第5章 树和二叉树

CHAPTER 5

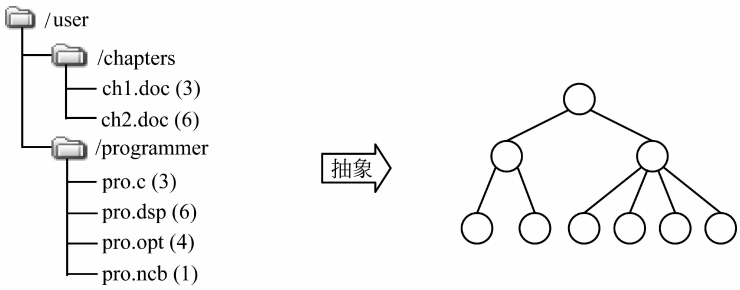
本章概述	前面讨论的数据结构都属于线性结构，线性结构主要描述具有单一的前驱和后继关系的数据。树结构是一种比线性结构更复杂的数据结构，适合描述具有层次关系的数据，如祖先-后代、上级-下属、整体-部分以及其他类似的关系。树结构在计算机领域有着广泛的应用，例如在编译程序中用语法树来表示源程序的语法结构、在数据挖掘中用决策树来进行数据分类等。 本章内容分为树和二叉树两部分，由实际问题引出树结构，介绍树的定义和基本术语，给出树的抽象数据类型定义，讨论树的存储结构；给出二叉树的定义和基本性质，讨论二叉树的存储结构，实现二叉链表存储的二叉树的遍历操作，最后讨论二叉树的经典应用——哈夫曼树。
教学重点	二叉树的性质；二叉树和树的存储表示；二叉树的遍历及算法实现；树与二叉树的转换关系；哈夫曼树
教学难点	二叉树的层序遍历算法；二叉树的建立算法；哈夫曼算法

教学内容和教学目标	知识点	教学要求			
		了解	理解	掌握	熟练掌握
	树的定义和基本术语			√	
	树和二叉树的抽象数据类型定义		√		
	树和二叉树的遍历				√
	树的存储结构			√	
	二叉树的定义				√
	二叉树的基本性质				√
	二叉树的顺序存储结构		√		
	二叉链表				√
	三叉链表	√			
	二叉树遍历的递归算法				√
	二叉树遍历的非递归算法		√		
	二叉树的层序遍历算法			√	
	二叉树的建立算法			√	
	树、森林和二叉树之间的转换			√	
	哈夫曼树及哈夫曼编码			√	

5.1 引　　言

树结构是一种比线性结构更复杂的数据结构，比较适合描述具有层次关系的数据，如祖先-后代、上级-下属、整体-部分以及其他类似的关系。很多实际问题抽象出的数据模型是树结构，请看下面两个例子。

【例 5-1】 文件系统问题。Windows 操作系统的文件目录结构如图 5-1(a)所示，其中“/”表示文件夹，括号内的数字表示文件的大小(单位 KB)。假设文件夹本身的大小是 1KB，统计每个文件和文件夹的大小。



(a) 文件系统目录示例　　(b) 树结构模型

图 5-1　文件系统目录及其数据模型

【想法——数据模型】 文件目录结构具有层次特点，每个文件夹均可包含多个子文件夹和文件。将每个文件或文件夹抽象为一个结点，文件夹与文件之间的关系抽象为结点之间的边，从而将文件目录结构抽象为一个树结构，如图 5-1(b)所示。可以对树进行某种遍历，即对树中所有结点进行没有重复、没有遗漏的访问，在遍历过程中统计每个文件和文件夹的大小。那么，应该如何存储文件目录结构并在遍历过程中统计大小呢？

【例 5-2】 二叉表示树。编译系统在处理算术表达式时，通常将表达式转换为一棵二叉表示树，通过二叉表示树可以判断算术表达式是否存在语法错误，并将算术表达式转换为后缀形式，也称**逆波兰式**。请将给定的算术表达式转换为二叉表示树。

【想法——数据模型】 二叉表示树是对应一个算术表达式的二叉树，并具有以下特点：①叶子结点一定是操作数；②分支结点一定是运算符。将一个算术表达式转换为二叉表示树时基于如下规则：

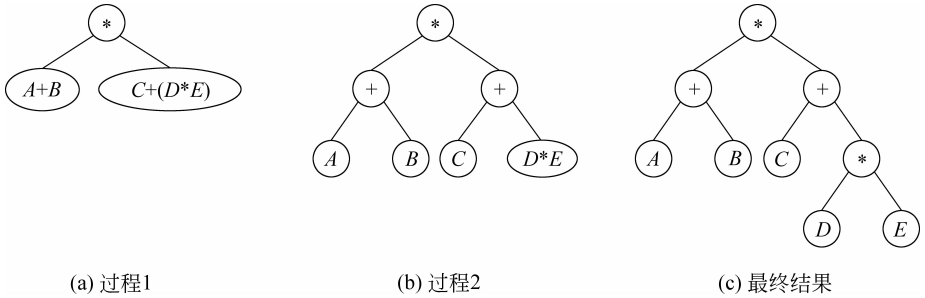
(1) 根据运算符的优先顺序，将表达式结合成(左操作数 运算符 右操作数)的形式。

(2) 由外层括号开始，运算符作为二叉表示树的根结点，左操作数作为根结点的左子树，右操作数作为根结点的右子树；

(3) 如果某子树对应的操作数为一个表达式，则重复第(2)步的转换，直到该子树对应的操作数不能再分解。

例如，将表达式$(A+B)*(C+D*E)$结合成$((A+B)*(C+(D*E)))$，则二叉表示树的根结点是运算符$*$，左操作数即左子树是$(A+B)$，右操作数即右子树是$(C+(D*E))$。对于左子树$(A+B)$，其根结点是运算符$+$，左子树是 A，右子树是 B。对于右子树

(C+(D * E))，其根结点是运算符+，左子树是 C，右子树是(D * E)。依此类推，构造过程如图 5-2 所示。



(a) 过程1　　(b) 过程2　　(c) 最终结果

图 5-2　二叉表示树的构造过程

5.2　树的逻辑结构

5.2.1　树的定义和基本术语

1. 树的定义

在树中通常将数据元素称为**结点**(node)。

树(tree)是 $n(n\geqslant 0)$个结点的有限集合[①]。当 $n=0$ 时，称为空树；任意一棵非空树满足以下条件：

(1) 有且仅有一个特定的称为**根**(root)的结点。

(2) 当 $n>1$ 时，除根结点之外的其余结点被分成 $m(m>0)$个**互不相交**的有限集合 T_1、T_2、…、T_m，其中每个集合又是一棵树[②]，并称为这个根结点的子树(subtree)。

图 5-3(a)是一棵具有 9 个结点的树：$T=\{A,B,C,D,E,F,G,H,I\}$，结点 A 为树 T 的根结点。除根结点 A 之外的其余结点分为两个不相交的集合：$T_1=\{B,D,E,F,I\}$和 $T_2=\{C,G,H\}$，T_1 和 T_2 构成了根结点 A 的两棵子树；子树 T_1 的根结点为 B，其余结点又分为三个不相交的集合：$T_{11}=\{D\}$，$T_{12}=\{E,I\}$和 $T_{13}=\{F\}$，T_{11}、T_{12}和 T_{13}构成了根结点 B 的三棵子树；依此类推，直到每棵子树只有一个根结点为止。

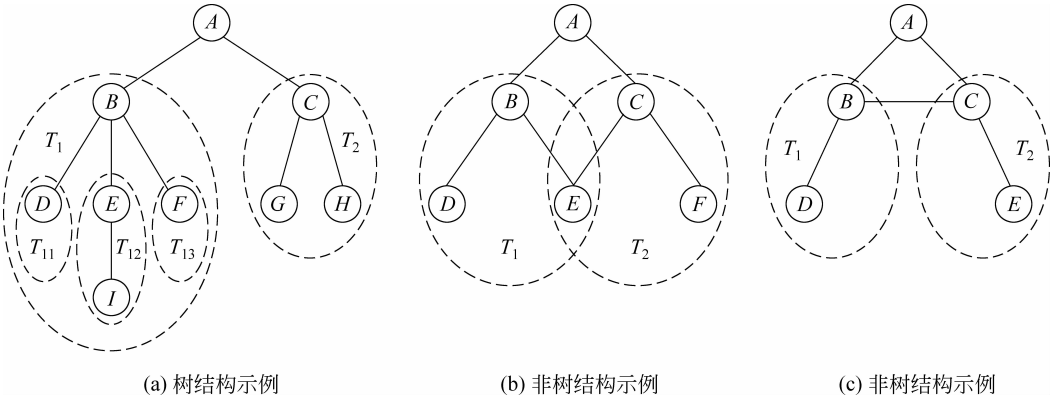
需要强调的是，树中根结点的子树之间是互不相交的。例如，图 5-3(b)由于根结点 A 的两个子树之间存在交集，结点 E 既属于集合 T_1 又属于集合 T_2，所以不是树；图 5-3(c)中根结点 A 的两个子树之间也存在交集，边(B,C)依附的两个结点属于根结点 A 的两个子集 T_1 和 T_2，所以也不是树。

2. 树的基本术语

(1) 结点的度、树的度。某结点所拥有的子树的个数称为该**结点的度**(degree)；树中

① 这里定义的树在数学上属于有根树(rooted tree)。从数学角度讲，树结构是图的特例，无回路的连通图就是树，称为自由树(free tree)。本章讨论的是有根有序树，所谓有序树是指根结点的子树从左到右是有顺序的。

② 显然，树的定义是递归的。由于树结构本身具有递归特性，因此对树的操作通常采用递归方法。



(a) 树结构示例　　(b) 非树结构示例　　(c) 非树结构示例

图 5-3　树结构和非树结构的示意图

各结点度的最大值称为**该树的度**。在如图 5-3(a)所示的树中，结点 A 的度为 2，结点 B 的度为 3，该树的度为 3。

(2) 叶子结点、分支结点。度为 0 的结点称为**叶子结点**(leaf node)，也称为终端结点；度不为 0 的结点称为**分支结点**(branch node)，也称为非终端结点。在如图 5-3(a)所示的树中，结点 D、I、F、G、H 是叶子结点，其余结点都是分支结点。

(3) 孩子结点、双亲结点、兄弟结点。某结点的子树的根结点称为该结点的**孩子结点**(children node)；反之，该结点称为其孩子结点的**双亲结点**(parent node)；具有同一个双亲的孩子结点互称为**兄弟结点**(brother node)。在如图 5-3(a)所示的树中，结点 B 是结点 A 的孩子，结点 A 是结点 B 的双亲，结点 B 和 C 互为兄弟，结点 I 没有兄弟。

(4) 路径、路径长度。如果树的结点序列 $n_1 n_2 \cdots n_k$ 满足如下关系：结点 n_i 是结点 n_{i+1} 的双亲($1 \leqslant i < k$)，则 $n_1 n_2 \cdots n_k$ 称为一条由 n_1 至 n_k 的**路径**(path)；路径上经过的边数称为**路径长度**(path length)。显然，在树中路径是唯一的。在如图 5-3(a)所示的树中，从结点 A 到结点 I 的路径是 $ABEI$，路径长度为 3。

(5) 祖先、子孙。如果从结点 x 到结点 y 有一条路径，那么 x 就称为 y 的**祖先**(ancestor)，y 称为 x 的**子孙**(descendant)。显然，以某结点为根的子树中的任一结点都是该结点的子孙。在如图 5-3(a)所示的树中，结点 A、B、E 均为结点 I 的祖先，结点 B 的子孙有 D、E、F、I。

(6) 结点的层数、树的深度(高度)、树的宽度。我们规定根结点的**层数**(level)为 1，对其余任何结点，若某结点在第 k 层，则其孩子结点在第 $k+1$ 层；树中所有结点的最大层数称为**树的深度**(depth)，也称为树的高度。树中每一层结点个数的最大值称为**树的宽度**(breadth)。在如图 5-3(a)所示的树中，结点 D 的层数为 3，树的深度为 4，树的宽度为 5。

5.2.2　树的抽象数据类型

树在不同的实际应用中，其基本操作也不尽相同。下面给出基本操作只包含树的遍历的抽象数据类型(ADT)定义。针对具体应用，可在其基础上重新定义基本操作。

```
ADT Tree
DataModel
    树由一个根结点和若干棵子树构成,树中结点具有层次关系
Operation
    initTree
        输入:无
        功能:初始化一棵树
        输出:一棵树
    preOrder
        输入:无
        功能:前序遍历树
        输出:树的前序遍历序列
    postOrder
        输入:无
        功能:后序遍历树
        输出:树的后序遍历序列
    leverOrder
        输入:无
        功能:层序遍历树
        输出:树的层序遍历序列
endADT
```

5.2.3　树的遍历操作定义

树的**遍历**(traverse)是指从根结点出发,按照某种次序访问树中所有结点,使得每个结点被访问一次且仅被访问一次。访问是一种抽象操作,在实际应用中可以对结点进行各种处理,如输出结点的信息、修改结点的某些数据等。对应到算法上,访问可以是一条简单语句,可以是一个复合语句,也可以是一个模块。为了不失一般性,在此将访问定义为输出结点的数据信息。树的遍历次序通常有前序(根)遍历和后序(根)遍历两种方式。此外,如果按树的层序依次访问各结点,则可得到另一种遍历次序:层序遍历。

树的前序遍历操作定义为:若树为空,则空操作返回;否则执行以下操作。

(1) 访问根结点。

(2) 按照从左到右的顺序前序遍历根结点的每一棵子树。

树的后序遍历操作定义为:若树为空,则空操作返回;否则执行以下操作。

(1) 按照从左到右的顺序后序遍历根结点的每一棵子树。

(2) 访问根结点。

树的层序遍历也称树的广度遍历,其操作定义为:从树的根结点开始,自上而下逐层遍历,在同一层中,按从左到右的顺序对结点逐个访问。

例如,图 5-3(a)所示树的前序遍历序列为:$A\ B\ D\ E\ I\ F\ C\ G\ H$,后序遍历序列为:$D\ I\ E\ F\ B\ G\ H\ C\ A$,层序遍历序列为:$A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ I$。

5.3 树的存储结构

在大量的实际应用中，人们使用多种存储方法来表示树。无论采用何种存储方法，都要求存储结构不仅能存储树中各结点的数据信息，还要表示结点之间的逻辑关系——父子关系。下面介绍几种基本的存储方法。

5.3.1 双亲表示法

每个结点都记述自己的双亲。由树的定义可知，除根结点外，树中每个结点都有且仅有一个双亲结点。根据这一特性，用一维数组来存储树的各个结点（一般按层序存储），数组元素包括结点的数据信息、该结点的双亲在数组中的下标。树的这种存储方法称为**双亲表示法**（parent express），数组元素的结点结构如图 5-4 所示。其中，data 存储树中结点的数据信息；parent 存储该结点的双亲在数组中的下标。数组元素的结点结构可定义为类 ParentNode，定义如下：

```
public class ParentNode<T>{
    private T data;              //定义结点泛型数据域
    private int parent;          //定义结点双亲下标
    public T getData() { return data; }
    public void setData(T element) { data=element; }
    public int getParent () { return next; }
    public void seParent (int parent) { this.parent=parent; }
}
```

例如，图 5-3(a)所示树的双亲表示法存储如图 5-5 所示，图中 parent 域的值为－1，表示该结点无双亲，即该结点是根结点。

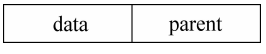


图 5-4 双亲表示法的结点结构

下标	data	parent
0	*A*	–1
1	*B*	0
2	*C*	0
3	*D*	1
4	*E*	1
5	*F*	1
6	*G*	2
7	*H*	2
8	*I*	4

图 5-5 双亲表示法的存储示意图

操作性能分析：查找任意结点的父结点，仅需要常数时间，时间性能为 $O(1)$。查找任意结点的孩子结点，需要遍历所有结点，时间性能为 $O(n)$。

5.3.2　孩子表示法

每个结点记述自己的所有孩子。树的**孩子表示法**(child express)是一种基于链表的存储方法,即把每个结点的孩子排列起来,看成一个线性表,且以单链表存储,称为该结点的孩子链表,所以 n 个结点共有 n 个孩子链表(叶子结点的孩子链表为空表)。n 个孩子链表共有 n 个头引用,这 n 个头引用又构成了一个线性表,为了便于进行查找操作,可采用顺序存储。最后,将存放 n 个头引用的数组和存放 n 个结点数据信息的数组结合起来,构成孩子链表的表头数组。在孩子表示法中存在两类结点:孩子结点和表头结点,其结点结构如图 5-6 所示。孩子结点由类 ChildNode 实现,头结点由类 TreeNode 实现,定义如下:

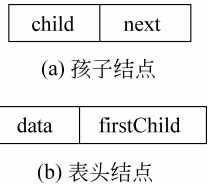


图 5-6　孩子表示法的结点结构

```
public class ChildNode {
    private int child;                  //结点对应头结点下标
    private ChildNode next;             //引用下一个孩子
    public int getChild() { return child;}
    public void setChild(int child) { this.child=child;}
    public ChildNode getNext() { return next;}
    public void setNext(ChildNode next) {this.next=next;}
}
public class TreeNode<T>{
    private T data;                     //定义结点泛型数据域
    private ChildNode firstChild;       //孩子链表头引用
    public T getData() { return data;}
    public void setData(T data) { this.data=data;}
    public ChildNode getFirstChild() { return firstChild;}
    public void setFirstChild(ChildNode firstChild) {
        this.firstChild=firstChild;}
}
```

例如,图 5-7 是图 5-3(a)所示树采用孩子表示法的存储示意图。孩子表示法不仅表示了孩子结点的信息,而且联在同一个孩子链表中的结点具有兄弟关系。

操作性能分析:查找任意结点的父结点,需要遍历边表结点,时间性能为 $O(n)$。查找任意结点的孩子结点,若该结点孩子个数为 m,则时间性能为 $O(m)$。

5.3.3　孩子兄弟表示法

每个结点记述自己的长子和右兄弟。树的**孩子兄弟表示法**(children brother express)又称为二叉链表表示法,其方法是链表中的每个结点除数据域外,设置两个引用

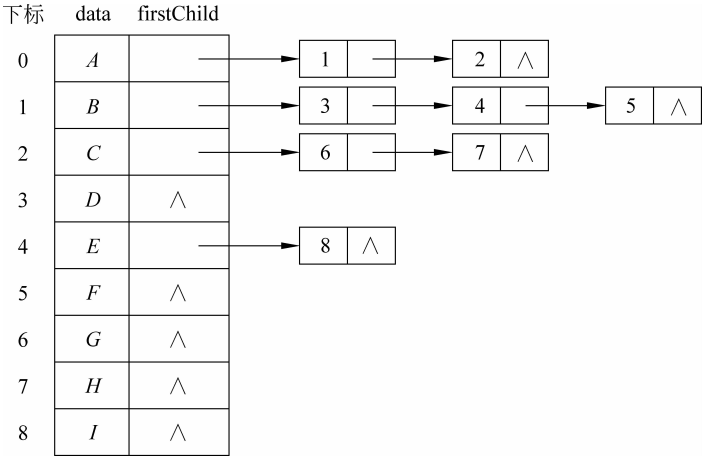


图 5-7　孩子表示法的存储示意图

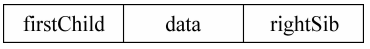


图 5-8　孩子兄弟表示法的结点结构

域分别引用该结点的第一个孩子和右兄弟，链表的结点结构如图 5-8 所示。其中，data 存储结点数据信息；firstChild 存储第一个孩子引用；rightSib 存储右兄弟引用。孩子兄弟结点由类 CSNode 实现，定义如下：

```
public class CSNode<T>{
    private T data;                    //定义结点泛型数据域
    private ChildNode firstChild;      //引用长子
    private ChildNode rightSib;        //引用右兄弟
    public T getData() { return data; }
    public void setData(T data) { this.data=data; }
    public ChildNode getFirstChild() { return firstChild;}
    public void setFirstChild(ChildNode firstChild) { this.firstChild=
    firstChild; }
    public ChildNode getRightSib() { return rightSib; }
    public void setRightSib(ChildNode rightSib) { this.rightSib=rightSib;}
}
```

例如，图 5-9 是图 5-3(a)所示树采用孩子兄弟表示法的存储示意图。

操作性能分析：此存储方式便于实现树的各种操作。例如，若要访问某结点 x 的第 i 个孩子，只需要从该结点的第一个孩子引用找到第 1 个孩子后，沿着孩子结点的右兄弟域连续走 $i-1$ 步，便可找到结点 x 的第 i 个孩子。

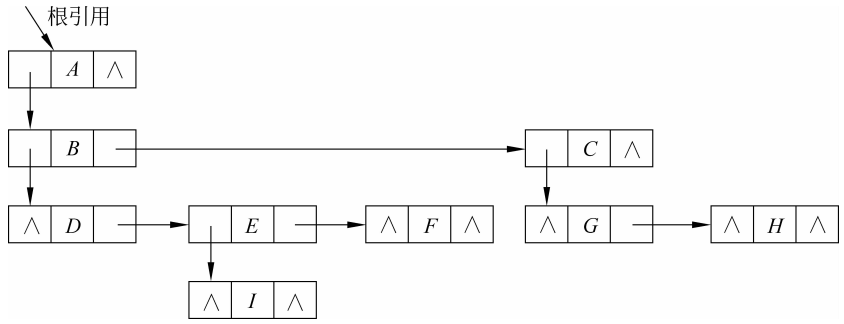


图 5-9　树的孩子兄弟表示法的存储示意图

5.4　二叉树的逻辑结构

树结构有很多变种，二叉树是一种最简单的树结构，而且任何树都可以简单地转换为对应的二叉树。所以，二叉树是本章的重点。

5.4.1　二叉树的定义

二叉树(binary tree)是 $n(n\geqslant 0)$ 个结点的有限集合，该集合或者为空集(称为空二叉树)，或者由一个根结点和两棵互不相交的、分别称为根结点的左子树(left subtree)和右子树(right subtree)的二叉树组成。二叉树如图 5-10 所示，其具有如下特点。

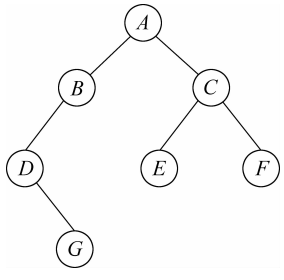


图 5-10　一棵二叉树

(1) 每个结点最多有两棵子树，即二叉树不存在度大于 2 的结点。

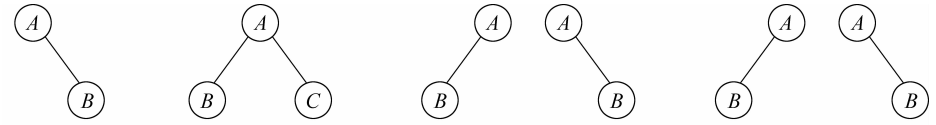
(2) 二叉树的左右子树不能任意颠倒，如果某结点只有一棵子树，则必须指明它是左子树还是右子树。

需要强调的是，二叉树和树是两种不同的树结构。首先，二叉树不是度为 2 的树。例如，图 5-11(a)所示是一棵二叉树，但这棵二叉树的度是 1；假设图 5-11(b)是一棵度为 2 的树，则结点 B 是结点 A 的第一个孩子，结点 C 是结点 A 的第二个孩子，并且可以为结点 A 再增加孩子。其次，树的孩子有序的关系，即第 1 个孩子，第 2 个孩子，…，第 i 个孩子，但二叉树的孩子却有左右之分，即使二叉树中某结点只有一个孩子，也要区分它是左孩子还是右孩子。例如，假设图 5-11(c)所示是二叉树，则它们是两棵不同的二叉树，假设图 5-11(d)所示是树，则它们是同一棵树。

在实际应用中，经常用到如下几种特殊的二叉树。

1. 斜树

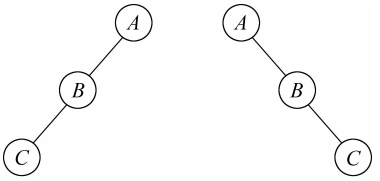
所有结点都只有左子树的二叉树称为**左斜树**(left oblique tree)；所有结点都只有右子树的二叉树称为**右斜树**(right oblique tree)；左斜树和右斜树统称为**斜树**(oblique



(a) 二叉树　(b) 度为2的树　(c) 两棵不同的二叉树　(d) 同一棵树

图 5-11　二叉树和树是两种树结构

tree)，如图 5-12 所示。斜树的特点是：①每一层只有一个结点；②斜树的结点个数与其深度相同。

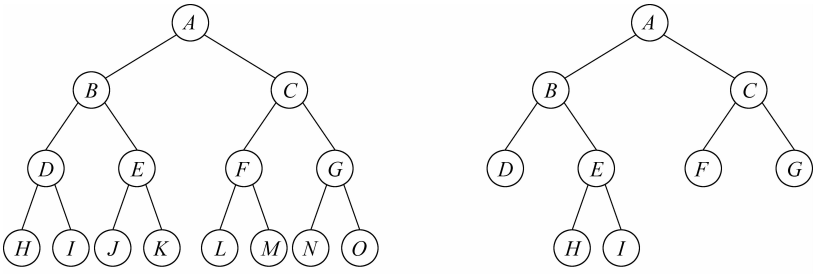


(a) 左斜树　(b) 右斜树

图 5-12　斜树示例

2. 满二叉树

在一棵二叉树中，如果所有分支结点都存在左子树和右子树，并且所有叶子都在同一层上，则这样的二叉树称为**满二叉树**(full binary tree)。图 5-13(a)是一棵满二叉树，图 5-13(b)不是满二叉树，因为虽然所有分支结点都存在左右子树，但叶子不在同一层上。满二叉树的特点是：①叶子只能出现在最下一层；②只有度为 0 和度为 2 的结点。



(a) 一棵满二叉树　(b) 一棵非满二叉树

图 5-13　满二叉树和非满二叉树示例

3. 完全二叉树

对一棵具有 n 个结点的二叉树按层序编号，如果编号为 $i(1\leqslant i\leqslant n)$的结点与同样深度的满二叉树中编号为 i 的结点在二叉树中的位置完全相同，则这棵二叉树称为完全二叉树(complete binary tree)。显然，一棵满二叉树必定是一棵完全二叉树。完全二叉树的特点是：① 深度为 k 的完全二叉树在 $k-1$ 层是满二叉树；② 叶子结点只能出现在最下两层，且最下层的叶子结点都集中在左侧连续的位置；③ 如果有度为 1 的结点，则只可能有一个，且该结点只有左孩子。图 5-14 给出了完全二叉树和非完全二叉树示例。

5.4.2　二叉树的基本性质

【性质 5-1】 在一棵二叉树中，如果叶子结点个数为 n_0，度为 2 的结点个数为 n_2，则 $n_0=n_2+1$。