(k)$ 的共轭对称、共轭反对称分量序列。对应地:

$$\text{DFT}[x_{\text{ep}}(n)] = \text{Re}[X(k)] = X_R(k) \quad (3.3.23a)$$

$$\text{DFT}[x_{\text{op}}(n)] = j\text{Im}[X(k)] = jX_I(k) \quad (3.3.23b)$$

其中, $X_R(k)$ 、 $jX_I(k)$ 分别为 DFT $X(k)$ 的纯实、纯虚分量序列。

图 3.3.8 给出了有限长复序列 $x(n)$ 及其分解序列与相应的 DFT 之间的对应关系。即时域实序列的 DFT 是频域的共轭对称序列,共轭对称序列的 DFT 则是频域的实序列;时

域共轭反对称序列的 DFT 是频域的纯虚序列。性质 3.3.2 给出了更具体的时域序列的 DFT 特性。

$$\begin{array}{c} x(n)=x_r(n)+jx_i(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n) \\ \text{DFT:} \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ X(k)=\text{DFT}[x(n)]=X_{ep}(k)+jX_{ip}(k)=X_R(k)+jX_I(k) \end{array}$$

图 3.3.8 有限长序列的分解序列与其 DFT 序列的分解序列之间的对应关系

性质 3.3.2 设 $x(n)$ 是长度为 N 的实序列, 则分解式 $x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$, 其中, $0 \leq n \leq N-1$ 中的 $x_{ep}(n)$ 、 $x_{op}(n)$ 均为实序列, 且分别为“中心”偶对称和“中心”奇对称的序列。若记 $X(k)=\text{DFT}[x(n)]$, 则:

$$(1) X(k)=X^*(N-k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \text{ (是共轭对称序列)}; \quad (3.3.24)$$

(2) 如果 $x(n)=x(N-n)$, 是“中心”实偶对称的, 则:

$$X(k)=X(N-k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \text{ (是实偶对称序列)} \quad (3.3.25)$$

(3) 如果 $x(n)=-x(N-n)$, 是“中心”实奇对称的, 则:

$$X(k)=-X(N-k),$$

且

$$X(k)=jX_I(k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.3.26)$$

是纯虚奇对称的, 其中 $X_I(k)$ 是实序列。

证明: 以性质 3.3.2 中式(3.3.26)为例。根据 DFT 的定义:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

将 $x(n)=-x(N-n)$ 代入, 并进行变量代换 $N-n=m$:

$$\begin{aligned} X(k) &= -\sum_{n=0}^{N-1} x(N-n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= -\sum_{m=N}^1 x(m)e^{j\frac{2\pi}{N}km} \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

若把 $x(n)$ 的 N 个序列值均匀地排列到单位圆上, 显然式(3.3.27)右边求和等效为 m 在 $[0, N-1]$ 范围内的求和:

$$X(k) = -\sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{j\frac{2\pi}{N}km} \quad (3.3.28)$$

又因:

$$X(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3.3.29)$$

比较式(3.3.28)和式(3.3.29)的右边, 有:

$$X(k) = -X(N-k), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

将式(3.3.28)两边取共轭, 考虑到 $x(n)$ 是实序列, 有:

$$X^*(k) = -\sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km} = -X(k) \quad (3.3.30)$$

仅当 $X(k)=jX_I(k)$, $X_I(k)$ 为实序列时, 式(3.3.30)才会成立。

3. 应用

实际应用中,经常要对实序列进行 N 点 DFT 计算,利用上面所介绍的离散傅里叶变换的共轭对称性和奇偶对称性可减少运算量,提高计算效率。

(1) 计算 N 点 DFT,当 N 为偶数时,只要计算前 $\frac{N}{2}+1$ 点;当 N 为奇数时,只要计算前 $\frac{N+1}{2}$ 点;其他点按照式(3.3.24)可求,可减少近一半的计算量。

(2) 利用 DFT 的共轭对称性,计算一个 N 点 DFT $X(k)$ 可得两个不同实序列的 N 点 DFT。设 $x_r(n)$ 、 $x_i(n)$ 为两个实序列,下面介绍通过一次 N 点 DFT,得到这两个序列的 DFT $X_r(k)$ 、 $X_i(k)$, $k=0,1,\dots,N-1$ 。构造新复序列:

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

对 $x(n)$ 进行 N 点 DFT,得 $X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$ 。由式(3.3.20a)和式(3.3.20b)可求出 $X_{ep}(k)$ 、 $X_{op}(k)$ 分量,再利用式(3.3.22a)和式(3.3.22b)得:

$$\frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] = \text{DFT}[x_r(n)] = X_r(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$-j \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] = \text{DFT}[x_i(n)] = X_i(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

3.4 频域取样

设列长为 M 的序列 $x(n)$,其 z 变换为 $X(z)$,其 N 点 DFT 为 $X(k)$, $k=0,1,\dots,N-1$ 。其 N 点 IDFT 为:

$$x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.4.1)$$

根据 IDFT 隐含有周期性的特点, $x_N(n)$ 可看成是周期为 N 的时域序列的主值序列。数字信号处理中会遇到的问题是:

- (1) $x(n)$ 和 $x_N(n)$ 的关系如何?
- (2) $X(z)$ 和 $X(k)$ 的关系如何?
- (3) 能否由 $X(k)$ 重建 $X(z)$?

本节介绍的频域取样及频域取样定理,可以在一定程度上回答和解释上述问题。

性质 3.4.1 频域取样。

长为 M 的序列 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

因 $x(n)$ 长为 M :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)z^{-n}$$

当 $N \geq M$ 时,可等效写为:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \quad (3.4.2)$$

且 $X(z)$ 的收敛域包含 z 平面上的单位圆, 即 $x(n)$ 存在傅里叶变换。

令 $z = z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$, $k=0, 1, \dots, N-1$, 在 z 平面单位圆上对 $X(z)$ 等间隔采样 N 点, 得到:

$$X(k) = X(z) \big|_{z=z_k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.4.3a)$$

代入式(3.4.2), 得

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3.4.3b)$$

式(3.4.3a)中右边表示在数字频率区间 $[0, 2\pi]$ 上, 对 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换 (DTFT) $X(e^{j\omega})$ 的 N 点等间隔采样, 式(3.4.3b)正是 $x(n)$ 的 N 点 DFT 定义式, 即 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 在 z 平面单位圆上的 N 点等间隔采样就是 $x(n)$ 的 N 点 DFT 序列 $X(k)$ 。

如果对 $x(n)$ 的 N 点 DFT 序列 $X(k)$ 进行 IDFT, 根据 IDFT 隐含的周期特性, 由式(3.4.1)得到的时域序列 $x_N(n)$ 长为 N , 而原 $x(n)$ 的长为 M 。频域采样定理给出了 $x_N(n)$ 和 $x(n)$ 两者之间的关系。

频域采样定理 如果序列 $x(n)$ 的长度为 M , 则只有当对其 DTFT $X(e^{j\omega})$ 进行的频域采样点数 $N \geq M$ 时, 才有:

$$x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)] = x(n), \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.4.4)$$

式(3.4.4)表示可由序列的 DTFT 的适当的频域采样序列 $X(k)$ 无失真地恢复原有限长时域序列 $x(n)$ 。否则由 DTFT 的采样序列逆变换得到的时域序列, 相对原有限长时域序列有时域混叠现象, 会产生失真。

因为根据 DFT 与 DFS 的关系: $X(k)$ 是 $x_N(n)$ 以 N 为周期的周期延拓序列 $\tilde{x}(n)$ 的 DFS 的主值序列。可以证明 $x_N(n)$ 是原序列 $x(n)$ 以 N 为周期的周期延拓序列的主值序列。当 $N < M$ 时, $x(n)$ 以 N 为周期的周期延拓会产生时域混叠现象。

显然, 对无限长的时域序列, 无论对其 DTFT 在数字频域的采样点 N 多大, 由频域采样序列 $X(k)$ 的 IDFT 恢复的时域序列都不能完全消除时域混叠现象。加大数字频域的采样点 N , 只能使恢复的信号逼近 $x(n)$, 减小误差。

下面给出在满足频域采样定理的条件下, 用频域采样序列 $X(k)$ 恢复原有限长序列 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 的公式。根据有限长序列的 z 变换和 IDFT 的定义, 具体推导如下。

设序列 $x(n)$ 的长度为 M , 在频域 $0 \sim 2\pi$ 对其 z 变换等间隔采样 N 点, $N \geq M$, 则有:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

$$X(k) = X(z) \big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

式中,

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \quad (\text{这里 } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}})$$

将上面的 $x(n)$ 代入 $X(z)$ 的表示式中得:

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \right] z^{-n} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-kn} z^{-n} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - W_N^{-kN} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}
\end{aligned}$$

式中, $W_N^{-kN} = 1$, 故:

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (3.4.5a)$$

$$= \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (3.4.5b)$$

令

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (3.4.6)$$

则

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi_k(z) \quad (3.4.7)$$

式(3.4.7)称为用有限长时域序列的 DFT $X(k)$ 表示 $X(z)$ 的 z 域内插公式, 式(3.4.6)中的 $\varphi_k(z)$ 称为 z 域内插函数。当 $z = e^{j\omega}$ 时, 式(3.4.6)和式(3.4.7)就成为在满足频域取样定理条件下, 由有限长时域序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k)$ 恢复 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的频率域内插函数和内插公式, 即:

$$\begin{aligned}
\varphi_k(\omega) &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}} \\
&= \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}N\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N}\right)} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi k}{N}\right)} \\
&= \frac{1}{N} \frac{\sin\left[\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N}\right)N\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N}\right)} e^{j\frac{\pi k}{N}(N-1)} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \\
X(e^{j\omega}) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi_k(\omega)
\end{aligned}$$

进一步化简, 得:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \quad (3.4.8)$$

其中,

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}N\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \quad (3.4.9)$$

在第5章中,我们将看到, z 域 $X(z)$ 的插值公式(3.4.5b)正是有限长单位取样响应系统的可能实现结构之一,“频率取样型”的理论根据。

3.5 用离散傅里叶变换对连续时间信号进行谱分析

第4章将要介绍的DFT的快速算法(FFT)的出现,使DFT在许多领域,如数字通信、音视频信息处理、功率谱估计、系统分析、雷达理论、光学、医学、地震等领域有着广泛应用。在众多的数值分析应用中,时域以卷积运算和相关运算的处理为基础,频域以傅里叶变换类谱分析为基础。本节主要介绍用DFT对连续时间信号进行谱分析方面的最基本的概念和应用。

3.5.1 离散傅里叶变换是对连续时间信号傅里叶变换的近似

对信号进行谱分析的基本目标是:得到待分析信号频率特性,即分析信号主要能量(功率)所在的频率范围或可能包含的频率分量,以及所得信号频谱中各分量的相对电平关系。对连续时间信号进行谱分析的基本方法——傅里叶变换(FT)虽然很精确,但其不能充分发挥计算机数值计算的优势。实际中,常用离散傅里叶变换(DFT)代替,近似实现连续时间信号的傅里叶变换。因为离散傅里叶变换可以通过快速算法(FFT),在计算机或数字信号处理器(DSP)平台上高效、实时地实现。

考虑到DFT是对离散时间有限长序列 $x(n)$ 定义的,因此对连续时间信号 $x'(t)$ 应用DFT进行谱分析,必然涉及两方面的处理:一是要对 $x'(t)$ 取样,使之成为时间离散的序列;二是要截断,取得有限长信号。这两个处理导致用DFT对连续时间信号进行谱分析,仅是傅里叶变换分析的近似。两种分析结果的近似程度(误差大小)与待分析信号 $x'(t)$ 的固有带宽、采样频率、截取长度等物理参数以及DFT的点数等计算参数有关。

设连续时间信号 $x'(t)$ 是带限的,其频率范围为 $[0, f_b]$,信号持续时间 t 任意,对其截断,截取持续时间总长度为 T_L 的一段,记为 $x(t)$ 。根据奈奎斯特抽样定理,选择采样频率 $f_s \geq 2f_b$,对 $x(t)$ 在时间 t 轴上等间隔(间隔 $T = \frac{1}{f_s}$)取样得序列 $x(n)$,准备进行DFT分析。

这里要注意的问题是:截取的有限长(T_L)信号片段 $x(t)$ 的频谱结构 $X(j\Omega)$ 是确定的,假设 $X(j\Omega)$ 能反映原始信号 $x'(t)$ 的频谱结构,对 $x(t)$ 进行采样,进行DFT分析才是有意义的。对时长 T_L 的信号片段 $x(t)$ 采样,采样信号序列的频谱是 $X(j\Omega)$ 以周期 f_s 延拓的周期谱,采样率 f_s 足够高,可保证在奈奎斯特频率间隔 $\left[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}\right]$ 内采样信号序列 $x(n)$ 的频谱和截断所得的连续信号 $x(t)$ 的频谱 $X(j\Omega)$ 一样。

还要注意选择合适点数的DFT进行谱分析,结果才能更好地近似有限长信号 $x(t)$ 的频谱 $X(j\Omega)$ 。这些问题可通过具体的“物理”频率分辨率和“计算”频率分辨率指标进行定量描述。“频率分辨率”是谱分析质量的基本参数之一,指可分辨信号中频率分量或者频率变化的能力。

3.5.2 频率分辨率

数字信号处理中的分辨率可指时间分辨率和频率分辨率,其中频率分辨率又可分为物理频率分辨率(physical frequency resolution)和计算频率分辨率(computational frequency resolution)。形象地讲,频率分辨率是指离散频谱中相邻两点间的频率间隔,即可识别的最小频率变化;当两相邻离散谱线之一为零频率(直流分量)时,另一谱线对应的频率则是信号中的最小非零频率分量,所以频率分辨率也可理解为“可识别的最小频率分量”。

1. 物理频率分辨率 Δf

设给定的有限长信号 $x(t)$ (模拟/数字)总持续时间长度 T_L ,如图 3.5.1 所示。物理频率分辨率 Δf 定义为:

$$\Delta f = \frac{1}{T_L} \quad (3.5.1)$$

从图 3.5.1 可见,时长为 T_L 的信号 $x(t)$ 中可能的信号周期小于或等于 T_L ,表示信号 $x(t)$ 中可能包含的最小频率分量 $f_{\min} = \frac{1}{T_L}$ 。显然这段信号的 T_L 越长,信号能包含的最低频率分量就越小。对应地,对该信号做频谱分析时,可识别的信号频率分量大于或等于物理频率分辨率 Δf ,根据式(3.5.1),物理频率分辨率 Δf 由拟处理信号的总时长确定;反过来讲,物理频率分辨率 Δf 是频谱分析应能分辨的最小频率差。

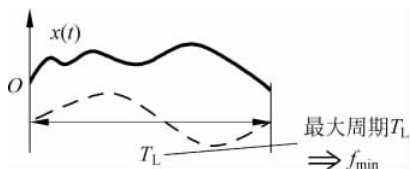


图 3.5.1 总时长为 T_L 的信号中可能的最小频率分量 $f_{\min}$

给定系统采样率 f_s 后,有限时长 T_L 内信号 $x(t)$ 可包含的取样点数 $L = T_L f_s$ 。因此在给定系统采样频率 f_s 的条件下,物理频率分辨率 Δf 还可由记录数据的采样序列长 L 确定:

$$\Delta f = \frac{1}{T_L} = \frac{f_s}{L} \quad (3.5.2)$$

2. 计算频率分辨率 Δf_{bin}

设已知系统的采样率 f_s ,对截断得到的有限长采样序列 $x(n)$ 进行 N 点 DFT,可得到频域序列 $X(k)$ 。 $X(k)$ 等于对采样信号 $x(n)$ 的 DTFT 频谱 $X(e^{j\omega})$ 在奈奎斯特频率范围 $[0, f_s]$ 内进行频域采样,其中 $\left[\frac{f_s}{2}, f_s\right]$ 范围上的频谱对应于原 DTFT 频谱的负频率范围 $\left[-\frac{f_s}{2}, 0\right]$ 的频谱水平右移 f_s 。从谱分析的物理意义上讲,DFT 处理有限长连续时间信号

$x(t)$ 的本质之一是用数字频率的频谱序列值 $X(k)$ 近似原信号 $x(t)$ 的连续频谱函数 $X(j\Omega)$ 。

因为在时域对连续时间信号 $x(t)$ 采样后, $x(t)$ 的连续频谱函数 $X(j\Omega)$ 在模拟频率域以 f_s 为周期进行周期延拓就是采用序列 $x(n)$ 的频谱函数; 对应到数字频率域, 即为周期为 2π 的频谱函数 $X(e^{j\omega})$, 所以 N 点 DFT 计算能反映的信号最小频率变化(频域采样间隔)为 $\frac{f_s}{N}$ (单位为 Hz) 或 $\frac{2\pi}{N}$ 。因此, N 点 DFT 对应的计算频率分辨率 Δf_{bin} 定义为:

$$\Delta f_{\text{bin}} = \frac{f_s}{N} \quad (3.5.3)$$

3. 物理频率分辨率 Δf 和计算频率分辨率 Δf_{bin} 的比较

对任意长的连续时间信号 $x'(t)$ 的 T_L 长的时域记录 $x(t)$ 以采样频率 f_s 进行采样得 $x(n)$ 。这种截断处理对应的物理频率分辨率 Δf 根据式(3.5.1)的定义, 有如下特点。

(1) 取决于实际有限长信号(采样)序列 $x(n)$ 的参数。时域序列一定, Δf 就是确定的。

(2) $x(n)$ 的固有频谱(DTFT)只能区分出 $x'(t)$ 的频率分量中频差大于或等于物理频率分辨率的各频率分量。

(3) 若 $x'(t)$ 的频率分量中确实有频差小于物理频率分辨率的分量, 则这些分量在 $x(n)$ 的频谱中会显示出“混叠效应”, 从而在 DFT 谱分析中无法辨识。

用 N 点 DFT 进行序列频谱分析, 给定采样频率 f_s , 计算频率分辨率 Δf_{bin} , 根据式(3.5.3)的定义, 是由 DFT 的点数 N 限定的。

因此, 给定采样频率 f_s 的条件下, 若长为 T_L (或长为 L 点) 的序列 $x(n)$ 的频谱物理频率分辨率 $\Delta f = \frac{1}{T_L} = \frac{f_s}{L}$ 足够高, 就可以清楚地显示原 $x'(t)$ 的最小频率变化 Δf_{min} 情况, 则 DFT 点数 N 增加, 会得到更多离散频率点 $\omega_k = k \frac{2\pi}{N}$ ($k=0, 1, \dots, N-1$) 处的频谱值, 即 DFT 各谱线对应角频率间隔 $\Omega_1 = \frac{2\pi}{NT} = 2\pi \frac{f_s}{N}$ 减小, 使计算频率分辨率 Δf_{bin} 提高, 可分辨出序列 $x(n)$ 中具有更小频率变化的有关频率分量, 从而提高对原连续时间信号 $x'(t)$ 的频率成分的估计精度。

若截断信号的物理频率分辨率 Δf 差, 即 $x(t)$ 的总长度 (T_L) 短, 则对应 $x(n)$ 总点数 L 少, $x(n)$ 的频谱已不能反映原 $x'(t)$ 的实际最小频率变化 Δf_{min} , 即物理频率分辨率 $\Delta f > \Delta f_{\text{min}}$; 则通过增加 DFT 的点数 N , 虽然提高了计算频率分辨率, Δf_{bin} 很小, 但也无法识别实际 $x'(t)$ 中的具有最小频率变化 Δf_{min} 的相关频率分量。

3.5.3 离散傅里叶变换分析连续时间信号 $x(t)$ 实例

例 3.5.1 设模拟信号 $x(t)$ 有三个频率分量 $f_1=2\text{kHz}$, $f_2=2.5\text{kHz}$, $f_3=3\text{kHz}$, 具体如下:

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) + \cos(2\pi f_3 t), \quad t \text{ 的单位是 ms}$$

以采样频率 $f_s=10\text{kHz}$ 对其采样。取采样序列的采样点数 $L=10, 20$ 两种情况, 对每种情况分别进行 $N=32, 64$ 点的 DFT。问所得频谱能否区分 $x(t)$ 中的三个频率分量?

解: 例 3.5.1 的 MATLAB 程序参考实现见 3.8.3 节。

给定模拟信号的最高频率成分为 3kHz, 故选择 10kHz 的采样频率对 $x(t)$ 进行时域采样, 满足奈奎斯特定理, 采样不会引起信号失真。运行 3.8.3 节中的相应程序, 可绘出对连续时间信号 $x(t)$ 以 $f_s=10\text{kHz}$ 进行时域采样后, 根据两种持续时间长度截断所得到的序列 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 的时域波形, 如图 3.5.2 所示。

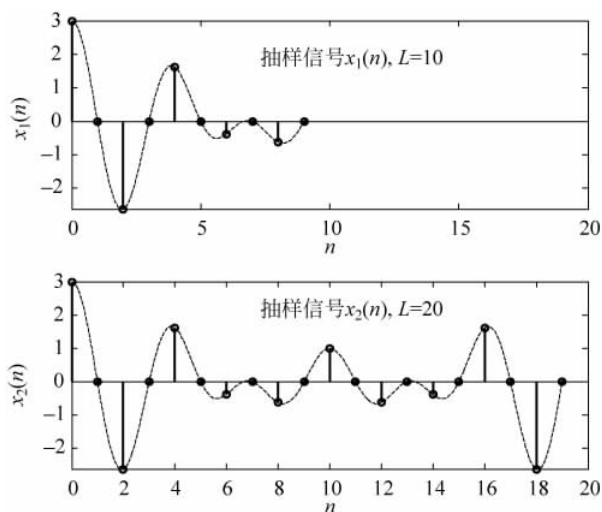


图 3.5.2 连续时间信号以 f_s 采样后, 分别取 $L=10, 20$ 个样值的时域波形

根据频率分辨率的定义, 采样频率 $f_s=10\text{kHz}$ 时, 取 L 个样点的序列 $x(n)$ 对应的物理频率分辨率为 $\Delta f = \frac{f_s}{L}$; N 点 DFT 对应的计算频率分辨率 $\Delta f_{\text{bin}} = \frac{f_s}{N}$ 。下面就采样点数 L 、DFT 的点数 N 取不同值时, 对模拟信号 $x(t)$ 进行谱分析的结果, 特别是频谱分析误差进行研究。

依题意可知, 模拟信号 $x(t)$ 的最低频率分量为 2kHz, 而最小频率间隔为 $\Delta f_{\text{min}} = 0.5\text{kHz}$; 综合考虑, 为了能正确检测 $x(t)$ 的各频率成分, 选择的频谱分析系统的频率分辨率值最好小于 0.5kHz。

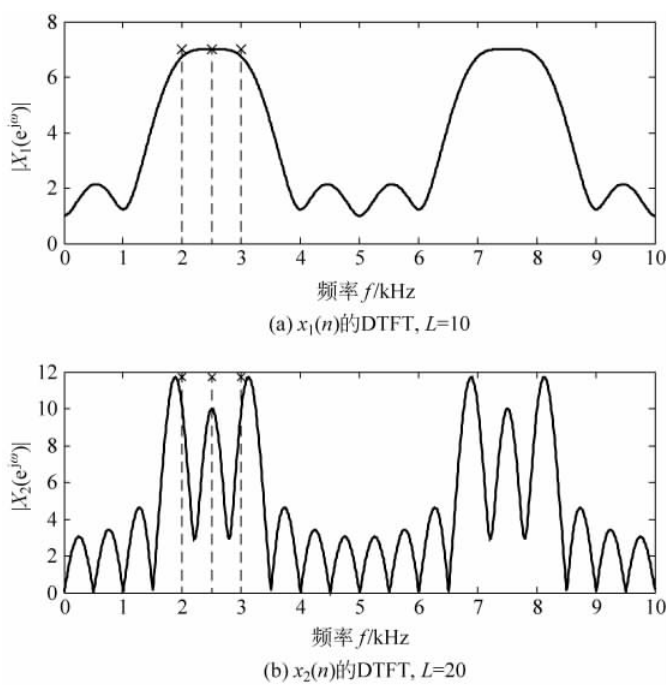
(1) 采样点数 $L=10$ 时, 截断序列 $x_1(n)$ 的物理分辨率为:

$$\Delta f = \frac{f_s}{L} = \frac{10}{10}\text{kHz} = 1\text{kHz}$$

数值大于实际模拟信号 $x(t)$ 的最小频率间隔 0.5kHz, 因此截断对应的 10 点样值序列 $x_1(n)$ 的频率分辨率较差。 $x_1(n)$ 的频谱(DTFT)相对于原模拟信号 $x(t)$ 的频谱会出现混叠现象, 如图 3.5.3 所示, 平坦的频谱包络不能区分模拟信号 $x(t)$ 中的 2kHz、2.5kHz 和 3kHz 的频率分量。

这时若进行 N 点 DFT, 频谱分析对应的计算频率分辨率分别为

$$N=32 \text{ 时, } \Delta f_{\text{bin}} = \frac{f_s}{N} = \frac{10}{32}\text{kHz} = 0.3125\text{kHz}$$

图 3.5.3 长分别为 $L=10, 20$ 的截断序列的 DTFT 幅度谱

$$N = 64 \text{ 时}, \quad \Delta f_{\text{bin}} = \frac{f_s}{N} = \frac{10}{64} \text{ kHz} = 0.15625 \text{ kHz}$$

数值都小于原模拟信号 $x(t)$ 的最小频率间隔, 计算频率分辨率够好。但两种点数的 DFT 结果并不能区分实际信号中的三个频率分量, 如图 3.5.4(a) 所示。说明截断信号的物理频率分辨率差的条件下, DFT 的计算频率分辨率精度如何已无关紧要。

(2) 采样点数 $L=20$ 时, 截断序列 $x_2(n)$ 的物理分辨率为:

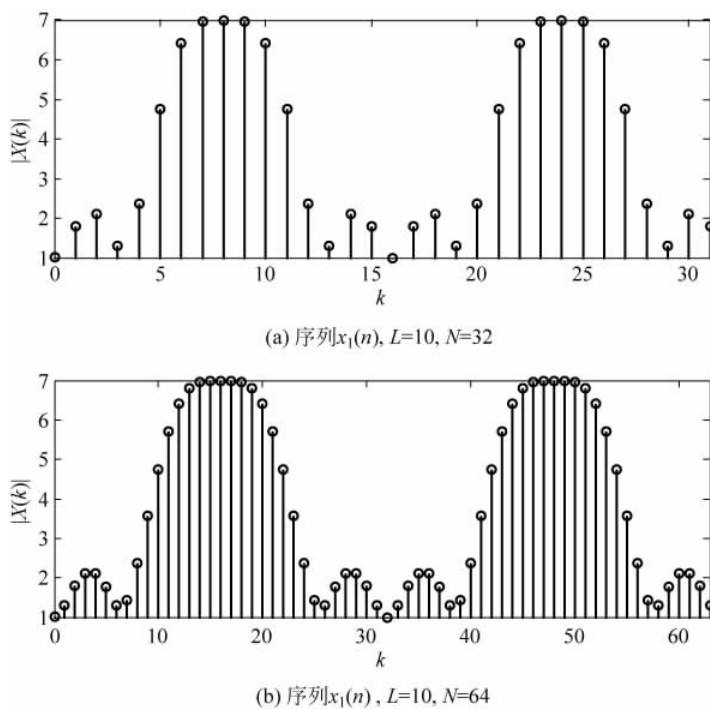
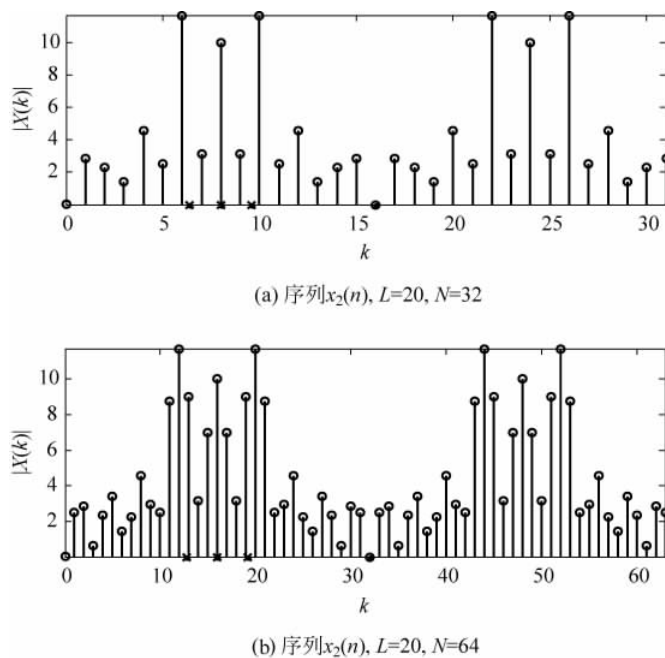
$$\Delta f = \frac{f_s}{L} = \frac{10}{20} \text{ kHz} = 0.5 \text{ kHz}$$

数值刚好等于实际模拟信号的最小频率间隔 0.5 kHz 。因此截断对应的 20 点样值序列 $x_2(n)$ 的频谱 (DTFT) 恰能区分 $x(t)$ 的三个频率分量, 如图 3.5.3 中 $0 \sim \frac{f_s}{2}$ 范围内的三个谱峰所示。但有两个谱峰偏离实际的 2 kHz 、 3 kHz 频率点 (虚线指示的位置)。在这种情况下, 选用大点数 N 的 DFT, 对应的计算频率分辨率将提高, 可以在一定程度上减少频谱估计误差。如图 3.5.5 所示, 其中符号 $\times$ 处表示实际信号频率点, 可见当 $N=64$ 时, 存在着更近似于实际频点的 DFT 谱线。

(3) 误差分析

在长 L 点的截断序列 $x(n)$ 的 DFTF 可以反映原连续时间信号 $x(t)$ 的各频率分量条件下, 如图 3.5.3(b) 所示情况, 图 3.5.5 所示的 N 点 DFT 的离散谱线 $k_i (i=0, 1, \dots, N-1)$ 对应的模拟域频率值为 f_{k_i} :

$$f_{k_i} = k_i \frac{f_s}{N} \quad (3.5.4)$$


 图 3.5.4 长为 $L=10$ 及 $N=32, 64$ 的截断序列的 DFT 幅度谱

 图 3.5.5 长为 $L=20$ 及 $N=32, 64$ 的截断序列的 DFT 幅度谱

N 点 DFT $X(k)$ 的序列号 k_i 为整数, 对应的频率值 f_{k_i} 与实际的频率分量 f_i 可能有误差。如果对实际频率分量 f_i , 存在整数 k_{f_i} , 满足:

$$f_i = k_{f_i} \frac{f_s}{N}, \quad k_{f_i} = f_i \frac{N}{f_s} \quad (3.5.5)$$

则整数 k_{f_i} 必为 DFT 的某一谱线序列号, 可精确指示实际频率分量 f_i 。例 3.5.1 中, $f_s = 10\text{kHz}$, $f_2 = 2.5\text{kHz}$, 在 $N = 32$ 点的 DFT 中, 由式(3.5.5)计算序号:

$$k_{f_2} = \frac{2.5\text{kHz} \times 32}{10\text{kHz}} = 8$$

是整数, 表明 32 点 DFT 序号为 8 的谱线精确地指示出了信号中的 2.5kHz 频率分量。进一步, 对 $N/2 = 32/2 = 16$ 中心对称的 $X(k)$ 序号 $N - k_{f_2} = 32 - 8 = 24$ 则给出了频率分量 f_2 的镜像频率点, 图 3.5.5 中显示该频率点处, $|X(24)|$ 是局部峰值。

反之, 对 DFT 的整数数字频率点序号 k_i , 根据式(3.5.4)计算 f_{k_i} , 如果仅有 $f_{k_i} \approx$ 实际信号频率分量 f_i , 这时整数 k_i 表示的频率分量是模拟域实际频率分量 f_i 的近似值。例 3.5.1 中, 当 $N = 64$, $f_s = 10\text{kHz}$ 时, 由式(3.5.5)计算连续时间信号中 $f_1 = 2\text{kHz}$ 的频率分量对应的“序号”:

$$k_{f_1} = \frac{2\text{kHz} \times 64}{10\text{kHz}} = 12.8$$

不是整数, 则在 64 点 DFT $X(k)$ 中与 $k_{f_2} = 12.8$ 近似的整数序号是 $k = 12, 13$, 所以 DFT 数字频率点序号 $k_1 = 12$ 或 13 处的谱线可用来近似实际频率分量 $f_1 = 2\text{kHz}$ 的谱线。

根据 DFT 对 $N/2$ 的中心对称性: $N - k_1 = 64 - 13 = 51$ 点或 $N - k_1 = 64 - 12 = 52$ 点的谱线也近似对应着实际谱分量 f_1 的镜像。这种近似误差的原因是物理频率分辨率或计算频率分辨率不够好, 主要取决于两者中指标更差的那个频率分辨率。例 3.5.1 中, 20 点序列的物理频率分辨率仅为 0.5kHz, 远劣于 32 点 DFT 对应的计算频率分辨率 0.3125kHz, 因此是 32 点 DFT 频谱分析近似误差的主要原因, 可通过增加数据长度 L , 减小此偏差。

例 3.5.1 中实际频率 $f_i (i = 1, 2, 3)$ 与 $N = 32, 64$ 点 DFT 序列中对应的数字频率序号 k_i 如表 3.5.1 所示, 表中 k_{f_i} 同时给出了实际频率的镜像频率点对应“序号”, 但 k_i 仅给出了近似实际频率谱线的序号, 其中粗体 DFT 序号是最接近实际 k_{f_i} 的序号。

表 3.5.1 由式(3.5.5)计算出 k_{f_i} , 近似表示 f_i 的 DFT 数字频率序号 k_i

对应的序号 k_{f_i}	f_1	f_2	f_3	取整的序号 $k_i = [k_{f_i}]$ DFT 离散频点 (省略镜像)序号	f_1	f_3
$N = 32$	6.4 , 25.6	8, 24	9.6 , 22.4		6 或 7	9 或 10
$N = 64$	12.8 , 51.2	16, 48	19.2 , 44.8		12 或 13	19 或 20

由图 3.5.5 和表 3.5.1 可见, 除 2.5kHz 频率分量外, $f_1 = 2\text{kHz}$, $f_3 = 3\text{kHz}$ 两个频率, 对应非整数的 k_{f_i} 。说明序列号为整数的 DFT 的峰值谱线仅近似表示了 $x(t)$ 信号的这两个频率分量。若截断序列的物理频率分辨率够好, 定义最接近实际的归一化离散频率为 $\frac{[k_{f_i}]}{N}$, $[\cdot]$ 表示取整数, 它与实际归一化频率 $\frac{f_i}{f_s}$ 之差, 可定义为误差:

$$E = \left| \frac{f_i}{f_s} - \frac{[k_{f_i}]}{N} \right| \quad (3.5.6)$$

该误差随 DFT 的长度 N 增加而减小,这是因为 N 增加,计算频率分辨率就会提高。例如 $f_s=10\text{kHz}$, $f_1=2\text{kHz}$, $f_2=2.5\text{kHz}$, $f_3=3\text{kHz}$,实际的归一化频率和最接近的 32 点、64 点 DFT 的归一化离散频率间的误差见表 3.5.2,与理论分析一致。

表 3.5.2 不同点数 DFT 峰值谱线表示实际 $x(t)$ 信号的频率分量的误差

	f_1/f_s	f_2/f_s	f_3/f_s	取整	f_1/f_s	f_3/f_s	误差 E
$N=32$	0.2	0.25	0.3	$\frac{[k_{f_i}]}{N}$	0.1875	0.3125	$\pm$ 0.0125
$N=64$					0.203125	0.296875	$\pm$ 0.0031
备注	DFT 近似离散频率对实际频率的误差,随 DFT 的长度增加而减小						

3.6 用离散傅里叶变换对离散时间信号进行谱分析

前面已经介绍,离散时间信号,序列 $x(n)$ 的谱是其 DTFT 函数 $X(e^{j\omega})$,也是序列的 z 变换 $X(z)$ 在 z 平面单位圆上的情况,即 $z=e^{j\omega}$ 时 $X(z)$ 的特例。根据 DFT 的定义,DFT 只适合对有限长序列和周期序列进行谱估计,下面就对这两种情况分别讨论。

1. 有限长序列 $x(n)$

考虑到有限长序列 $x(n)$ 的 DFT—— $X(k)$ 就是其 z 变换在 z 平面的单位圆,数字频率区间 $[0, 2\pi]$ 上的等间隔有限采样。所以,有限长序列的 DTFT 函数 $X(e^{j\omega})$ 可直接用 DFT 估计,给出有限数字频率点的信号谱特性。

2. 周期为 N 的序列 $\tilde{x}(n)$

因周期序列 $\tilde{x}(n)$ 不满足绝对可和条件,其严格意义的 DTFT 不存在。但借助冲击函数 $\delta(\omega)$,其频谱 $X(e^{j\omega})$ 可记为:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

其中,

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k \in (-\infty, +\infty) \text{ 的整数}$$

N 为离散时间信号(周期序列)的周期。显然周期序列的谱 $X(e^{j\omega})$ 是以 N 为周期的离散谱,谱线相对大小与周期序列离散傅里叶级数(DFS)的系数 $\tilde{X}(k)$ 成正比。用 DFT 分析周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的谱,要先对其截断。

(1) 如果截取的是周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列 $x(n)$ 。

根据 DFT 隐含的周期性:由截取的主值序列计算出的 N 点 DFT 序列 $X(k)$ 正是周期序列的 DFS $\tilde{X}(k)$ 的主值序列,故 $X(k)$ 可以表示周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的谱结构。

(2) 如果截取的是周期序列的 m 个周期, 序列长 mN 。

由序列的 m 个周期样值计算出的 $M=mN$ 点的 DFT $X_M(k)$ 与由主值序列算出的 N 点 DFT $X(k)$ 之间可以证明有如下关系

$$X_M(k) = \begin{cases} mX\left(\frac{k}{m}\right), & \frac{k}{m} = \text{整数} \\ 0, & \frac{k}{m} \neq \text{整数}, \quad k = 0, 1, \dots, mN-1 \end{cases} \quad (3.6.1)$$

可见, 只要截取 $\tilde{x}(n)$ 的整数个周期进行 DFT, $X_M(k)$ 也能表示 $\tilde{x}(n)$ 的频谱结构, 达到谱分析的目的。需要注意, 式(3.6.1)表示的 m 个周期的有限长序列的 mN 点 DFT $X_M(k)$ 和以前介绍的后补零成为长 mN 点序列, 再进行 mN 点的 DFT 得到的谱 $G(k)$ 是不同的。主要差别为:

取周期序列的 m 个周期参与离散傅里叶变换运算, 其信号总能量是一个周期长的序列总能量的 m 倍。因此, 各谐波幅度相对于单周期的 $X(r)$ 是成 m 倍数的; 如果只补零, 信号总能量未变, 相应各谐波幅度自然不变。

(3) 如果时域带限 $\tilde{x}(n)$ 序列周期未知。

这时要对周期序列的谱进行 DFT 估计, 可先取较短的 M 点一段 $x_M(n)$, 做 M 点的 DFT:

$$X_M(k) = \text{DFT}[x_M(n)], \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

再取 $2M$ 长的一段时域序列 $x_{2M}(n)$, 计算 $2M$ 点的 DFT:

$$X_{2M}(k) = \text{DFT}[x_{2M}(n)], \quad k = 0, 1, \dots, 2M-1$$

比较 $X_M(k)$ 、 $X_{2M}(k)$, 如果两者的主谱线差别满足谱分析频率误差要求, 则可用 $X_M(k)$ 或 $X_{2M}(k)$ 来近似 $\tilde{x}(n)$ 的频谱。否则, 继续将截取长度加倍, 直到连续两次的主谱线对应的频率误差满足误差要求。设最后截取的长度为 rM , 则 $X_{rM}(k)$ 表示数字频率为 $\omega = \frac{2\pi k}{rM}$ ($k = 0, 1, \dots, rM-1$) 处的离散时间周期信号谱线强度。

3.7 离散傅里叶变换应用中的问题与参数选择

在应用 DFT 解决实际问题时常遇到下列几个问题: ①混叠现象; ②栅栏效应; ③频率泄漏。这些问题与应用中信号和 DFT 的参数选择有关。下面分别讨论这些问题。

3.7.1 混叠现象

1. 混叠产生的机理

数字信号处理中的混叠可以指时域的混叠, 也可以指频域的混叠。混叠主要是由于采样引起的。

因为对连续时间信号 $x(t)$ 以采样频率 f_s 进行采样, 所得采样序列 $x(n)$ 的频谱是原连续时间信号频谱以 f_s 为周期的周期延拓。所以, 处理连续时间信号前, 常令其通过截止频

率为 f_h 的前置低通滤波器, 保证滤波器输出信号的双边谱带宽为 $2f_h$, 即得到最高频率 $\leq f_h$ 的模拟信号 $x_a(t)$ 。然后, 根据奈奎斯特采样定理, 令:

$$f_s \geq 2f_h$$

即采样时间间隔 $T = \frac{1}{f_s} \leq \frac{1}{2f_h}$, 对 $x_a(t)$ 进行时域采样。工程应用中, 常取 $f_s \approx (3 \sim 4)f_h$, 保证不会因为对 $x_a(t)$ 的时域采样, 导致信号 $x_a(t)$ 的频谱在频域以周期 f_s 延拓, 得到序列的谱时产生频谱混叠, 形成 $x_a(t)$ 的频谱失真, 失去进一步进行数字信号处理的依据。因为频谱混叠现象得到的是 $x_a(t)$ 失真的频谱, 将不能从失真的频谱中恢复出原来的信号。

另一方面, 在满足奈奎斯特采样定理的条件下, 时域抽样序列 $x(n)$ 的频谱 (DTFT) 主周期即为实际连续时间信号 $x(t)$ 谱结构, 用 N 点 DFT 处理 $x(n)$, 结果 $X(k)$ 等效于在频域对信号 $x(n)$ 的频谱主周期, 频率范围 $[0, f_s]$ 上的频谱函数进行 N 点等间隔采样。如果通过 IDFT 把 $X(k)$ 变换回时域序列时, 所得 $x'(n)$ 可看成是原序列 $x(n)$ 以 N 为周期的周期延拓序列的主值序列, 如图 3.7.1 所示。

显然, 如果原序列 $x(n)$ 是 L 点有限长, 只要 $N \geq L$, 就能保证由 DFT $X(k)$ 恢复原采样序列; 这个特点可以换个角度来应用: 如果我们希望处理信号的物理频率分辨率为 Δf , 则最短的时域记录长度 $T_L = \frac{1}{\Delta f}$ 。当采样频率 f_s 已知, 即时域采样间隔 $T = \frac{1}{f_s}$ 给定时, 应选择 DFT 的点数 $N \geq \frac{T_L}{T}$ 。

如果原序列 $x(n)$ 是无限长的, 则 DFT 近似处理, 无论取多大点数 N , IDFT 对应的有限长序列与原无限长序列相比, 总有时域混叠效应, 特别是以 N 为周期延拓的时域序列的主值序列两端时域混叠效应会更严重。

2. 避免混叠现象、保证处理要求的主要措施

对连续时间信号进行前置低通滤波, 限定信号的最高频率为 f_h 。在满足奈奎斯特采样定理时, 如果期望的物理频率分辨率参数 Δf 给定, 对抽样序列 $x(n)$ 截取样点数 N 必须满足:

$$N = \frac{T_L}{T} \geq \frac{2f_h}{\Delta f} \quad (3.7.1)$$

其中, T 为采样时间间隔。 T 不变时, 可改变记录长度 T_L , 即增加截取的样点数 N 以满足式 (3.7.1) 的不等号。

如果取样点数 N 给定 (工程上一般对应着 DFT 的固定点数 N), 则式 (3.7.1) 涉及信号最高频率 f_h , 物理频率分辨率参数 Δf 的选取在考虑频率分辨率指标时是矛盾的。因为当 f_h 变大时, 奈奎斯特采样定理要求采样时间间隔 T 减小; 式 (3.7.1) 等号表明信号总时长 T_L 必须相应减小, 以保证 N 不变; 而物理频率分辨率数值 $\Delta f = \frac{1}{T_L}$ 将变大, 使分辨率指标变差。

例 3.7.1 对实信号进行谱分析, 要求谱分辨率 $\Delta f \leq 10\text{Hz}$, 信号最高频率 $f_c = 2.5\text{kHz}$, 试确定最小记录时间 $T_{L\min}$, 最大的采样时间间隔 $T_{\max}$, 最少的采样点数 $N_{\min}$ 。如果 f_c 不变, 要求谱分辨率提高一倍, 最少的采样点 N 和最小的记录时间又是多少?

解: 已知谱分辨率 $\Delta f_{\max} = 10\text{Hz}$, 由式 (3.5.1) 知 $T_L \geq \frac{1}{\Delta f}$ 。因此最小记录时间:

$$T_{\text{Lmin}} = \frac{1}{10\text{Hz}} = 0.1\text{s}$$

因为信号最高频率 $f_c = 2.5\text{kHz}$, 奈奎斯特采样定理要求采样频率 $f_s \geq 2f_c$, 所以最大的采样时间间隔:

$$T_{\text{max}} = \frac{1}{2f_c} = \frac{1}{2 \times 2.5\text{kHz}} = 0.2\text{ms}$$

对应地, 最少的采样点数:

$$N_{\text{min}} = \frac{T_{\text{Lmin}}}{T_{\text{max}}} = \frac{0.1\text{s}}{0.2\text{ms}} = 500(\text{点})$$

第 4 章中将介绍 DFT 的点数为 2 的整数次幂时, 有快速实现, 可取 $N_{\text{min}} = 512$ 点。

如果信号最高频率 f_c 不变, 即最大的采样时间间隔 $T_{\text{max}} = 0.2\text{ms}$ 不变; 要求谱分辨率提高一倍, 即谱分辨率数值减小为 $\Delta f_{\text{max}} = 5\text{Hz}$, 则最小的记录时间和最少的采样点 N 分别是:

$$T_{\text{Lmin}} = \frac{1}{5\text{Hz}} = 0.2\text{s}$$

$$N_{\text{min}} = \frac{T_{\text{Lmin}}}{T_{\text{max}}} = \frac{0.2\text{s}}{0.2\text{ms}} = 1000 \text{ 点}$$

工程上 DFT 的点数为 2 的整数次幂时, 能够快速实现, 可取 $N_{\text{min}} = 1024$ 点。

3.7.2 栅栏效应

1. 栅栏效应产生的机理

如图 3.7.1 所示, 非周期信号 $x_a(t)$ 的频谱幅度函数 $|X_a(jf)|$ 是连续的。把 $x_a(t)$ 的 N 点采样 $x(n)$ 进行 DFT 得到的频谱幅度序列 $|X_a(k)|$ 只能是连续频谱 $X_a(jf)$ 的幅度函数的有限离散频点采样。

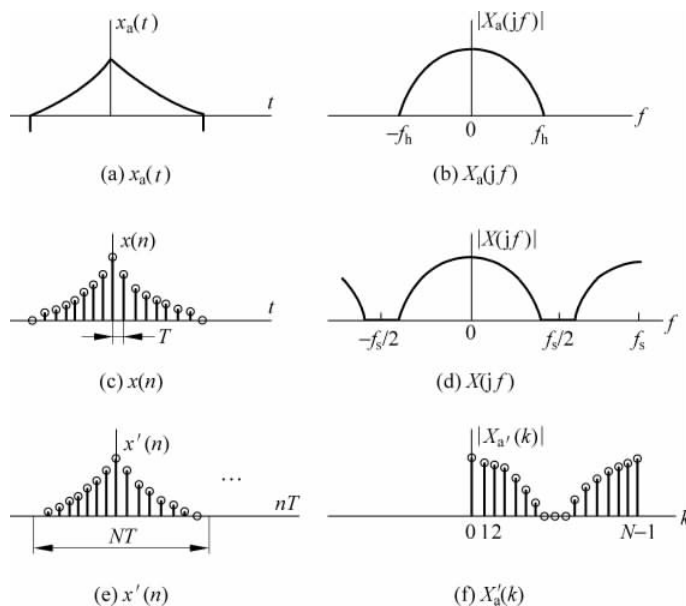


图 3.7.1 频域抽样 $X(k)$ 的 IDFT, 对应于时域序列 $x(n)$ 以 N 为周期延拓的主值序列

2. 栅栏效应

N 点 DFT 结果好像是在栅栏的一边,通过 N 个有限离散频点的“缝隙”观察另一边的频谱 $X_a(jf)$ 。故这种现象被形象地称为“栅栏效应”,只有离散频点的“缝隙”处才看得见。两根谱线(“缝隙”)之间如有重要的频谱分量,将被错过而检测不出。

3. 克服的措施

为了把被“栅栏”挡住的频谱分量检测出来,可在原记录序列后面补零,增加 DFT 的长度,即增加频域 $X_a(jf)$ 上的采样点数 N ,改变离散谱线(“栅栏上缝隙”)的分布,就可能检测出原来看不到的频谱分量。

但这样不能提高物理频率分辨率,即原先不能分开的频率分量,仅后补零仍然不能分开,例如图 3.5.4 中,三个频谱分量混叠成的平坦的频谱带,没有因为增加了 DFT 的点数 N 而分开成三个。但在图 3.5.5 中,序列长 $L=20$ 点的情况,物理频率分辨率能保证分开主要频率分量,增加频域采样点为 $N=64$ 时,才会比 $N=32$ 看到的离散频谱 $X(k)$ 更接近图 3.5.3(b)所示的实际情况。

3.7.3 频率泄漏

1. 频率泄漏现象

频率泄漏现象指连续时间信号 $x(t)$ 经系统处理后,所得的频谱在原来没有频谱的频率区间出现了频谱。

2. 频率泄漏产生机理

实际处理信号序列 $x(n)$ 时,根据需要常要对其截短。最简单的截短就是将该序列限定为有限的 N 点,令该序列 N 点以外的序列值为零,等效于长的数据序列乘以长为 N 时间窗函数 $w(n)$,如矩形窗 $R_N(n)$ 。

例 3.7.2 设矩形窗 $R_N(n)=1, n=0,1,\dots,N-1$ 。取 $N=11$,画出其时域和频谱图。

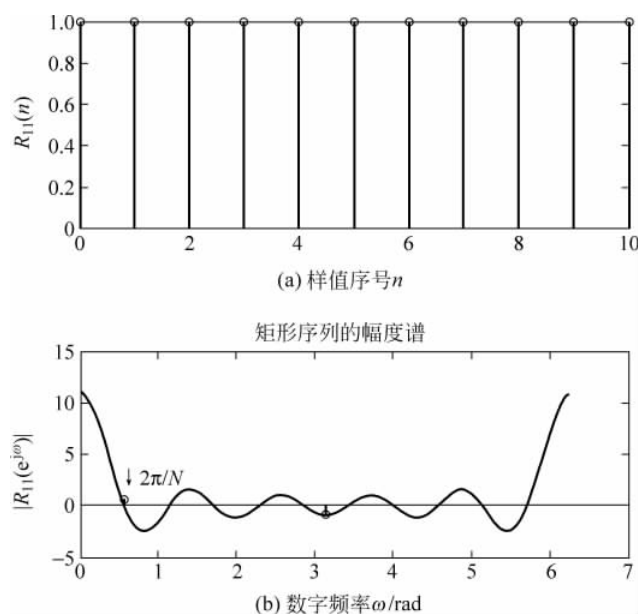
解: 矩形窗的频谱为:

$$R_N(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[R_N(n)] = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{j\varphi(\omega)}$$

$N=11$ 时,其时域波形和幅度频谱如图 3.7.2 所示。图 3.7.2(b)中, $|\omega| < 2\pi/N$ 的部分称为窗谱主瓣,其余部分称为窗谱旁瓣。

根据频域卷积定理,时域中 $x(n)$ 与 $w(n)$ 相乘,则频域中 $X(e^{j\omega})$ 与 $w(n)$ 的谱函数 $W(e^{j\omega})$ 进行卷积,频域卷积结果分布在更宽的频率范围上。这表明 $x(n)$ 截短后的频谱不同于它原未截短的频谱。产生了原信号中没有的频率分量,从频谱上看,截短序列的谱扩散到原来没有频谱的频率区间——这就称为“频率泄漏”。

这种频率泄漏,有时还会产生不同频率分量间干扰,即频率“混叠现象”。

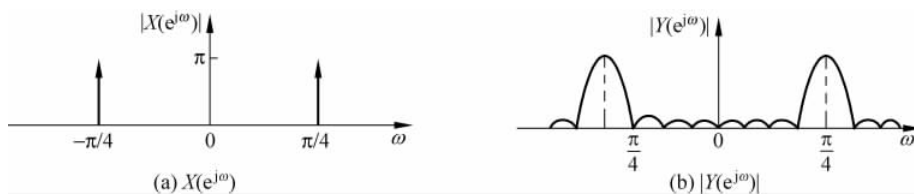
图 3.7.2 矩形窗 $R_{11}(n)$ 的时域、频域波形

例 3.7.3 序列 $x(n) = \cos(\omega_0 n)$, $\omega_0 = \pi/4$ 。其频谱为线谱 $X(e^{j\omega})$:

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4} - 2\pi k\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{4} - 2\pi k\right) \right]$$

$x(n)$ 的幅度谱主值波形如图 3.7.3(a) 所示。

将 $x(n)$ 用 $R_N(n)$ 截短后, 得 $y(n) = x(n)R_N(n)$, 其幅度谱主值波形如图 3.7.3(b) 所示, 显然原来仅在 $\pi/4$ 处的频谱“泄漏”到了整个 $[0, 2\pi]$ 的频率范围。例 3.7.3 截短余弦序列 $y(n)$ 的谱可以形象地认为是矩形序列的窗谱主瓣、旁瓣引起的。

图 3.7.3 $\cos(n\pi/4)$ 加矩形窗前后的频谱

3. 克服频率泄漏的措施

频率泄漏现象是由对时域序列 $x(n)$ 加窗造成的, 如图 3.7.2 给出矩形窗的时域与频域波形。由图 3.7.2 可见, 加大时域窗口宽度 N , 频域窗谱主瓣和窗谱旁瓣将变窄, 可使频率泄漏减少。但无限增加时域窗口宽度, 等于对原序列不截短, 不满足截短要求。因此, 为尽量减少频率泄漏, 应选用窗谱旁瓣小、主瓣窄, 即频率“泄漏”小的窗函数。这个问题将在第

7 章有限长脉冲响应滤波器设计中详细讨论。

3.8 MATLAB 实现

本节给出的 MATLAB 实现参考程序,均在 MATLAB 7.4.0 环境下调试通过。

3.8.1 离散傅里叶变换的 MATLAB 实现

例 3.2.1 的参考 MATLAB 实现如下:

```
% the effect of zero padding to the DFT (II, padding in front)
x = [1 1 1 1 0 0 0 0]; y = [0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0];
D = 3; % number of zeros padding in front
n1 = 16; f1 = fft(x, n1); f2 = fft(y, n1);
delta = -2 * pi * D * [0:n1-1] ./ n1;
subplot(2,2,1); stem(x); axis([0 16 0 max(x)]); text(8,0.8, 'series of x(n)');
ylabel('x(n)'); xlabel('n');
subplot(2,2,2); stem([0:n1-1] ./ n1, abs(f1)); axis([0 1 0 max(abs(f1))]);
text(.2,3.7, 'N=16 DFT of x(n)'); ylabel('|X(k)|'); xlabel('unit in 2 * pi');
subplot(2,2,3); stem(y); axis([0 16 0 max(y)]); text(8,0.8, 'series of xD(n)');
ylabel('xD(n)'); xlabel('n');
subplot(2,2,4); stem([0:n1-1] ./ n1, abs(f2)); axis([0 1 0 max(abs(f2))]);
text(.2,3.7, 'N=16 DFT of xD(n)'); ylabel('|XD(k)|'); xlabel('unit in 2 * pi');
figure
subplot(3,1,1); line([0:n1-1] ./ n1, zeros(n1)); hold on
stem([0:n1-1] ./ n1, angle(f1)); ylabel('Phase X(k) in rad');
subplot(3,1,2); line([0:n1-1] ./ n1, zeros(n1)); hold on
stem([0:n1-1] ./ n1, angle(f2)); ylabel('Phase XD(k) in rad');
subplot(3,1,3); line([0:n1-1] ./ n1, zeros(n1)); hold on; stem([0:n1-1] ./ n1, delta);
ylabel('shifted Phase in rad'); xlabel('unit in 2 * pi'); gtext('shifted Phase in XD(k) with X(k)')
```

例 3.2.2 的参考 MATLAB 实现如下:

```
% the effect of zero padding to the DFT
x = [1 1 1 1 0 0 0 0]; n1 = 8; n2 = 16; n3 = 11;
f1 = fft(x, n1); f2 = fft(x, n2); f3 = fft(x, n3);
stem(x); axis([0 16 0 max(x)]); text(10,0.8, 'series of x(n)'); ylabel('x(n)'); xlabel('n');
figure;
subplot(1,3,1); stem([0:n1-1] ./ n1, abs(f1)); axis([0 1 0 max(abs(f1))]);
text(.2,3.7, 'N=8 DFT of x(n)'); ylabel('|X(k)|'); xlabel('unit in 2 * pi');
subplot(1,3,2); stem([0:n2-1] ./ n2, abs(f2)); axis([0 1 0 max(abs(f2))]);
text(.2,3.7, 'N=16 DFT of x(n)');
subplot(1,3,3); stem([0:n3-1] ./ n3, abs(f3)); axis([0 1 0 max(abs(f3))]);
text(.2,3.7, 'N=11 DFT of x(n)');
```

```
figure;
subplot(3,1,1); stem([0:n1-1]./n1,abs(f1)); axis([0 1 0 max(abs(f1))]);
text(.4,3.2,'N=8 DFT of x(n)'); ylabel('|X(k)|');
subplot(3,1,2); stem([0:n2-1]./n2,abs(f2)); axis([0 1 0 max(abs(f2))]);
text(.4,3.2,'N=16 DFT of x(n)');
subplot(3,1,3); stem([0:n3-1]./n3,abs(f3)); axis([0 1 0 max(abs(f3))]);
text(.4,3.2,'N=11 DFT of x(n)'); xlabel('unit in 2 * pi');
```

3.8.2 用离散傅里叶变换计算线性卷积和圆周卷积的 MATLAB 实现

例 3.3.2 的参考 MATLAB 实现如下:

```
% comparison of convolution and circular convolution
x1 = [1,2,2,1]; x2 = [1, -1, 1, -1]; x3 = conv(x1,x2); x4 = circonvf(x1,x2,7);
n = 6; x5 = circonvf(x1,x2,n);
subplot(2,1,1); stem([0:length(x1)-1],x1);hold on; plot([0,max(n,7)],[0 0], 'k');hold off
text(4,0.5 * max(x1), 'x1(n)'); xlabel('n');ylabel('x1');
subplot(2,1,2); stem([0:length(x2)-1],x2);hold on; plot([0,max(n,7)],[0 0], 'k');hold off
text(4,0.5 * max(x2), 'x2(n)'); xlabel('n');ylabel('x2');
figure
subplot(3,1,1); stem([0:length(x3)-1],x3);hold on; plot([0,max(n,7)],[0 0], 'k');hold off
text(4,0.5 * max(x3), 'Linear Convolution'); xlabel('n');ylabel('x3')
subplot(3,1,2); stem([0:length(x4)-1],x4);hold on; plot([0,max(n,7)],[0 0], 'k');hold off
text(4,0.5 * max(x4), '7 - Point Circular Convolution'); xlabel('n');ylabel('x4')
subplot(3,1,3); stem([0:length(x5)-1],x5);hold on; plot([0,max(n,7)],[0 0], 'k');hold off
string = [num2str(n), '- Point Circular Convolution'];
text(4,0.5 * max(x5),string); xlabel('n');ylabel('x5')
```

3.8.3 连续时间信号谱分析的 MATLAB 实现

例 3.5.1 的参考 MATLAB 实现如下:

```
% frequency resolution, frequency interferences
clear all;
freq1 = 2;freq2 = 2.5;freq3 = 3.; fs = 10; % frequency unit in kHz;
omega1 = 2 * pi * freq1; omega2 = 2 * pi * freq2; omega3 = 2 * pi * freq3;
N = 1024; % number of DFT used for simulate DFTF
L1 = 10;L2 = 20; % the number of sample poits
N1 = 32; N2 = 64; % the numbers of DFT
dt = 1./fs; % x(n) time interval, unit is in ms
ddt = dt./100; % time interval decrease to a hundredth, unit is in ms
f = [freq1 freq2 freq3]; z = [0 0 0];zz = [1 1 1];
t1 = 0:ddt:(L1-1) * dt; tt1 = 0:ddt:(L2-1) * dt;
```

```

xt1 = cos(omega1 * t1) + cos(omega2 * t1) + cos(omega3 * t1); % short analog signal
xt2 = cos(omega1 * tt1) + cos(omega2 * tt1) + cos(omega3 * tt1); % longer analog signal

k1 = 0:dt:(L1 - 1) * dt; kk1 = 0:dt:(L2 - 1) * dt;
x1 = cos(omega1 * k1) + cos(omega2 * k1) + cos(omega3 * k1); % short sample sequence
x2 = cos(omega1 * kk1) + cos(omega2 * kk1) + cos(omega3 * kk1); % longer sample sequence
ydtft1 = fft(x1,N); ydtft2 = fft(x2,N); fdtft = fs * linspace(0,1,N);

y1 = fft(x1,N1); i1 = 0:N1 - 1; y12 = fft(x1,N2); i2 = 0:N2 - 1;
y2 = fft(x2,N1); y22 = fft(x2,N2);

subplot(2,1,1); % time domain signals and its sequences
plot(10 * t1,xt1,'--');hold on; stem(0:L1 - 1,x1,'b');hold off
title('sampled signal to x1(t)'); ylabel('x1(n)'); axis([0 L2 min(x1) max(x1)]);
subplot(2,1,2)
plot(10 * tt1,xt2,'--');hold on; stem(0:L2 - 1,x2,'b');hold off
title('sampled signal to x2(t)'); xlabel('n');ylabel('x2(n)'); axis([0 L2 min(x2) max(x2)]);

figure % frequency domain,DFTs to L = 10,20 sequences
subplot(2,1,1); plot(fdtft,abs(ydtft1));hold on;
stem(f, zz * max(abs(ydtft1)), '--xr');hold off; ylabel('DFTF Spectrum |X_1(e^{j\omega})|');
axis([min(fdtft) max(fdtft) min(abs(ydtft1)) max(abs(ydtft1))]);
title('DFTF to signal x_1(n), L = 10');
subplot(2,1,2); plot(fdtft,abs(ydtft2));hold on;
stem(f, zz * max(abs(ydtft2)), '--xr');hold off; ylabel('DFTF Spectrum |X_2(e^{j\omega})|');
axis([min(fdtft) max(fdtft) min(abs(ydtft2)) max(abs(ydtft2))]);
title('DFTF to signal x_2(n), L = 20'); xlabel('frequency f(kHz)')

figure % DFTs to L = 10 sequence
subplot(2,1,1); stem(i1,abs(y1));hold on; stem(f * N1/fs,z, 'xr');hold off
ylabel('Magnitude Spectrum |X(k)|'); axis([0 max(i1) min(abs(y1)) max(abs(y1))]);
title('signal x1, L = 10,N = 32')
subplot(2,1,2)
stem(i2,abs(y12));hold on; stem(f * N2/fs,z, 'xr');hold off; xlabel('k');
ylabel('Magnitude Spectrum |X(k)|'); axis([0 max(i2) min(abs(y12)) max(abs(y12))]);
title('signal x1 , L = 10, N = 64')

figure
subplot(2,1,1); stem(i1,abs(y2));hold on;stem(f * N1/fs,z, 'xr');hold off
ylabel('Magnitude Spectrum |X(k)|');axis([0 max(i1) min(abs(y2)) max(abs(y2))]);
title('signal x2, L = 20,N = 32')
subplot(2,1,2);
stem(i2,abs(y22));hold on; stem(f * N2/fs,z, 'xr');hold off; xlabel('k')
ylabel('Magnitude Spectrum |X(k)|');
axis([0 max(i2) min(abs(y22)) max(abs(y22))]); title('signal x2, L = 20,N = 64')

```

3.9 习题

3.1 计算下列信号的傅里叶变换在 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点均匀采样值。

(1) $a \cos(\omega_0 n) R_N(n)$;

(2) $a^n R_N(n)$;

(3) $n^2 R_N(n)$;

(4) $a^{|n|} \sin\left(\frac{2\pi}{N} k_0 n\right) u(n), \quad |a| < 1$;

(5) $\left(\frac{1}{2}\right)^n (u(n+3) - u(n-2))$;

(6) $n(u(n+N) - u(n-N-1))$;

(7) $\cos\left(\frac{18\pi n}{7}\right) + \sin(2n)$;

(8) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \delta(n-3k)$;

(9) $x(n) = \begin{cases} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right), & -1 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$ 。

3.2 根据下列离散时间信号傅里叶变换的 N 点离散采样值, 确定各相应的离散时间域信号。

(1) $X(k) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \left|\frac{2\pi}{N}k\right| < \omega \\ 1, & \omega \leq \left|\frac{2\pi}{N}k\right| \leq \pi \end{cases}$;

(2) $X(k) = 1 - 2e^{-j\frac{3}{N}k} + 4e^{j\frac{2}{N}k} + 3e^{-j\frac{6}{N}k}$;

(3) $X(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \delta\left(\frac{2\pi}{N}k - \frac{\pi}{2}m\right)$;

(4) $X(k) = \cos^2\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$;

(5) $X(k) = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \quad -\pi \leq \frac{2\pi}{N}k \leq \pi$;

(6) $X(k) = \frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\frac{2\pi}{N}k} - \frac{1}{6}e^{-j\frac{4\pi}{N}k}}$ 。

3.3 已知下列 N 点 DFT $X(k)$, 求 $x(n) = \text{IDFT}[X(k)]$ 。

(1) $X(k) = \begin{cases} \frac{N}{2} e^{j\theta}, & k=m \\ \frac{N}{2} e^{-j\theta}, & k=N-m \\ 0, & \text{其他 } k \end{cases}$

$$(2) X(k) = \begin{cases} -j \frac{N}{2} e^{j\theta}, & k=m \\ j \frac{N}{2} e^{-j\theta}, & k=N-m \\ 0, & \text{其他 } k \end{cases}$$

其中, m 为正整数, $0 < m < \frac{N}{2}$, N 为变换区间长度。

3.4 序列 $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$:

(1) 求 $x(n)$ 的 4 点 DFT;

(2) 若 $y(n)$ 是 $x(n)$ 与它本身的 4 点循环卷积, 求 $y(n)$ 及其 4 点 DFT $Y(k)$;

(3) 若 $h(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + 2\delta(n-3)$, 求 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的 4 点循环卷积。

3.5 设 $X(k)$ 表示 N 点序列 $x(n)$ 的 N 点离散傅里叶变换, $X(k)$ 本身也是 N 点序列。

如果计算 $X(k)$ 的离散傅里叶变换得到一序列 $x_1(n)$, 试用 $x(n)$ 表示 $x_1(n)$ 。

3.6 设有两个序列:

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

$$y(n) = \begin{cases} y(n), & 0 \leq n \leq 14 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

各作 15 点的 DFT, 然后将两个 DFT 相乘, 再求乘积的 IDFT, 设所得的结果为 $f(n)$, 问 $f(n)$ 的哪些点(用序号 n 表示)对应于 $x(n) * y(n)$ 应该得到的点。

3.7 已知两个有限长序列为:

$$x(n) = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 6 \end{cases}$$

$$y(n) = \begin{cases} -1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 1, & 5 \leq n \leq 6 \end{cases}$$

试用作图表示 $x(n)$, $y(n)$ 以及 $x(n) \otimes y(n)$ 。

3.8 已知 $x(n)$ 是 N 点有限长序列, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 现将 $x(n)$ 的每两点之间补进 $r-1$ 个零点值, 得到一个 rN 点的有限长序列 $y(n)$:

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{r}\right), & n = ir, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

试求 rN 点的 $\text{DFT}[y(n)] = Y(k)$ 与 $X(k)$ 的关系。

3.9 设有一谱分析用的信号处理器, 抽样点数必须为 2 的整数幂, 假定没有采用任何特殊数据处理措施, 要求频率分辨率小于或等于 10 Hz, 如果采用的抽样时间间隔为 0.1 ms, 试确定:

- (1) 最小记录长度;
- (2) 所允许处理的信号的最高频率;
- (3) 在一个记录中的最少点数。

3.10 给定长为 N 的圆周共轭对称序列 $x_{\text{ep}}(n)$, 圆周共轭反对称序列 $x_{\text{op}}(n)$, $0 \leq n \leq N-1$ 。试证明: 当 N 为偶数时, $x_{\text{ep}}\left(\frac{N}{2}\right)$ 为实数; $x_{\text{op}}\left(\frac{N}{2}\right)$ 为纯虚数。

3.11 序列 $x(n)$ 的共轭对称和共轭反对称分量分别为:

$$x_{\text{e}}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)], \quad x_{\text{o}}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

长度为 N 的有限序列 $x(n)$ ($0 \leq n \leq N-1$) 的圆周共轭对称和圆周共轭反对称分量分别定义如下:

$$x_{\text{ep}}(n) = \frac{1}{2}[x((n))_N + x^*((-n))_N]R_N(n)$$

$$x_{\text{op}}(n) = \frac{1}{2}[x((n))_N - x^*((-n))_N]R_N(n)$$

(1) 证明:

$$x_{\text{ep}}(n) = [x_{\text{e}}(n) + x_{\text{e}}(n-N)]R_N(n)$$

$$x_{\text{op}}(n) = [x_{\text{o}}(n) + x_{\text{o}}(n-N)]R_N(n)$$

(2) 把 $x(n)$ 看作是长度为 N 的序列, 一般来说, 不能从 $x_{\text{ep}}(n)$ 恢复 $x_{\text{e}}(n)$, 也不能从 $x_{\text{op}}(n)$ 恢复 $x_{\text{o}}(n)$ 。试证明若把 $x(n)$ 看作是长度为 N 的序列, 且 $n \geq \frac{N}{2}$ 时, $x(n) = 0$, 则从 $x_{\text{ep}}(n)$ 可恢复 $x_{\text{e}}(n)$, 从 $x_{\text{op}}(n)$ 可恢复 $x_{\text{o}}(n)$ 。

3.12 设 $X(k)$ 表示 N 点序列 $x(n)$ 的 N 点离散傅里叶变换:

(1) 证明如果当 $x(n)$ 满足关系式 $x(n) = -x(N-1-n)$, 则 $X(0) = 0$;

(2) 证明当 N 为偶数时, 如果 $x(n) = x(N-1-n)$, 则 $X\left(\frac{N}{2}\right) = 0$ 。

3.13 证明 DFT 对称定理, 即假设:

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)]$$

证明 $\text{DFT}[X(n)] = Nx(n-k)$ 。

3.14 如果 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 证明 DFT 的初值定理:

$$x(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

3.15 证明离散相关定理。

若

$$X(k) = X_1^*(k)X_2(k)$$

则

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \sum_{l=0}^{N-1} x_1^*(l)x_2((l+n))_N R_N(n)$$

3.16 已知序列 $x(n) = a^n u(n)$, $0 < a < 1$, 对 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 在 z 平面单位圆上等间隔采样 N 点, 采样值为:

$$X(k) = X(z) \big|_{z=e^{\frac{2\pi}{N}k}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

求有限长序列 $x_N(n) = \text{IDFT}(X(k))$ 。

3.17 已知调幅信号的载波频率 $f_c = 1\text{kHz}$, 调幅信号的频率 $f_m = 100\text{Hz}$, 用 FFT 对其进行谱分析, 试问:

- (1) 最小记录时间 T_{pmin} 。
- (2) 最低取样频率 f_{stmin} 。
- (3) 最少采样点数 N_{min} 。
- (4) 在频带宽度不变的情况下,将频率分辨率提高一倍的采样点数 N 值。

3.18 以 20kHz 的采样率对最高频率为 10kHz 的带限信号 $x_a(t)$ 采样,然后计算 $x(n)$ 的 $N=1000$ 个采样点的 DFT,即

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad N = 1000$$

- (1) $k=150$ 对应的模拟频率是多少? $k=800$ 呢?
- (2) 采样频率点之间的间隔是多少?(提示:结果请注明单位)