第3章

平衡方程及其应用

3.1 汇交力系的平衡

3.1.1 平面汇交力系的平衡方程

由于平面汇交力系可用合力来代替，显然，平面汇交力系平衡的必要和充分条件是：该力系的合力等于零。如用矢量等式表示，即

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{i}=\boldsymbol{0} \tag{3.1.1}$$

在平衡情形下，力多边形中最后一力的终点与第一力的起点重合，力系的力多边形自行封边，这就是平面汇交力系平衡的几何条件。

利用力的多边形这一几何条件，对物体的受力进行分析的方法，称为**几何法**。

由式(2.2.3)有

$$F_{\mathrm{R}}=\sqrt{\left(\sum F_{ix}\right)^{2}+\left(\sum F_{iy}\right)^{2}}=0$$

欲使上式成立，必须同时满足

$$\begin{cases}\sum F_{ix}=0\\ \sum F_{iy}=0\end{cases} \tag{3.1.2}$$

于是，平面汇交力系平衡的必要和充分条件是：各力在两个坐标轴上投影的代数和分别等于零。式(3.1.2)称为平面汇交力系的**平衡方程**。这是两个独立的方程，可以求解两个未知量。

3.1.2 空间汇交力系的平衡方程

由于一般空间汇交力系也是合成为一个合力,因此,空间汇交力系平衡的必要和充分条件也为:该力系的合力等于零,即

$$\boldsymbol{F}_R = \sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0} \tag{3.1.3}$$

为使合力 $\boldsymbol{F}_R$ 为零,必须同时满足

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0 \\ \sum F_{iy} = 0 \\ \sum F_{iz} = 0 \end{cases} \tag{3.1.4}$$

于是可得结论,空间汇交力系平衡的必要和充分条件为:该力系中所有各力在三个坐标轴上的投影的代数和分别等于零。式(3.1.4)称为空间汇交力系的平衡方程。

空间中的一个质点,有三个自由度,欲使其处于静平衡状态,需要施加三个方向的约束,式(3.1.4)中的三个力的投影方程可以视为在 x、y、z 三个方向约束的反映。特别地,式(3.1.2)为式(3.1.4)的平面情形。

利用如式(3.1.2)或式(3.1.4)通过力的投影计算物体受力的方法称为**解析法**。应用解析方法求解汇交力系平衡问题的步骤一般是:①选取合适的研究对象;②对研究对象进行受力分析;③建立坐标系,并计算各个力在坐标轴上的投影,列出相应的平衡方程;④求解方程,计算未知量。

空间汇交力系的平衡由于可以列出三个平衡方程,故可求解三个未知量。一般情况下,如果汇交力系是平面汇交力系,且力的数目比较少(最好 3 个),可以利用力的多边形(最好是三角形)进行计算,这样简单、快捷又直观;但如果力的数目比较多或是空间汇交力系,则最好用解析法求解。

【例 3.1.1】 已知梁 AB 的支承和受力如图 3.1.1(a)所示。求支座 A、B 的约束反力。

【解】 以梁 AB 的为研究对象,作受力图如图 3.1.1(b)所示。根据铰支座的性质,$\boldsymbol{F}_B$ 的方向垂直于斜面,而 $\boldsymbol{F}_A$ 的方向未定,但因梁 AB 只受三个力作用,并且 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}_B$ 的作用线交于 C,故 $\boldsymbol{F}_A$ 必沿 AC 作用,并由几何关系知 $\boldsymbol{F}_A$ 与水平线成 30°。故本题可视为平面汇交力系的平衡问题。假设 $\boldsymbol{F}_A$ 与 $\boldsymbol{F}_B$ 的指向如图 3.1.1(b)所示。取 x、y 轴如图,由平衡方程

$$\sum F_{ix} = 0:\ F_A\cos30° - F_B\cos60° - F\cos60° = 0 \tag{a}$$

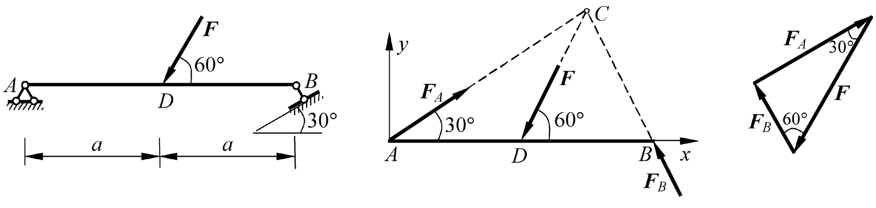
$$\sum F_{iy} = 0:\ F_A\sin30° + F_B\sin60° - F\sin60° = 0 \tag{b}$$

联立式(a)、(b),可解得:$F_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}F$,$F_B = \dfrac{1}{2}F$。

结果为正,表明假设的 $\boldsymbol{F}_A$ 与 $\boldsymbol{F}_B$ 的指向是正确的。

【思考】 坐标轴是否还有其他形式?怎样选取投影轴,可以避免解联立方程。

【说明】 若用几何法求解,可以 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}_A$ 与 $\boldsymbol{F}_B$ 为边作封闭的力的三角形如图 3.1.1(c)所示,则可直接确定 $\boldsymbol{F}_A$ 与 $\boldsymbol{F}_B$ 的指向应如图 3.1.1(c)所示;而它们的大小,由于力的三角



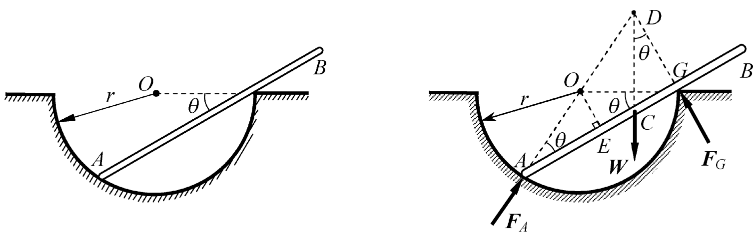
（a）　　（b）　　（c）

图 3.1.1　例 3.1.1 图

形为直角三角形，直接求解该直角三角形也可得到正确答案。

【注意】　应用力的多边形完成力的计算，需要正确确定各力的指向。

【例 3.1.2】　均质杆 AB 长 $2l$，置于半径为 r 的光滑半圆槽内，如图所示。设 $2r>l>\sqrt{\dfrac{2}{3}}r$。求平衡时杆与水平线所成的角 θ。



（a）　　（b）

图 3.1.2　例 3.1.2 图

【解】　记杆件与半圆槽的另一接触点为 G，显然，杆件的重心 C 应在 A、G 之间。由三力平衡汇交定理可知，杆件受到的三个力应交于 D 点，杆件的受力如图 3.1.2(b)所示。

由几何关系可知

$$\overline{AD}=2r,\quad \overline{DG}=2r\sin\theta,\quad \overline{CG}=\overline{DG}\tan\theta=2r\sin\theta\tan\theta,\quad \overline{AC}=l$$

从而有

$$\overline{AG}=\overline{AD}\cos\theta=2r\cos\theta=\overline{AC}+\overline{CG}=l+2r\sin\theta\tan\theta$$

即

$$2r\cos\theta=l+2r\sin\theta\tan\theta,\quad 4r\cos^2\theta-l\cos\theta-2r=0$$

求解关于 $\cos\theta$ 的二次方程，并舍弃一个不合题意的解，可得

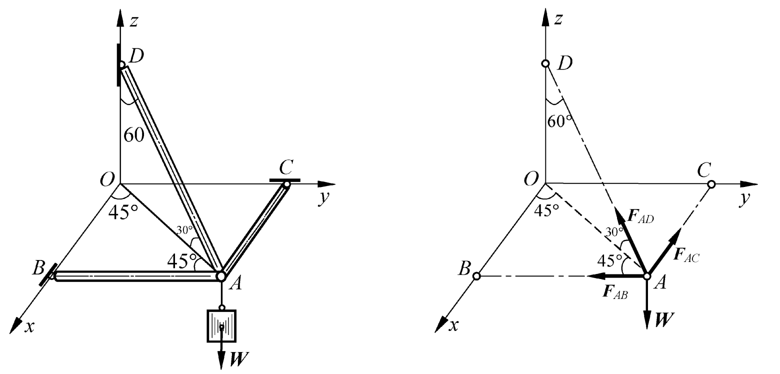
$$\cos\theta=\frac{l+\sqrt{l^2+4\times4r\times2r}}{2\times4r}=\frac{l+\sqrt{l^2+32r^2}}{8r}$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{l+\sqrt{l^2+32r^2}}{8r}\right)$$

【说明】　本题也可以用解析法，列平衡方程求解。读者不妨试一试。

【例 3.1.3】　如图 3.1.3(a)所示结构中，AB、AC、AD 三杆由球铰连接于 A 处；B、C、D 三处均为固定球铰支座。若在 A 处悬挂重物的重量 W 为已知，试求三杆的受力。

【解】　本题为空间汇交力系的平衡问题。以 A 处的球铰为研究对象。由于 AB、AC、AD 三杆都是两端铰结，杆上无其他外力作用，故都是二力杆。因此，三杆作用在 A 处球铰



（a）　　　　（b）

图 3.1.3　例 3.1.3 图

上的力 $\boldsymbol{F}_{AB}$、$\boldsymbol{F}_{AC}$、$\boldsymbol{F}_{AD}$ 的作用线分别沿着各杆的轴线方向，假设三者的指向都是背向 A 点的。

根据受力图中的几何关系，列出平衡方程

$$\sum F_{iz}=0:F_{AD}\sin30°-W=0,\quad F_{AD}=2W$$

$$\sum F_{ix}=0:-F_{AC}-F_{AD}\cos30°\sin45°=0,\quad F_{AC}=-\frac{\sqrt{6}}{2}W$$

$$\sum F_{iy}=0:-F_{AB}-F_{AD}\cos30°\cos45°=0,\quad F_{AB}=-\frac{\sqrt{6}}{2}W$$

【说明】 在以上分析中，计算 $\boldsymbol{F}_{AD}$ 在 x、y 方向的投影时，是利用二次投影方法，先将其投影到 Oxy 坐标面上，然后再分别向 x、y 坐标轴投影。

3.2 力偶系的平衡

3.2.1 平面力偶系的平衡方程

由合成结果可知，力偶系平衡时，其合力偶的矩等于零。因此，平面力偶系平衡的必要和充分条件是：所有各力偶矩的代数和等于零，即

$$\sum M_i=0 \tag{3.2.1}$$

由刚体的平面运动可知，描述物体转动的量就是物体的转角，因而上述方程就是使平面物体保持不转动所施加约束的反映。

3.2.2 空间力偶系的平衡方程

由于空间力偶系可以用一个合力偶来代替，因此，空间力偶系平衡的必要和充分条件是：该力偶系的合力偶矩等于零，亦即所有力偶矩矢量和等于零，即

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{0} \tag{3.2.2}$$

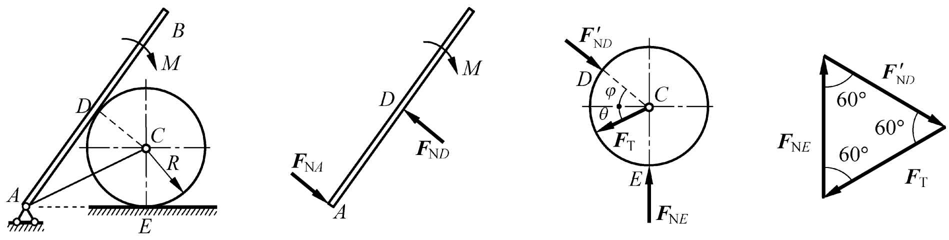
欲使上式成立,必须同时满足

$$\sum M_{ix} = 0, \quad \sum M_{iy} = 0, \quad \sum M_{iz} = 0 \tag{3.2.3}$$

上式为空间力偶系的平衡方程。即空间力偶系平衡的必要和充分条件为:该力偶系中所有各力偶矩矢在三个坐标轴上投影的代数和分别等于零。

上述三个独立的平衡方程可求解三个未知量。

【例 3.2.1】 杆件 AB、轮 C 和绳子 AC 组成图 3.2.1(a)所示物体系统。已知作用在杆上的力偶,其矩为 M,$\overline{AC}=2R$,R 为轮 C 的半径,各物体的质量忽略不计,各接触处均光滑。求绳子的拉力和铰链 A 对杆件 AB 的约束力及地面对轮 C 的约束力。



(a) (b) (c) (d)

图 3.2.1 例 3.2.1 图

【解】 (1) 取 AB 杆为隔离体。AB 杆上有主动力偶 M 和 A、D 处的约束力作用,根据力偶只能由力偶来平衡的性质,轮 C 对杆的作用力 $\boldsymbol{F}_{ND}$ 和销钉 A 对杆的作用力 $\boldsymbol{F}_{NA}$ 必构成一力偶,即 $F_{ND}=-F_{NA}$,由于 $\boldsymbol{F}_{ND}$ 垂直于 AB 杆,故 $\boldsymbol{F}_{NA}$ 也垂直于 AB 杆,AB 杆受力图如图(b)所示。

由几何关系,得

$$AD = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = \sqrt{3}R$$

根据平面力偶系平衡方程,即

$$\sum M = 0, \quad M - F_{NA} \cdot \overline{AD} = 0 \tag{1}$$

可解得

$$F_{NA} = \frac{M}{\overline{AD}} = \frac{M}{\sqrt{3}R} = \frac{\sqrt{3}M}{3R}, \quad F_{ND} = F_{NA} = \frac{\sqrt{3}M}{3R}$$

(2) 取轮 C 为分离体。轮 C 上作用有 $\boldsymbol{F}'_{ND}$、$\boldsymbol{F}_T$ 和 $\boldsymbol{F}_{NE}$ 三个力,此三个力组成了平面汇交力系。受力图如图(c)所示。绘制力的三角形如图 3.2.1(d)所示。分析可知力的三角形为等边三角形,故有

$$F_T = F_{ND} = F_{NE} = \frac{\sqrt{3}M}{3R}$$

【例 3.2.2】 直角弯杆 $ABCD$ 与直杆 DE 及 EC 铰结,如图 3.2.2(a)所示,作用在杆 DE 上力偶的力偶矩 $M=40\ \text{kN}\cdot\text{m}$,不计各杆件的重量和摩擦,尺寸如图。求支座 A、B 处的约束力和杆 EC 所受的力。

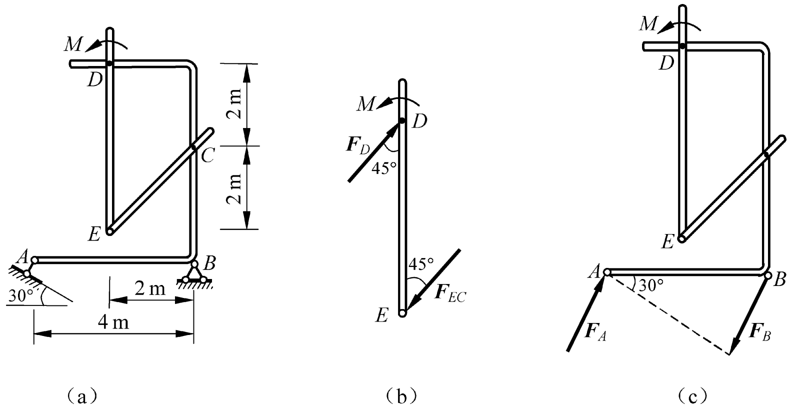


图 3.2.2 例 3.2.2 图

【解】 由系统结构图可知，杆 EC 为二力杆，杆 DE 上只有一个主动力偶和销钉 D、E 对杆件的作用，因为力偶只能由力偶平衡，故 DE 杆受力如图 3.2.2(b)所示，由力偶系平衡方程得

$$\sum M_i = 0, \quad M - F_{EC} \cdot \overline{DE} \cdot \sin 45° = 0$$

$$F_{EC} = \frac{M}{\overline{DE} \cdot \sin 45°} = \frac{40\ \text{kN} \cdot \text{m}}{4\ \text{m} \cdot \sqrt{2}/2} = 10\sqrt{2}\ \text{kN} = 14.1\ \text{kN} \quad (EC\ \text{杆受压})$$

再以整体为研究对象，将整个物体系统视为刚体，则系统在一个主动力偶和支座 A、B 处的约束力作用下保持平衡，同上可知系统的受力如图 3.2.2(c)所示，由力偶系平衡方程得

$$\sum M_i = 0, \quad M - F_B \cdot \overline{AB} \cdot \cos 30° = 0$$

支座 A、B 处的约束力大小为

$$F_A = F_B = \frac{M}{\overline{AB} \cdot \cos 30°} = \frac{40\ \text{kN} \cdot \text{m}}{4\ \text{m} \cdot \sqrt{3}/2} = \frac{20}{\sqrt{3}}\ \text{kN} = 11.5\ \text{kN}$$

支座 A、B 处的约束反力指向如图所示。

【说明】 ①一个物体只有两个力和一个主动力偶作用而处于平衡，则这两个力一定形成力偶与主动力偶平衡，这是一个常用的结论。上述例 3.2.1、例 3.2.2 中都应用了这一结论。②在求支座 A、B 处的约束力时将整个物体系统视为研究对象，也就是利用刚化公理，将整个物体系统视为一个刚体，应用本说明中①的结论。

【例 3.2.3】 图 3.2.3(a)所示的三角柱刚体是正方体的一半。在其中三个侧面各自作用一个力偶。已知力偶($\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_1'$)的矩 $M_1 = 20\ \text{N} \cdot \text{m}$；力偶($\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_2'$)的矩 $M_2 = 10\ \text{N} \cdot \text{m}$；力偶($\boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_3'$)的矩 $M_3 = 30\ \text{N} \cdot \text{m}$。试求合力偶矩矢 $\boldsymbol{M}$。又问使这个刚体平衡，还需要施加怎样一个力偶。

【解】 这是一个空间力偶系合成和平衡问题。根据空间力偶系合成法，先求出力偶矩矢 $\boldsymbol{M}$。根据三个力偶在空间的作用面不同，考虑到力偶矩矢是自由矢量，可将力偶矩矢画在坐标轴上(图 3.2.3(b))。力偶矩矢 $\boldsymbol{M}$ 在三个坐标轴上的投影分别为

$$M_x = M_{1x} + M_{2x} + M_{3x} = 0$$

$$M_y = M_{1y} + M_{2y} + M_{3y} = (-10 + 30\cos 45°)\ \text{N} \cdot \text{m} = 11.2\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} = (20 + 30\sin 45°)\ \text{N} \cdot \text{m} = 41.2\ \text{N} \cdot \text{m}$$

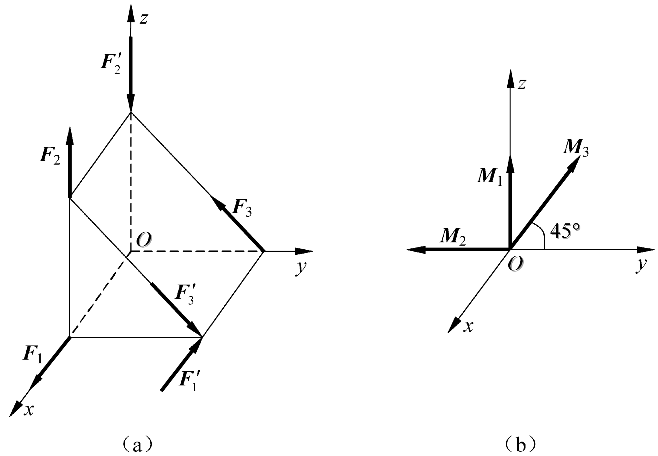


图 3.2.3　例 3.2.3 图

从而求得力偶矩矢 $\boldsymbol{M}$ 的大小和方向为

$$M=\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}=42.7\ \mathrm{N\cdot m};\quad \cos(\boldsymbol{M},\boldsymbol{i})=\frac{M_x}{M}=0,\quad \angle(\boldsymbol{M},\boldsymbol{i})=90^\circ$$

$$\cos(\boldsymbol{M},\boldsymbol{j})=\frac{M_y}{M}=0.262,\quad \angle(\boldsymbol{M},\boldsymbol{j})=74.8^\circ$$

$$\cos(\boldsymbol{M},\boldsymbol{k})=\frac{M_z}{M}=0.965,\quad \angle(\boldsymbol{M},\boldsymbol{k})=15.2^\circ$$

根据空间力偶系平衡条件，要使这个刚体平衡，需加一力偶，其力偶矩矢为 $\boldsymbol{M}_4=-\boldsymbol{M}$。

3.3　一般力系的平衡

3.3.1　平面一般力系的平衡方程

1. 平面一般力系平衡方程的基本形式

现讨论平面任意力系的主矢和主矩都等于零的情形，这是静力学中最重要的情形，即

$$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}=\boldsymbol{0},\quad M_O=0 \tag{3.3.1}$$

显然，主矢等于零，表明作用于简化中心 O 的汇交力系为平衡力系；主矩等于零，表明附加力偶系也是平衡力系，所以原力系必为平衡力系。因此，式(3.3.1)为平面一般力系平衡的充分条件。

若主矢和主矩有一个不等于零，则力系应简化为合力或合力偶；若主矢与主矩都不等于零时，可进一步简化为一个合力。只有当主矢和主矩都等于零时，力系才能平衡，因此，式(3.3.1)又是平面一般力系平衡的必要条件。

于是，平面任意力系平衡的必要和充分条件是：力系的主矢和对平面内任一点的主矩都等于零。上述平衡条件用解析式表示，可得

$$\sum F_{ix}=0,\quad \sum F_{iy}=0,\quad \sum M_O(\boldsymbol{F}_i)=0 \tag{3.3.2}$$

由此可得结论，平面一般力系的平衡条件是：所有各力在两个任选的坐标轴上的投影的代数和分别等于零，以及各力对于任意一点的矩的代数和也等于零。式(3.3.2)称为**平面一般力系的平衡方程**。

式(3.3.2)有3个方程，只能求解3个未知数。

2. 平面一般力系平衡方程的其他形式

(1) 二矩式平衡方程

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}_i)=0,\quad \sum M_B(\boldsymbol{F}_i)=0,\quad \sum F_{ix}=0 \tag{3.3.3}$$

其中 x 轴不得垂直于 A、B 两点的连线。

为什么上述形式的平衡方程也能满足力系平衡的必要和充分条件呢？必要性是显然的。至于充分性，这是因为，如果力系对点 A 的主矩等于零，则这个力系不可能简化为一个力偶；但可能有两种情形：这个力系或者是简化为经过点 A 的一个力，或者平衡。如果力系对另一点 B 的主矩也同时为零，则这个力系或有一个合力沿 A、B 两点的连线，或者平衡(图3.3.1)。如果再加上 $\sum F_{ix}=0$，那么力系如有合力，则此合力必与 x 轴垂直。式(3.3.3)的附加条件(x 轴不得垂直连线 AB)完全排除了力系简化为一个合力的可能性，故所研究的力系必为平衡力系。充分性得证。

(2) 三矩式平衡方程

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}_i)=0,\quad \sum M_B(\boldsymbol{F}_i)=0,\quad \sum M_C(\boldsymbol{F}_i)=0 \tag{3.3.4}$$

其中 A、B、C 三点不得共线。为什么必须有这个附加条件，读者可自行证明。

上述三组方程，究竟选用哪一组方程，须根据具体条件确定。对于受平面一般力系作用的单个刚体的平衡问题，只可以写出3个独立的平衡方程，求解3个未知量。任何第4个方程只是3个独立方程的线性组合，因而不是独立的。但我们可用这些不独立的方程来校核计算的结果。

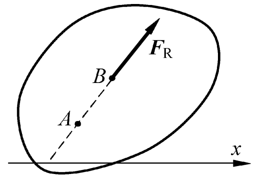


图3.3.1 平面一般力系二矩式的平衡方程说明

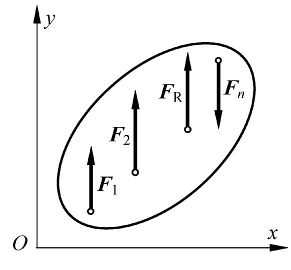


图3.3.2 平面平行力系

3. 平面平行力系的平衡方程

平面平行力系是平面一般力系的一种特殊情形。

如图3.3.2所示，设物体受平面平行力系 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$ 的作用。如选取 x 轴与各力垂直，则不论力系是否平衡，每一个力在 x 轴上的投影恒等于零，即 $\sum F_{ix}\equiv 0$。于是，平行力系的独立平衡方程的数目只有两个，即

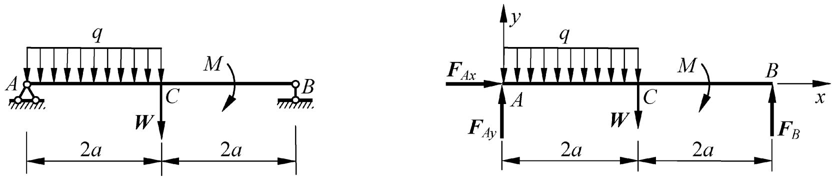
$$\sum F_{iy}=0,\quad \sum M_O(\boldsymbol{F}_i)=0 \tag{3.3.5}$$

平面平行力系的平衡方程，也可以用两个力矩方程的形式，即

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}_i)=0,\quad \sum M_B(\boldsymbol{F}_i)=0 \tag{3.3.6}$$

其中，A、B 两点之间的连线不与 y 轴平行。

【例 3.3.1】 图 3.3.3(a)所示的水平横梁 AB，A 端为固定铰链支座，B 端为一活动铰支座。梁的长为 $4a$，梁受重力 $\boldsymbol{W}$，作用在梁的中点 C。在梁的 AC 段上受均布荷载 q 作用，在梁的 BC 段上受力偶作用，力偶矩 $M=Wa$。试求 A 和 B 处的支座约束反力。



(a)　　　　(b)

图 3.3.3　例 3.3.1 图

【解】 选梁 AB 为研究对象。它所受的主动力有：均布荷载 q、重力 $\boldsymbol{W}$ 和矩为 M 的力偶。它所受的约束反力有：铰链 A 处的两个分力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Ay}$，活动铰支座 B 处铅直向上的约束反力 $\boldsymbol{F}_B$，如图 3.3.3(b)所示。取图示坐标系，并利用平行分布力系的简化结论，可列出平衡方程，并求出需要的未知力。

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}_i)=0,\quad F_B\cdot 4a-M-W\cdot 2a-q\cdot 2a\cdot a=0,\quad F_B=\frac{3}{4}W+\frac{1}{2}qa(\uparrow);$$

$$\sum M_B(\boldsymbol{F}_i)=0,\quad -F_{Ay}\cdot 4a+(q\cdot 2a)\cdot 3a+W\cdot 2a-M=0,\quad F_{Ay}=\frac{W}{4}+\frac{3}{2}qa(\uparrow);$$

$$\sum F_{ix}=0,\quad F_{Ax}=0。$$

将上述计算结果代入式 $\sum M_C(\boldsymbol{F}_i)$，可得 $\sum M_C(\boldsymbol{F}_i)=0$，说明上述结果无误。

【说明】 ①选取适当的坐标轴和力矩中心，可以减少每个平衡方程中的未知量的数目。在平面一般力系情形下，矩心应取在多个未知力的交点上，而投影轴应当与尽可能多的未知力相垂直。②应养成习惯，利用不独立的平衡方程，对计算结果进行检验。

【例 3.3.2】 如图 3.3.4 所示，行动式起重机不计平衡锤的重量为 $P=500$ kN，其重心在离右轨 1.5 m 处。起重机的起重力为 $P_1=250$ kN，突臂伸出离右轨 10 m。跑车本身重力略去不计，欲使跑车满载和空载时起重机均不致翻倒，试求平衡锤的最小重量 P_2 及平衡锤到左轨的最大距离 x。

【解】 以起重机为研究对象，假设起重机在 A、B 处的支反力分别为 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$，则起重机受到铅垂方向的平行力作用，可以建立两个独立的平衡方程。

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}_i)=0:\ F_B\times 3\text{ m}+P_2\times x-P\times 4.5\text{ m}-P_1\times 13\text{ m}=0 \tag{a}$$

$$\sum M_B(\boldsymbol{F}_i)=0:\ P_2(x+3\text{ m})-F_A\times 3\text{ m}-P\times 1.5\text{ m}-P_1\times 10\text{ m}=0 \tag{b}$$

由式(a)、式(b)可得

$$F_B=\frac{1}{3}(4.5P+13P_1-P_2x) \tag{c}$$

$$F_A=\frac{1}{3}[P_2(x+3)-1.5P-10P_1] \tag{d}$$

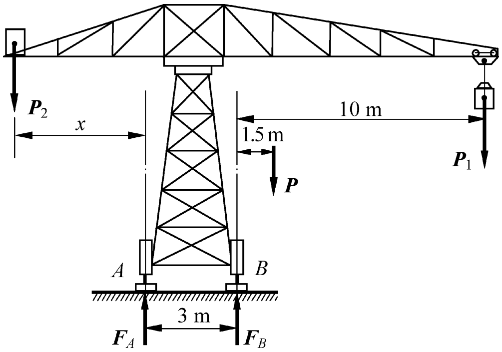


图 3.3.4 例 3.3.2 图

欲使跑车空载时起重机均不致翻倒，令 $P_1=0$，并满足 $F_B \geqslant 0$。由式(c)可得

$$P_2 x \leqslant 4.5P = 2\,250\ \mathrm{kN \cdot m} \tag{e}$$

欲使跑车满载时起重机均不致翻倒，令 $P_1 = 250\ \mathrm{kN}$，并满足 $F_A \geqslant 0$。由式(d)可得

$$P_2(x+3) \geqslant 1.5P + 10P_1 = 3\,250\ \mathrm{kN \cdot m} \tag{f}$$

式(e)、式(f)取等式，可求得 P_2、x 的值，并经验证确实为本题的解。即

$$P_2 = P_{2,\min} = 333.33\ \mathrm{kN},\quad x = 6.75\ \mathrm{m}$$

【说明】 明确跑车满载和空载时起重机均不致翻倒的受力条件是求解本题的关键。

3.3.2 空间一般力系的平衡方程

空间一般力系处于平衡的必要和充分条件是：力系的主矢和对于任一点的主矩都等于零，即：$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{0}$。

根据式(2.2.16)和式(2.2.18)，可将上述条件写成空间一般力系的平衡方程

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum F_{iz} = 0 \\ \sum M_x(\boldsymbol{F}_i) = 0, \quad \sum M_y(\boldsymbol{F}_i) = 0, \quad \sum M_z(\boldsymbol{F}_i) = 0 \end{cases} \tag{3.3.7}$$

空间一般力系平衡的必要和充分条件是：所有各力在三个坐标轴中每一个轴上的投影的代数和等于零，以及这些力对于每一个坐标轴的矩的代数和也等于零。

对于受空间一般力系作用下的单个刚体的平衡问题，可以写出 6 个独立的平衡方程，求解 6 个未知量。

【思考】 ①如果一组空间平行力系平衡，可以列出多少个独立的平衡方程？为什么？②平面一般力系的平衡方程形式有一矩式、二矩式、三矩式，那么空间一般力系的平衡方程形式可否有四矩式、五矩式、六矩式？若有，还需要什么附加条件吗？

【例 3.3.3】 图 3.3.5 所示边长为 a 的均质长方板 $ABCD$ 由六根直杆支持于水平位置，直杆两端各用球铰链与板和地面连接。板重为 W，在 A 处作用一水平力

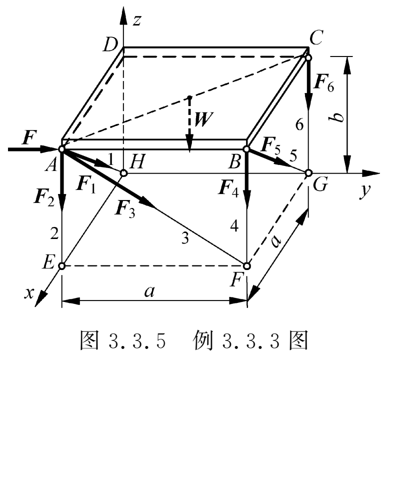


图 3.3.5 例 3.3.3 图