

动量与角动量

第2章讲解了牛顿第二定律,主要是用加速度表示的式(2.3)的形式。该式表示了力和受力物体的加速度的关系,那是一个**瞬时关系**,即与力作用的同时物体所获得的加速度和此力的关系。实际上,力对物体的作用总要延续一段或长或短的时间。在很多问题中,在这段时间内,力的变化复杂,难以细究,而我们又往往只关心在这段时间内力的作用的总效果。这时我们将直接利用式(2.2)表示的牛顿第二定律形式,而把它改写为微分形式并称为动量定理。本章首先介绍动量定理,接着把这一定理应用于质点系,导出了一条重要的守恒定律——动量守恒定律。然后对于质点系,引入了**质心**的概念,并说明了外力和质心运动的关系。后面几节介绍了和动量概念相联系的描述物体转动特征的重要物理量——角动量,在牛顿第二定律的基础上导出了角动量变化率和外力矩的关系——角动量定理,并进一步导出了另一条重要的守恒定律——角动量守恒定律。最后还导出了用于质心参考系的角动量定理。

3.1 冲量与动量定理

把牛顿第二定律公式(2.2)写成微分形式,即

$$\mathbf{F}dt = d\mathbf{p} \quad (3.1)$$

式中乘积 $\mathbf{F}dt$ 叫做在 dt 时间内质点所受合外力的**冲量**。此式表明在 dt 时间内质点所受合外力的冲量等于在同一时间内质点的动量的增量。这一表示在一段时间内,外力作用的总效果的关系式叫做**动量定理**。

如果将式(3.1)对 t_0 到 t' 这段有限时间积分,则有

$$\int_{t_0}^{t'} \mathbf{F}dt = \int_{p_0}^{p'} d\mathbf{p} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}_0 \quad (3.2)$$

左侧积分表示在 t_0 到 t' 这段时间内合外力的冲量,以 $\mathbf{I}$ 表示此冲量,即

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^{t'} \mathbf{F}dt$$

则式(3.2)可写成

$$\mathbf{I} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}_0 \quad (3.3)$$

式(3.2)或式(3.3)是动量定理的积分形式,它表明质点在 t_0 到 t' 这段时间内所受的合

外力的冲量等于质点在同一时间内的动量的增量。值得注意的是,要产生同样的动量增量,力大力小都可以:力大,时间可短些;力小,时间需长些。只要外力的冲量一样,就产生同样的动量增量。

动量定理常用于碰撞过程,碰撞一般泛指物体间相互作用时间很短的过程。在这一过程中,相互作用力往往很大而且随时间改变。这种力通常叫**冲力**。例如,球拍反击乒乓球的力,两汽车相撞时的相互撞击的力都是冲力。图 3.1 是清华大学汽车碰撞实验室做汽车撞击固定壁的实验照片与相应的冲力的大小随时间的变化曲线。

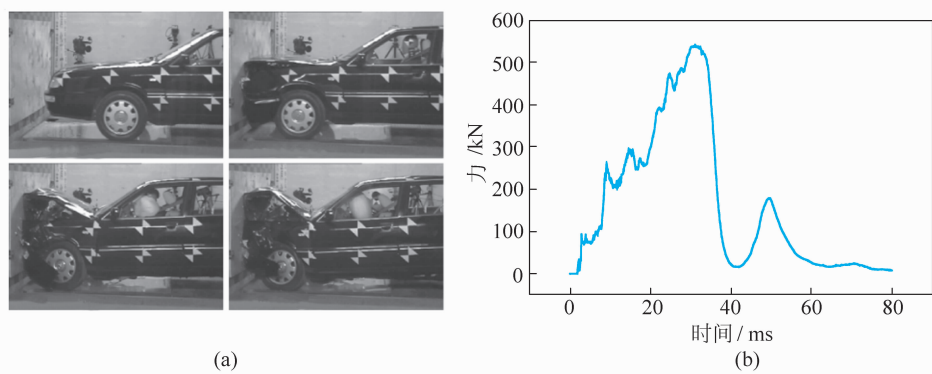


图 3.1 汽车撞击固定壁实验中汽车受壁的冲力

(a) 实验照片; (b) 冲力-时间曲线

对于短时间 Δt 内冲力的作用,常常把式(3.2)改写成

$$\bar{F}\Delta t = \Delta p \quad (3.4)$$

式中 $\bar{F}$ 是平均冲力,即冲力对时间的平均值。平均冲力只是根据物体动量的变化计算出的平均值,它和实际的冲力的极大值可能有较大的差别,因此它不足以完全说明碰撞所可能引起的破坏性。

例 3.1

汽车碰撞实验。在一次碰撞实验中,一质量为 1200 kg 的汽车垂直冲向一固定壁,碰撞前速率为 15.0 m/s,碰撞后以 1.50 m/s 的速率退回,碰撞时间为 0.120 s。试求:(1)汽车受壁的冲量;(2)汽车受壁的平均冲力。

解 以汽车碰撞前的速度方向为正方向,则碰撞前汽车的速度 $v=15.0$ m/s,碰撞后汽车的速度 $v'=-1.50$ m/s,而汽车质量 $m=1200$ kg。

(1) 由动量定理知汽车受壁的冲量为

$$\begin{aligned} I &= p' - p = mv' - mv = 1200 \times (-1.50) - 1200 \times 15.0 \\ &= -1.98 \times 10^4 \text{ (N} \cdot \text{s)} \end{aligned}$$

(2) 由于碰撞时间 $\Delta t=0.120$ s,所以汽车受壁的平均冲力为

$$\bar{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{-1.98 \times 10^4}{0.120} = -165 \text{ (kN)}$$

上两个结果的负号表明汽车所受壁的冲量和平均冲力的方向都和汽车碰撞前的速度方向相反。

平均冲力的大小为 165 kN,约为汽车本身重量的 14 倍,瞬时最大冲力还要比这大得多。这种巨大的冲力是车祸的破坏性的根源,而冲力随时间的急速变化所引起的急动度也是造成人身伤害的原因之一。

例 3.2

一个质量 $m=140\text{ g}$ 的垒球以 $v=40\text{ m/s}$ 的速率沿水平方向飞向击球手,被击后它以相同速率沿 $\theta=60^\circ$ 的仰角飞出,求垒球受棒的平均打击力。设球和棒的接触时间 $\Delta t=1.2\text{ ms}$ 。

解 本题可用式(3.4)求解。由于该式是矢量式,所以可以用分量式求解,也可直接用矢量关系求解。下面分别给出两种解法。

(1) 用分量式求解。已知 $v_1=v_2=v$, 选如图 3.2 所示的坐标系,利用式(3.4)的分量式,由于

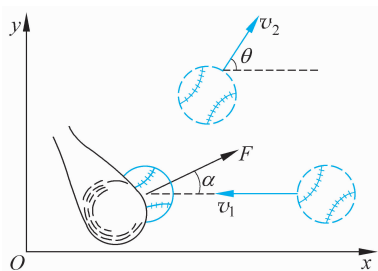


图 3.2 例 3.2 解法(1)图示

$v_{1x}=-v, v_{2x}=v\cos\theta$, 可得垒球受棒的平均打击力的 x 方向分量为

$$\begin{aligned}\bar{F}_x &= \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{mv_{2x} - mv_{1x}}{\Delta t} = \frac{mv\cos\theta - m(-v)}{\Delta t} \\ &= \frac{0.14 \times 40 \times (\cos 60^\circ + 1)}{1.2 \times 10^{-3}} = 7.0 \times 10^3 \text{ (N)}\end{aligned}$$

又由于 $v_{1y}=0, v_{2y}=v\sin\theta$, 可得此平均打击力的 y 方向分量为

$$\begin{aligned}\bar{F}_y &= \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{mv_{2y} - mv_{1y}}{\Delta t} = \frac{mv\sin\theta}{\Delta t} \\ &= \frac{0.14 \times 40 \times 0.866}{1.2 \times 10^{-3}} = 4.0 \times 10^3 \text{ (N)}\end{aligned}$$

球受棒的平均打击力的大小为

$$\bar{F} = \sqrt{\bar{F}_x^2 + \bar{F}_y^2} = 10^3 \times \sqrt{7.0^2 + 4.0^2} = 8.1 \times 10^3 \text{ (N)}$$

以 α 表示此力与水平方向的夹角, 则

$$\tan \alpha = \frac{\bar{F}_y}{\bar{F}_x} = \frac{4.0 \times 10^3}{7.0 \times 10^3} = 0.57$$

由此得

$$\alpha = 30^\circ$$

(2) 直接用矢量公式(3.4)求解。按式(3.4) $\bar{F}\Delta t = \Delta p = mv_2 - mv_1$ 形成如图 3.3 中的矢量三角形, 其中 $mv_2 = mv_1 = mv$ 。由等腰三角形可知, $\bar{F}$ 与水平面的夹角 $\alpha =$

$\theta/2=30^\circ$, 且 $\bar{F}\Delta t = 2mv\cos\alpha$, 于是

$$\bar{F} = \frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t} = \frac{2 \times 0.14 \times 40 \times \cos\alpha}{1.2 \times 10^{-3}} = 8.1 \times 10^3 \text{ (N)}$$

注意, 此打击力约为垒球自重的 5900 倍!

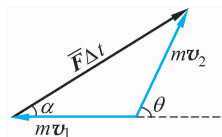


图 3.3 例 3.2 解法(2)图示

例 3.3

一辆装煤车以 $v=3\text{ m/s}$ 的速率从煤斗下面通过(图 3.4), 每秒钟落入车厢的煤为 $\Delta m=500\text{ kg}$ 。如果使车厢的速率保持不变, 应用多大的牵引力拉车厢? (车厢与钢轨间的摩擦忽略不计)

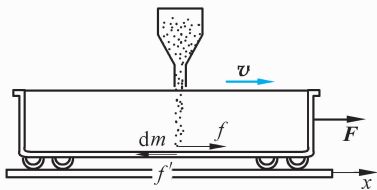


图 3.4 煤 dm 落入车厢被带走

解 先考虑煤落入车厢后运动状态的改变。如图 3.4 所示, 以 dm 表示在 dt 时间内落入车厢的煤的质量。它在车厢对它的力 f 带动下在 dt 时间内沿 x 方向的速率由零增加到与车厢速率 v 相同, 而动量由 0 增加到 $dm \cdot v$ 。由动量定理式(3.1)得, 对 dm 在 x 方向, 应有

$$f dt = dp = dm \cdot v \quad (3.5)$$

对于车厢, 在此 dt 时间内, 它受到水平拉力 F 和煤 dm 对它的

反作用 f' 的作用。此二力的合力沿 x 方向, 为 $F - f'$ 。由于车厢速度不变, 所以动量也不变, 式(3.1)给出

$$(F - f')dt = 0 \quad (3.6)$$

由牛顿第三定律

$$f' = f \quad (3.7)$$

联立解式(3.5)~式(3.7)可得

$$F = \frac{dm}{dt} \cdot v$$

以 $dm/dt = 500 \text{ kg/s}$, $v = 3 \text{ m/s}$ 代入得

$$F = 500 \times 3 = 1.5 \times 10^3 \text{ (N)}$$

3.2 动量守恒定律

在一个问题中, 如果我们考虑的对象包括几个物体, 则它们总体上常被称为一个**物体系统**或简称为**系统**。系统外的其他物体统称为**外界**。系统内各物体间的相互作用力称为**内力**, 外界物体对系统内任意一物体的作用力称为**外力**。例如, 把地球与月球看做一个系统, 则它们之间的相互作用力称为内力, 而系统外的物体如太阳以及其他行星对地球或月球的引力都是外力。本节讨论一个系统的动量变化的规律。

先讨论由两个质点组成的系统。设这两个质点的质量分别为 m_1, m_2 。它们除分别受到相互作用力(内力) f 和 f' 外, 还受到系统外其他物体的作用力(外力) F_1, F_2 , 如图 3.5 所示。分别对两质点写出动量定理式(3.1), 得

$$(F_1 + f)dt = dp_1, \quad (F_2 + f')dt = dp_2$$

将这两式相加, 可以得

$$(F_1 + F_2 + f + f')dt = dp_1 + dp_2$$

由于系统内力是一对作用力和反作用力, 根据牛顿第三定律, 得 $f = -f'$ 或 $f + f' = 0$, 因此上式给出

$$(F_1 + F_2)dt = d(p_1 + p_2)$$

如果系统包含两个以上, 例如 i 个质点, 可仿照上述步骤对各个质点写出牛顿定律公式, 再相加。由于系统的各个内力总是以作用力和反作用力的形式成对出现的, 所以它们的矢量总和等于零。因此, 一般地又可得到

$$\left(\sum_i F_i\right)dt = d\left(\sum_i p_i\right) \quad (3.8)$$

其中 $\sum_i F_i$ 为系统受的合外力, $\sum_i p_i$ 为系统的总动量。式(3.8)表明, 系统的**总动量**随时间的变化率等于该系统所受的**合外力**。内力能使系统内各质点的动量发生变化, 但它们对系统的总动量没有影响。(注意: “合外力”和“总动量”都是**矢量和**!) 式(3.8)可称为**用于质点系的动量定理**。

如果在式(3.8)中, $\sum_i F_i = 0$, 立即可以得到 $d\left(\sum_i p_i\right) = 0$, 或

$$\sum_i p_i = \sum_i m_i v_i = \text{常矢量} \quad \left(\sum_i F_i = 0\right) \quad (3.9)$$

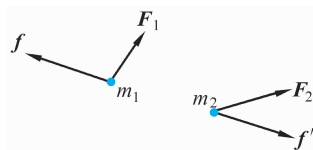


图 3.5 两个质点的系统

这就是说当一个质点系所受的合外力为零时,这一质点系的总动量就保持不变。这一结论叫做动量守恒定律。

一个不受外界影响的系统,常被称为孤立系统。一个孤立系统在运动过程中,其总动量一定保持不变。这也是动量守恒定律的一种表述形式。

应用动量守恒定律分析解决问题时,应该注意以下几点。

(1) 系统动量守恒的条件是合外力为零,即 $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$ 。但在外力比内力小得多的情况下,外力对质点系的总动量变化影响甚小,这时可以认为近似满足守恒条件,也就可以近似地应用动量守恒定律。例如两物体的碰撞过程,由于相互撞击的内力往往很大,所以此时即使有摩擦力或重力等外力,也常可忽略它们,而认为系统的总动量守恒。又如爆炸过程也属于内力远大于外力的过程,也可以认为在此过程中系统的总动量守恒。

(2) 动量守恒表示式(3.9)是矢量关系式。在实际问题中,常应用其分量式,即如果系统沿某一方向所受的合外力为零,则该系统沿此方向的总动量的分量守恒。例如,一个物体在空中爆炸后碎裂成几块,在忽略空气阻力的情况下,这些碎块受到的外力只有竖直向下的重力,因此它们的总动量在水平方向的分量是守恒的。

(3) 由于我们是用牛顿定律导出动量守恒定律的,所以它只适用于惯性系。

以上我们从牛顿定律出发导出了以式(3.9)表示的动量守恒定律。应该指出,更普遍的动量守恒定律并不依靠牛顿定律。动量概念不仅适用于以速度 $\mathbf{v}$ 运动的质点或粒子,而且也适用于电磁场,只是对于后者,其动量不再能用 $m\mathbf{v}$ 这样的形式表示。考虑包括电磁场在内的系统所发生的过程时,其总动量必须也把电磁场的动量计算在内。不但对可以用作用力和反作用力描述其相互作用的质点系所发生的过程,动量守恒定律成立;而且,大量实验证明,对其内部的相互作用不能用力学的概念描述的系统所发生的过程,如光子和电子的碰撞,光子转化为电子,电子转化为光子等过程,只要系统不受外界影响,它们的动量都是守恒的。动量守恒定律实际上是关于自然界的一切物理过程的一条最基本的定律。

例 3.4

冲击摆。如图 3.6 所示,一质量为 M 的物体被静止悬挂着,今有一质量为 m 的子弹沿水平方向以速度 $\mathbf{v}$ 射中物体并停留在其中。求子弹刚停在物体时物体的速度。

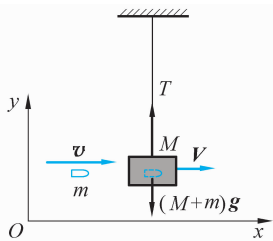


图 3.6 例 3.4 用图

解 由于子弹从射入物体到停在其中所经历的时间很短,所以在此过程中物体基本上未动而停在原来的平衡位置。于是对子弹和物体这一系统,在子弹射入这一短暂过程中,它们所受的水平方向的外力为零,因此水平方向的动量守恒。设子弹刚停在物体中时物体的速度为 V ,则此系统此时的水平总动量为 $(m+M)V$ 。由于子弹射入前此系统的水平总动量为 $m\mathbf{v}$,所以有

$$m\mathbf{v} = (m+M)\mathbf{V}$$

由此得

$$V = \frac{m}{m+M}v$$

例 3.5

如图 3.7 所示,一个有 $1/4$ 圆弧滑槽的大物体的质量为 M ,停在光滑的水平面上,另一质量为 m 的小物体自圆弧顶点由静止下滑。求当小物体 m 滑到底时,大物体 M 在水平面上移动的距离。

解 选如图 3.7 所示的坐标系,取 m 和 M 为系统。在 m 下滑过程中,在水平方向上,系统所受的合外力为零,因此水平方向上的动量守恒。由于系统的初动量为零,所以,如果以 v 和 V 分别表示下滑过程中任一时刻 m 和 M 的速度,则应该有

$$0 = mv_x + M(-V)$$

因此对任一时刻都应该有

$$mv_x = MV$$

就整个下落的时间 t 对此式积分,有

$$m \int_0^t v_x dt = M \int_0^t V dt$$

以 s 和 S 分别表示 m 和 M 在水平方向移动的距离,则有

$$s = \int_0^t v_x dt, \quad S = \int_0^t V dt$$

因而有

$$ms = MS$$

又因为位移的相对性,有 $s = R - S$,将此关系代入上式,即可得

$$S = \frac{m}{m+M}R$$

值得注意的是,此距离值与弧形槽面是否光滑无关,只要 M 下面的水平面光滑就行了。

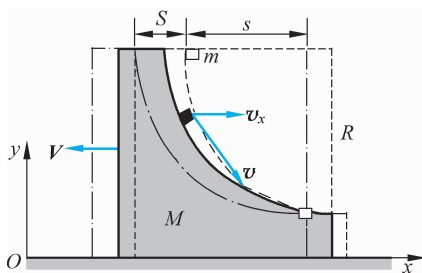


图 3.7 例 3.5 用图

例 3.6

原子核 ^{147}Sm 是一种放射性核,它衰变时放出一 α 粒子,自身变成 ^{143}Nd 核。已测得一静止的 ^{147}Sm 核放出的 α 粒子的速率是 $1.04 \times 10^7 \text{ m/s}$,求 ^{143}Nd 核的反冲速率。

解 以 M_0 和 V_0 ($V_0=0$) 分别表示 ^{147}Sm 核的质量和速率,以 M 和 V 分别表示 ^{143}Nd 核的质量和速率,以 m 和 v 分别表示 α 粒子的质量和速率, V 和 v 的方向如图 3.8 所示,以 ^{147}Sm 核为系统。由于衰变只是 ^{147}Sm 核内部的现象,所以动量守恒。结合图 3.8 所示坐标的方向,应有 V 和 v 方向相反,其大小之间的

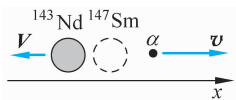


图 3.8 ^{147}Sm 衰变

关系为

$$M_0 V_0 = M(-V) + mv$$

由此解得 ^{143}Nd 核的反冲速率应为

$$V = \frac{mv - M_0 V_0}{M} = \frac{(M_0 - M)v - M_0 V_0}{M}$$

代入数值得

$$V = \frac{(147 - 143) \times 1.04 \times 10^7 - 147 \times 0}{143} = 2.91 \times 10^5 \text{ (m/s)}$$

例 3.7

粒子碰撞。在一次 α 粒子散射过程中, α 粒子(质量为 m)和静止的氧原子核(质量为

M)发生“碰撞”(如图 3.9 所示)。实验测出碰撞后 α 粒子沿与入射方向成 $\theta=72^\circ$ 的方向运动,而氧原子核沿与 α 粒子入射方向成 $\beta=41^\circ$ 的方向“反冲”。求 α 粒子碰撞后与碰撞前的速率之比。

解 粒子的这种“碰撞”过程,实际上是它们在运动中相互靠近,继而由于相互斥力的作用又相互分离的过程。

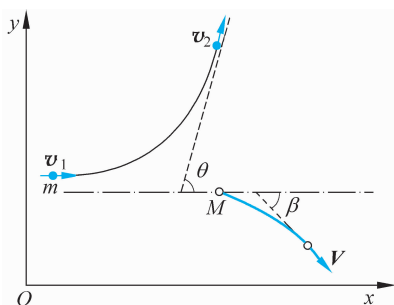


图 3.9 例 3.7 用图

考虑由 α 粒子和氧原子核组成的系统。由于整个过程中仅有内力作用,所以系统的动量守恒。设 α 粒子碰撞前、后速度分别为 v_1, v_2 , 氧核碰撞后速度为 V 。选如图 3.9 所示坐标系,令 x 轴平行于 α 粒子的入射方向。根据动量守恒的分量式,有

$$x \text{ 向} \quad m v_2 \cos \theta + M V \cos \beta = m v_1$$

$$y \text{ 向} \quad m v_2 \sin \theta - M V \sin \beta = 0$$

两式联立可解出

$$v_1 = v_2 \cos \theta + \frac{v_2 \sin \theta}{\sin \beta} \cos \beta = \frac{v_2}{\sin \beta} \sin (\theta + \beta)$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \beta}{\sin (\theta + \beta)} = \frac{\sin 41^\circ}{\sin (72^\circ + 41^\circ)} = 0.71$$

即 α 粒子碰撞后的速率约为碰撞前速率的 71%。

3.3 火箭飞行原理

火箭是一种利用燃料燃烧后喷出的气体产生的反冲推力的发动机。它自带燃料与助燃剂,因而可以在空间任何地方发动。火箭技术在近代有很大的发展,火箭炮以及各种各样的导弹都利用火箭发动机作动力,空间技术的发展更以火箭技术为基础。各式各样的人造地球卫星、飞船和空间探测器都是靠火箭发动机发射并控制航向的。

火箭飞行原理分析如下。为简单起见,设火箭在自由空间飞行,即它不受引力或空气阻力等任何外力的影响。如图 3.10 所示,把某时刻 t 的火箭(包括火箭体和其中尚存的燃料)作为研究的系统,其总质量为 M ,以 v 表示此时刻火箭的速率,则此时刻系统的总动量为 Mv (沿空间坐标 x 轴正向)。此后经过 dt 时间,火箭喷出质量为 dm 的气体,其喷出速率相对于火箭体为定值 u 。在 $t+dt$ 时刻,火箭体的速率增为 $v+dv$ 。在此时刻系统的总动量为

$$dm \cdot (v - u) + (M - dm)(v + dv)$$

由于喷出气体的质量 dm 等于火箭质量的减小,即 $-dM$,所以上式可写为

$$-dM \cdot (v - u) + (M + dM)(v + dv)$$

由动量守恒定律可得

$$-dM \cdot (v - u) + (M + dM)(v + dv) = Mv$$

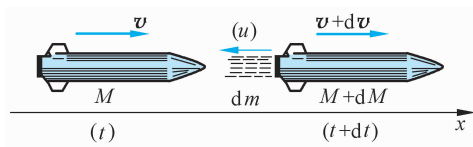


图 3.10 火箭飞行原理说明图

展开此等式,略去二阶无穷小量 $dM \cdot dv$,可得

$$u dM + M dv = 0$$

或者

$$dv = -u \frac{dM}{M}$$

设火箭点火时质量为 M_i ,初速为 v_i ,燃料烧完后火箭质量为 M_f ,达到的末速度为 v_f ,对上式积分则有

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -u \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

由此得

$$v_f - v_i = u \ln \frac{M_i}{M_f} \quad (3.10)$$

此式表明,火箭在燃料燃烧后所增加的速率和喷气速率成正比,也与火箭的始末质量比(以下简称**质量比**)的自然对数成正比。

如果只以火箭本身作为研究的系统,以 F 表示在时间间隔 t 到 $t+dt$ 内喷出气体对火箭体(质量为 $(M-dm)$)的推力,则根据动量定理,应有

$$F dt = (M - dm)[(v + dv) - v] = M dv$$

将上面已求得的结果 $M dv = -u dM = u dm$ 代入,可得

$$F = u \frac{dm}{dt} \quad (3.11)$$

此式表明,火箭发动机的推力与燃料燃烧速率 dm/dt 以及喷出气体的相对速率 u 成正比。例如,一种火箭的发动机的燃烧速率为 1.38×10^4 kg/s,喷出气体的相对速率为 2.94×10^3 m/s,理论上它所产生的推力为

$$F = 2.94 \times 10^3 \times 1.38 \times 10^4 = 4.06 \times 10^7 \text{ (N)}$$

这相当于 4000 t 海轮所受的浮力!

为了提高火箭的末速度以满足发射地球人造卫星或其他航天器的要求,人们制造了若干单级火箭串联形成的多级火箭(通常是三级火箭)。

火箭最早是中国发明的。我国南宋时出现了作烟火玩物的“起火”,其后就出现了利用起火推动的翎箭。明代茅元仪著的《武备志》(1628 年)中记有利用火药发动的“多箭头”(10 支到 100 支)的火箭,以及用于水战的叫做“火龙出水”的二级火箭(见图 3.11,第二级藏在龙体内)。我国现在的火箭技术也已达世界先进水平。例如长征三号火箭是三级大型运载火箭,全长 43.25 m,最大直径 3.35 m,起飞质量约 202 t,起飞推力为 2.8×10^3 kN。2003 年我们发射了载人宇宙飞船“神舟”5 号。

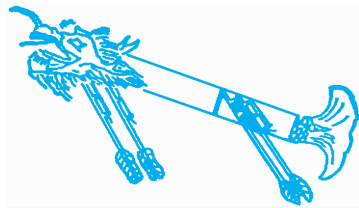


图 3.11 “火龙出水”火箭

3.4 质心

在讨论一个质点系的运动时,我们常常引入**质量中心**(简称**质心**)的概念。设一个质点系由 N 个质点组成,以 $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_N$ 分别表示各质点的质量,以 $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots,$

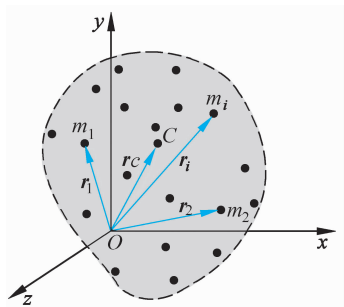


图 3.12 质心的位置矢量

r_N 分别表示各质点对某一坐标原点的位矢(图 3.12)。我们用公式

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m} \quad (3.12)$$

定义这一质点系的质心的位矢, 式中 $m = \sum_i m_i$ 是质点系的总质量。作为位置矢量, 质心位矢与坐标系的选择有关。但可以证明质心相对于质点系内各质点的相对位置是不会随坐标系的选择而变化的, 即质心是相对于质点系本身

的一个特定位置。

利用位矢沿直角坐标系各坐标轴的分量, 由式(3.12)可以得到质心坐标表示式如下:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_i m_i x_i}{m} \\ y_C &= \frac{\sum_i m_i y_i}{m} \\ z_C &= \frac{\sum_i m_i z_i}{m} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

一个大的连续物体, 可以认为是由许多质点(或叫质元)组成的, 以 dm 表示其中任一质元的质量, 以 $\mathbf{r}$ 表示其位矢, 则大物体的质心位置可用积分法求得, 即有

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{m} \quad (3.14)$$

它的三个直角坐标分量式分别为

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \int \frac{x dm}{m} \\ y_C &= \int \frac{y dm}{m} \\ z_C &= \int \frac{z dm}{m} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

利用上述公式, 可求得均匀直棒、均匀圆环、均匀圆盘、均匀球体等形体的质心就在它们的几何对称中心上。

力学上还常应用重心的概念。重心是一个物体各部分所受重力的合力作用点。可以证明尺寸不十分大的物体, 它的质心和重心的位置重合。

例 3.8

地月质心。地球质量 $M_E = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$, 月球质量 $M_M = 7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$, 它们的中心的距离 $l = 3.84 \times 10^5 \text{ km}$ (参见图 3.13)。求地-月系统的质心位置。

解 把地球和月球都看做均匀球体, 它们的质心就都在各自的球心处。这样就可以把地-月系统看做地球与月球质量分别集中在各自的球心的两个质点。选择地球中心为原点, x 轴沿着地球中心与月球中心的连线, 则系统的质心坐标

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{M_E \cdot 0 + M_M \cdot l}{M_E + M_M} \approx \frac{M_M l}{M_E} \\ &= \frac{7.35 \times 10^{22}}{5.98 \times 10^{24}} \times 3.84 \times 10^5 = 4.72 \times 10^3 \text{ (km)} \end{aligned}$$

这就是地-月系统的质心到地球中心的距离。这一距离约为地球半径 ($6.37 \times 10^3 \text{ km}$) 的 70%, 约为地球到月球距离的 1.2%。

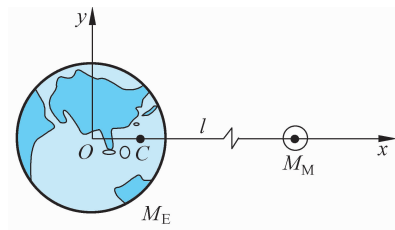


图 3.13 例 3.8 用图

例 3.9

半圆质心。一段均匀铁丝弯成半圆形, 其半径为 R , 求此半圆形铁丝的质心。

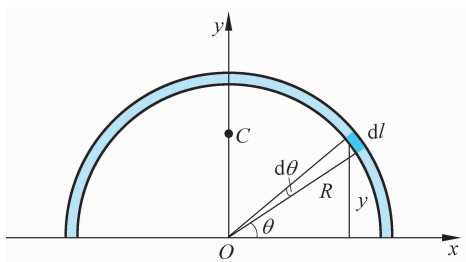


图 3.14 例 3.9 用图

解 选如图 3.14 所示的坐标系, 坐标原点为圆心。由于半圆对 y 轴对称, 所以质心应该在 y 轴上。任取一小段铁丝, 其长度为 dl , 质量为 dm 。以 ρ_l 表示铁丝的线密度 (即单位长度铁丝的质量), 则有

$$dm = \rho_l dl$$

根据式 (3.15) 可得

$$y_C = \frac{\int y \rho_l dl}{m}$$

由于 $y = R \sin \theta$, $dl = R d\theta$, 所以

$$y_C = \frac{\int_0^\pi R \sin \theta \cdot \rho_l \cdot R d\theta}{m} = \frac{2\rho_l R^2}{m}$$

铁丝的总质量

$$m = \pi R \rho_l$$

代入上式就可得

$$y_C = \frac{2}{\pi} R$$

即质心在 y 轴上离圆心 $2R/\pi$ 处。注意, 这一弯曲铁丝的质心并不在铁丝上, 但它相对于铁丝的位置是确定的。

3.5 质心运动定理

将式 (3.12) 中的 $\mathbf{r}_C$ 对时间 t 求导, 可得出质心运动的速度为

$$\mathbf{v}_C = \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{m} \quad (3.16)$$

由此可得