

第3章

连续时间信号与系统的频域分析

第2章讨论了连续时间系统的时域分析,将任意输入信号在时间轴上分解为一系列冲激函数或阶跃函数的线性组合,利用系统的线性时不变性(LTI)将系统的响应(零状态响应)表示为输入信号与系统冲激响应的卷积。这种信号分解的方法大大简化了系统分析的复杂度。本章将从另一个角度研究信号的分解和表示,即傅里叶分析法,其基本思想是将信号分解为不同频率的三角函数或复指数函数的线性组合,这里的三角函数和复指数函数就是信号分解的基本组合,也称为基本的频率分量。傅里叶分析将信号和系统的分析方法扩展到频率的维度,将信号进行不同频率上的分解,类似于自然中自然光分解为七彩光,即将系统的分析从时域转入变换域分析,将时间变量变换为频率变量。

正弦函数 $\cos\omega t$ (正弦和余弦函数可统称为正弦函数,复数的实部分用 $\cos$ 表示)和虚指数函数 $e^{j\omega t}$ 为定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 的函数。根据欧拉公式,正弦或余弦函数均可表为两个虚指数函数之和。具有一定幅度和相位,角频率为 ω 的虚指数函数 $F(j\omega)$ 作用于 LTI 系统时,其所引起的响应 $Y(j\omega)$ 是同频率的虚指数函数,它可表示为

$$Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega)$$

系统的影响表现为系统的频率系统函数 $H(j\omega)$,它是信号角频率 ω 的函数,与时间 t 无关。由于这里用于系统分析的独立变量是频率(角频率),故称为频域分析。

频域分析法不但简化了对系统响应的求解,而且揭示了信号与系统的频域特性,使人们对信号与系统的性质有了更进一步的理解,为人们在频域上进行系统分析、设计开辟了另一途径。例如,音调的高低是声音信号频域特征的表露;图像明暗的对比度,色彩的丰富程度都是由其频域分量决定的。电视频道的划分取决于电视信号的频域特性,电子技术中广泛使用的各种滤波器,其描述和设计主要是在频域上进行的。

3.1 周期信号的傅里叶级数展开

由数学分析课程已知将任意一周周期信号在三角函数或复指数函数组成的完备正交函数集 $\{1, \cos\Omega t, \cos 2\Omega t, \dots, \sin\Omega t, \sin 2\Omega t, \dots\}$ 或 $\{e^{jn\Omega t}, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 内分解得到的级数,统称为**傅里叶级数**(Fourier series)。它们具有如下一些显著优点。

- ① 三角函数和指数函数是自然界中最常见、最基本的函数。
- ② 三角函数和复指数函数是简谐函数,用它们表示时间信号,自然地建立起了时间和频率这两个基本物理量之间的联系。
- ③ 简谐信号较其他信号更容易产生和处理。
- ④ 三角函数(或指数函数)信号通过线性时不变系统后,仍为三角函数(或指数函数),其重复频率不变,只是幅度和相位有变化。线性时不变系统对三角函数(或指数函数)信号的响应可以很方便地求得,只需求出幅度和相位。
- ⑤ 很多系统(例如滤波器、信息传输等)的特性主要是由其频域特性来描述的,因此常常需要知道的并不是这些系统的冲激响应,而是其冲激响应所对应的频率特性。

⑥ 以后会看到,时域中的卷积运算在频域会转化为乘积运算,从而找到计算卷积的一种新方法。这不但可使卷积运算简化或加快,而且使时域中难于实现的卷积运算便于求解。

3.1.1 三角形式的傅里叶级数

设 $f(t)$ 是任意实周期信号,其周期为 T ,则有

$$f(t) = f(t + kT) \quad (3-1)$$

式中, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 将 $f(t)$ 在区间 $(t_0, t_0 + T)$ (t_0 是任意常数) 按完备正交函数集 $\{1, \cos \Omega t, \cos 2\Omega t, \dots, \sin \Omega t, \sin 2\Omega t, \dots\}$ 进行分解,得

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\Omega t + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\Omega t \quad (3-2)$$

式中, $T=2\pi/\Omega$; a_n 是信号 $f(t)$ 在函数 $\cos n\Omega t$ 中的分量; b_n 是 $f(t)$ 在 $\sin n\Omega t$ 中的分量, a_n 和 b_n 分别为

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\Omega t dt \quad (3-3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\Omega t dt \quad (3-4)$$

以上两式适用于 $n=1, 2, \dots, +\infty$ 的情况。对于 $n=0$ 有

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (3-5)$$

式(3-5)表明,系数 $a_0/2$ 等于信号 $f(t)$ 在一个周期内的平均值。

为方便起见,积分区间 $t_0 \sim t_0 + T$, 通常取为 $0 \sim T$ 或 $-\frac{T}{2} \sim \frac{T}{2}$ 。

需要指出的是,并非所有周期信号都能进行傅里叶级数展开。周期函数 $f(t)$ 必须满足以下“狄利克雷(Dirichlet)条件”才可以展开:

- (1) 在一个周期内,如果有间断点存在,则间断点的数目应是有限个;
- (2) 在一个周期内,极大值和极小值的数目应是有限个;
- (3) 在一个周期内,信号是绝对可积的,即

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| dt$$

应为有限值。通常实际遇到的周期信号都能满足狄利克雷条件,因此,除了特殊需要,一般不再考虑这一条件。

式(3-2)中的各同频项可以合并,从而得到

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \quad (3-6)$$

式中

$$\begin{cases} A_0 = \frac{a_0}{2} \\ A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} \end{cases} \quad (3-7)$$

或

$$\begin{cases} a_n = A_n \cos \varphi_n \\ b_n = -A_n \sin \varphi_n \end{cases} \quad (3-8)$$

式(3-2)和式(3-6)称为三角函数形式的傅里叶级数, a_n 、 b_n 和 A 、 φ_n 称为傅里叶系数。周期信号可以展开为傅里叶级数, 说明周期为 T (相应的角频率 $\Omega = 2\pi/T$) 的信号是由若干周期分别为 T/n (角频率为 $n\Omega$) 的简谐信号加权求和组合而成的。其中, $n=1$ 的项 $A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1)$ 与原信号有相同的频率, 称为一次谐波分量或基波分量 (fundamental component), A_1 是基波分量的幅度, φ_1 是基波分量的相位, Ω 则称为基波角频率。 $n=2$ 的项 $A_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2)$, 其频率为基波频率的二倍, 故称为二次谐波分量 (second harmonic components), A_2 是二次谐波的幅度, φ_2 是二次谐波的相位。类似地, $A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$ 称为 n 次谐波分量, 其频率为基波频率的 n 倍, A_n 和 φ_n 分别是其幅度和相位。至于 $n=0$ 的项 A_0 , 从频域来看, 它是频率等于零的分量, 故称为零次谐波, 即直流分量 (direct component)。从时域看, 它是原信号在一个周期内的平均值, 故又称为平均分量。

例 3-1 把图 3-1 所示之周期矩形脉冲信号展开成三角函数形式的傅里叶级数。

解

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^\tau A dt = \frac{2A\tau}{T} \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\Omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^\tau A \cos n\Omega t dt \\ &= \frac{A\tau}{T} \frac{2}{n\Omega\tau} \sin n\Omega\tau \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\Omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^\tau A \sin n\Omega t dt \\ &= \frac{2A\tau}{T} \left(\frac{1 - \cos n\Omega\tau}{n\Omega\tau} \right) \end{aligned}$$

故周期矩形脉冲信号的三角函数形式的傅里叶级数为

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\Omega\tau}{n\Omega\tau} \cos n\Omega t + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos n\Omega\tau}{n\Omega\tau} \sin n\Omega t \right]$$

或写成另一种形式

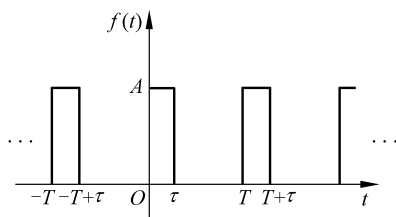


图 3-1 例 3-1 图

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{A\tau}{T}$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{2A\tau}{T} \frac{\sin n\Omega\tau/2}{n\Omega\tau/2} = \frac{2A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$

$$\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} = -\frac{n\Omega\tau}{2}$$

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}} \cos n\Omega \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{A\tau}{T} + \frac{2A\tau}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) \cos n\Omega \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \quad (3-9)$$



视频 3-1
方波分解

3.1.2 指数形式的傅里叶级数

将周期信号 $f(t) = f(t + kT)$ 在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 按完备正交函数集 $\{e^{jn\Omega t}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 展开, 得到 $f(t)$ 的指数形式傅里叶级数

$$f(t) = F_0 + F_1 e^{j\Omega t} + F_2 e^{j2\Omega t} + \dots + F_{-1} e^{-j\Omega t} + F_{-2} e^{-j2\Omega t} + \dots = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t} \quad (3-10)$$

其系数 F_n 也称为傅里叶系数, 是 $f(t)$ 在 $e^{jn\Omega t}$ 中的分量, 或 $f(t)$ 在 $e^{jn\Omega t}$ 上的投影, 其为复数。

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \quad (3-11)$$

式中, $T = 2\pi/\Omega$, t_0 可任意选择。例如, $t_0 = 0$, $t_0 = -\frac{T}{2}$ 等。

同一个周期信号 $f(t)$, 既可以展开成式(3-6)的三角型傅里叶级数式, 也可以展成式(3-10)的指数型傅里叶级数式, 二者之间存在着确定的关系。

因为

$$\cos n\Omega t = \frac{e^{jn\Omega t} + e^{-jn\Omega t}}{2}$$

$$\sin n\Omega t = \frac{e^{jn\Omega t} - e^{-jn\Omega t}}{2j}$$

代入式(3-6)得

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2} (e^{jn\Omega t} + e^{-jn\Omega t}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{2j} (e^{jn\Omega t} - e^{-jn\Omega t})$$

$$= \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\Omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} (a_n + jb_n) e^{-jn\Omega t}$$

由式(3-3)和式(3-4)可知, a_n 和 b_n 分别为变量 n 的偶函数和奇函数, 即

$$a_{-n} = a_n \quad b_{-n} = -b_n$$

所以, 上式又可为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\Omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} (a_{-n} + jb_{-n}) e^{jn\Omega t} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\Omega t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\Omega t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t} \end{aligned}$$

其中 $F_0 = \frac{a_0}{2} = A_0$

$$F_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) = \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3-12)$$

在周期信号展开式(3-10)中, $f(t)$ 表示成复频率为 $0, \pm\Omega, \pm 2\Omega, \pm 3\Omega, \dots$ 的指数函数之和。虽然由于引用 $-n$ 而出现了角频率 $-n\Omega$, 但这并不表示实际上存在负频率, 而只是将第 n 项谐波分量写成了两个指数项而出现的一种数学形式。事实上, $e^{jn\Omega t}$ 和 $e^{-jn\Omega t}$ 必然成对出现, 且都振荡在 $n\Omega$ 上, 它们的和给出了一个振荡频率为 $n\Omega$ 的时间实函数, 即

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n} e^{-jn\Omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{2} e^{-j\varphi_n} e^{-jn\Omega t} \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{2} [e^{j(n\Omega t + \varphi_n)} + e^{-j(n\Omega t + \varphi_n)}] \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \end{aligned} \quad (3-13)$$

利用式(3-12)中傅里叶级数系数的关系, 式(3-13)又可写为

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 |F_n| \cos(n\Omega t + \varphi_n) \quad (3-14)$$

由式可见, 三角型傅里叶级数和指数型傅里叶级数虽然形式不同, 但实际上它们都是属于同一类型的级数, 即都是将周期信号表示为直流分量和各次谐波分量之和。

此外还需指出, 傅里叶级数中的各项都是周期的无时限信号, 因此傅里叶级数所表

示的信号 $f(t)$ 只能是周期信号。反过来说,一个周期信号只要在一个周期之内将它展开为傅里叶级数,则此级数也就在 $(-\infty, +\infty)$ 的整个区间表示了这一周期信号。如果要用傅里叶级数来表示非周期信号,则级数只是在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 内与该非周期信号相等。也就是说,该级数实际上是这样一个周期信号的展开式,该周期信号的周期为 T ,且在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 内的值与原非周期信号相等。

例 3-2 把图 3-1 所示的周期矩形脉冲信号展开成指数形式的傅里叶级数。

解 例 3-1 已将图 3-1 所示周期矩形脉冲信号展开成三角函数形式的傅里叶级数。此例要求展开成指数形式,先求指数型傅里叶级数的系数

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\tau} A e^{-jn\Omega t} dt \\ &= \frac{A}{T} \frac{1}{jn\Omega} (1 - e^{-jn\Omega\tau}) \\ &= \frac{A}{T} \frac{2e^{-j\frac{n\Omega\tau}{2}}}{n\Omega} \left(e^{j\frac{n\Omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{n\Omega\tau}{2}} \right) \\ &= \frac{A\tau}{T} e^{-j\frac{n\Omega\tau}{2}} \frac{\sin \frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}} \\ &= \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) e^{-j\frac{n\Omega\tau}{2}} \end{aligned}$$

所以指数形式傅里叶级数为

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) e^{-j\frac{n\Omega\tau}{2}} e^{jn\Omega t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) e^{jn\Omega(t-\frac{\tau}{2})} \end{aligned}$$

请读者将结果与式(3-9)三角函数展开式比较,体会两者系数之间的关系。

3.1.3 周期信号的对称性与傅里叶系数的关系

把已知周期信号 $f(t)$ 展为傅里叶级数,如果 $f(t)$ 为实函数,且它的波形满足某种对称性,则在其傅里叶级数中有些项将不出现,留下的各项系数的表示式也变得比较简单。周期信号的对称关系主要有两种:一种是整个周期相对于纵坐标轴的对称关系,这取决于周期信号是偶函数还是奇函数,也就是展开式中是否含有正弦项或余弦项;另一种是整个周期前后的对称关系,这将决定傅里叶级数展开式中是否含有偶次项或奇次项。下面简单说明函数的对称性与傅里叶系数的关系。

1. 偶函数

若周期信号 $f(t)$ 波形相对于纵轴是对称的,即满足 $f(t) = f(-t)$,则 $f(t)$ 是偶函数(even function),其傅里叶级数展开式中只含直流分量和余弦分量,即

$$\begin{cases} b_n = 0 \\ a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\Omega t dt, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

2. 奇函数

若周期信号 $f(t)$ 波形关于原点对称,即满足 $f(t) = -f(-t)$,则 $f(t)$ 是奇函数(odd function),其傅里叶级数展开式中只含正弦分量,即

$$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\Omega t dt, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

3. 奇谐函数

若周期信号 $f(t)$ 波形沿时间轴平移半个周期后与原波形相对于时间轴镜象对称,即满足

$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$$

则 $f(t)$ 称为奇谐函数(odd harmonic function)或半波对称函数。这类函数的傅里叶级数展开式中只含有正弦项和余弦项的奇次谐波分量。图 3-2 给出了一个奇谐函数的波形。



视频 3-2

4. 偶谐函数

若周期信号 $f(t)$ 波形沿时间轴平移半个周期后与原波形完全重叠,即满足

$$f(t) = f\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$$

则 $f(t)$ 为偶谐函数(even harmonic function)或半周期重叠函数,其傅里叶级数展开式中只含有正弦项和余弦项的偶次谐波分量。图 3-3 给出了一个偶谐函数的波形。

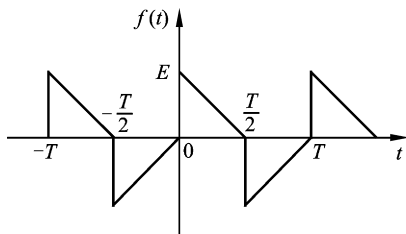


图 3-2 奇谐函数

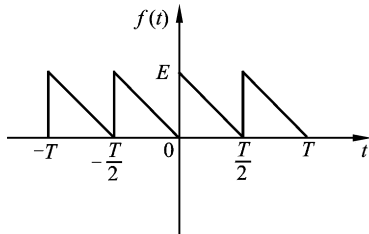


图 3-3 偶谐函数

熟悉并掌握了周期信号的奇、偶和奇谐、偶谐等性质后,对于一些波形所包含的谐波分量特点可以迅速作出判断,使傅里叶级数系数的计算得到一定简化。

3.1.4 指数形式傅里叶系数的性质

可以证明,在时域 $f(t)$ 经过某些变换,如折叠 $f(-t)$ 、时移 $f(t-t_0)$,或将 $f(t)$ 经过某些时域运算,如微分 $f'(t)$ 、调制计算 $f(t)\cos\Omega t$ 及 $f(t)\sin\Omega t$ 。若 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}$, 则其傅里叶指数形式的展开可通过如下性质计算,这些性质与后面要介绍的傅里叶变换的性质有许多相似之处。

$$\begin{aligned} (1) \quad f(-t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{-n} e^{jn\Omega t} \\ (2) \quad f(t-t_0) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{-jn\Omega t_0} e^{jn\Omega t} \\ (3) \quad \frac{df(t)}{dt} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jn\Omega F_n e^{jn\Omega t} \\ \frac{d^k f(t)}{dt^k} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (jn\Omega)^k F_n e^{jn\Omega t} \\ (4) \quad f(t)\cos\Omega t &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{F_{n-1} + F_{n+1}}{2} e^{jn\Omega t} \\ f(t)\sin\Omega t &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{F_{n-1} - F_{n+1}}{2j} e^{jn\Omega t} \end{aligned}$$

例 3-3 将图 3-4(a) 所示周期锯齿波信号 $f(t)$ 展开为指数型傅里叶级数。

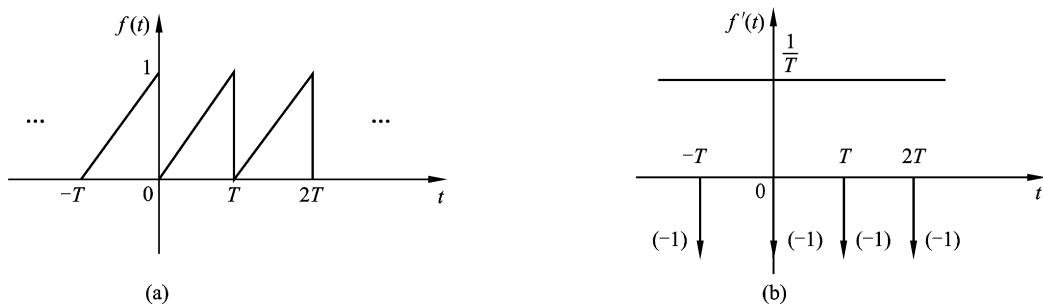


图 3-4 例 3-3 图

解 应用傅里叶级数的导数性质,对 $f(t)$ 求导数得 $f'(t)$,其波形如图 3-4(b) 所示,可表示为

$$f'(t) = \frac{1}{T} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

由傅里叶级数导数性质(3)有

$$\begin{aligned}
 (jn\Omega)F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{T} - \delta(t) \right] e^{-jn\Omega t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \left[\frac{\sin n\pi}{n\pi} - 1 \right] \\
 &= \frac{1}{T} [\text{Sa}(n\pi) - 1]
 \end{aligned}$$

当 $n \neq 0$ 时

$$jn\Omega F_n = -\frac{1}{T}$$

所以

$$F_n = -\frac{1}{jn\Omega T} = j \frac{1}{2n\pi}$$

当 $n=0$ 时

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0.5$$

故得

$$f(t) = 0.5 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} j \frac{1}{2n\pi} e^{jn\Omega t}$$

讨论 ① 该例也可对 $f'(t)$ 再求一次导数得 $f''(t)$, 应用傅里叶级数二阶导数性质计算, 步骤类似。

② 周期信号的三角型傅里叶级数可以通过定义依次求傅里叶级数系数而得到, 也可从指数型傅里叶级数转换而得到。如该题

$$f(t) = 0.5 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi} \sin n\Omega t$$

3.2 周期信号的频谱

3.2.1 周期信号的频谱

如前所述, 周期信号可以分解成一系列正弦信号或虚指数信号之和, 即

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \quad (3-15)$$

或

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t} \quad (3-16)$$

其中, $F_n = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} = |F_n| e^{j\varphi_n}$ 。为了直观地表示信号所含各分量的振幅, 以频率(或角频率 $\omega = n\Omega$) 为横坐标, 以各谐波的振幅 A_n 或虚指数函数的幅度 $|F_n|$ 为纵坐标, 画出如

图 3-5(a)、(b)所示的线图,称为**幅度频谱**(amplitude spectrum),简称**幅度谱**。图中每条竖线代表该频率分量的幅度,称为**谱线**。连接各谱线顶点的曲线(图中虚线所示)称为**包络线**,它反映了各分量幅度随频率变化的情况。需要说明的是,图 3-5(a)中,信号分解为各余弦分量,图中的每一条谱线表示该次谐波的振幅(称为**单边幅度谱**),而在图 3-5(b)中,信号分解为各虚指数函数分量,图中的每一条谱线表示各分量的幅度(称为**双边幅度谱**), $|F_n| = |F_{-n}| = \frac{1}{2}A_n$ 。

类似地,也可画出各谐波初相角与频率(或角频率)的线图,如图 3-5(c)、(d)所示,称为**相位频谱**(phase spectrum),简称**相位谱**。如果 F_n 为实数,那么相位频谱可用 F_n 的正负来表示, φ_n 为 0 或 π ,这时常把幅度谱和相位谱画在一张图上(可参看图 3-7)。

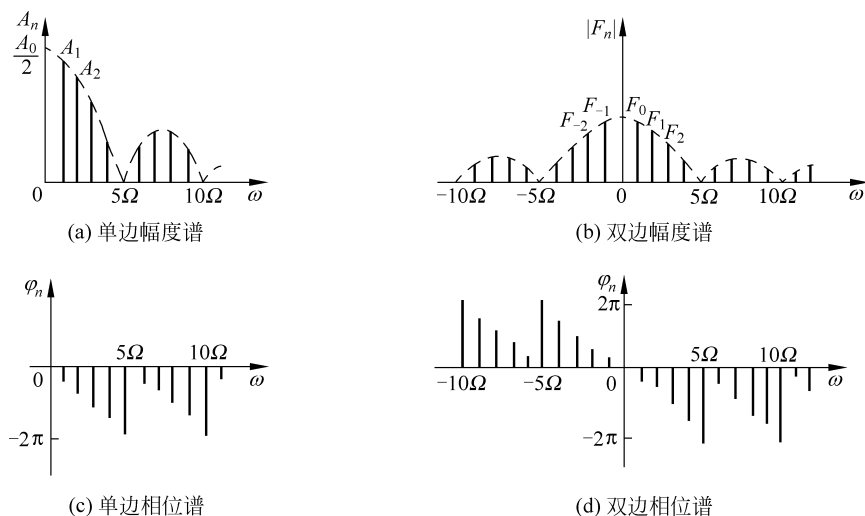


图 3-5 周期信号的图谱

3.2.2 周期矩形脉冲信号的频谱

设例 3-1 中的周期矩形脉冲信号的幅度为 1,脉冲宽度为 τ ,其周期为 T ,如图 3-6 所示。

根据式(3-11),可以求得其傅里叶系数

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \left. \frac{e^{-jn\Omega t}}{-jn\Omega} \right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\
 &= \frac{2}{T} \frac{\sin \frac{n\Omega\tau}{2}}{n\Omega} = \frac{\tau}{T} \frac{\sin \frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}}, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3-17)
 \end{aligned}$$

考虑到 $\Omega = 2\pi/T$,上式也可以写为



视频 3-3 周期
信号频谱分析
(Multisim) 仿真
实验

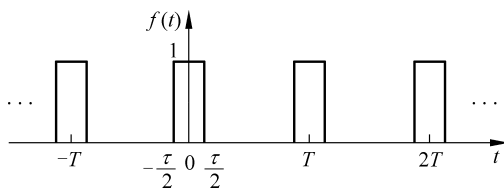


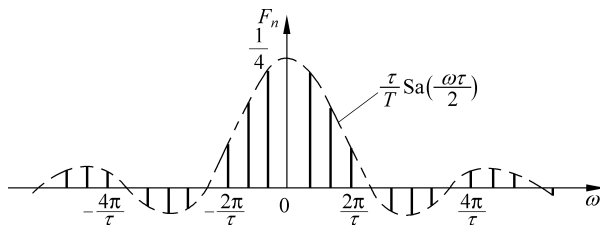
图 3-6 周期矩形脉冲信号

$$F_n = \frac{\tau}{T} \frac{\sin \frac{n\pi\tau}{T}}{\frac{n\pi\tau}{T}} = \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) = \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3-18)$$

故该周期矩形脉冲信号的指数型傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t} = \frac{\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \cdot e^{jn\Omega t} \quad (3-19)$$

图 3-7 中画出了 $T=4\tau$ 的周期矩形脉冲信号的频谱, 由于本例中的 F_n 为实数, 其相位为 0 或 π , 故不另外画出其相位谱。

图 3-7 周期矩形脉冲的频谱 ($T=4\tau$)

由上可见, 周期矩形脉冲信号的频谱具有一般周期信号频谱的共同特点, 它们的频谱是离散的, 仅含有 $\omega = n\Omega$ 的各分量, 其相邻两谱线的间隔是 Ω ($\Omega = 2\pi/T$), 脉冲周期 T 越长, 谱线间隔越小, 频谱越稠密; 反之, 则越稀疏。

对于上面的周期矩形脉冲信号而言, 其各谱线的幅度按包络线 $\frac{\text{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})}{4}$ 的规律变化。在 $\omega\tau/2 = m\pi$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) 各处, 即 $\omega = 2m\pi/\tau$ 的各处, 包络为零, 其相应的谱线, 亦即相应的频率分量等于零, 将 $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ 代入得

$$n\Omega = 2m\pi/\tau, \quad n = m \frac{T}{\tau} \quad (3-20)$$

当 $m=1$ 时, 第 1 个零分量处, $n = \frac{T}{\tau}$ 。对于图 3-7, $n=4$, 即第 4 根谱线处, 此时

$$\omega = 4\Omega = \frac{8\pi}{T} = \frac{2\pi}{\tau}$$

周期矩形脉冲信号包含无限多条谱线, 也就是说, 它可分解为无限多个频率分量。

实际上,由于各分量的幅度随频率增高而减小,其信号能量主要集中在第一个零点($\omega=2\pi/\tau$ 或 $f=1/\tau$)以内。在允许一定失真的条件下,只需传送频率较低的那些分量就够了。通常把 $0\leq f\leq 1/\tau$ (或 $0\leq \omega\leq 2\pi/\tau$) 这段频率范围(第一个零分量频率)称为周期矩形脉冲信号的**有效频带宽度**(effective frequency band width)或信号的占有频带,用符号 B_f (单位为 Hz) 或 B_w (单位为 rad/s) 表示。对图 3-6 所示的周期矩形脉冲信号则有

$$B_f = \frac{1}{\tau} \quad \text{或} \quad B_w = \frac{2\pi}{\tau}$$

信号的有效频带宽度与信号时域的持续时间 τ 成反比,即 τ 越大,其 B_f 越小;反之, τ 越小,其 B_f 越大。

对于不同的矩形周期脉冲,有效频带宽度不一定是 $\frac{2\pi}{\tau}$,要满足式(3-20)中 n 和 m 为整数。如果某矩形周期脉冲宽度 $\tau=2$,周期 $T=3$,则频谱包络线第一个过零处($n=\frac{T}{\tau}=1.5$)是没有谱线的,即没有零分量。此时再取第二个过零处, $m=2, n=m\frac{T}{\tau}=3$ 为整数,故有效频带宽度为

$$B_w = 3\Omega = \frac{6\pi}{T} = 2\pi = m\pi$$

所以,有效频带宽度以保证 n 为整数的最小 $m_{\min}$ 值来计算,则有

$$B_w = m_{\min}\pi \quad (3-21)$$

信号的有效频带宽度,简称**带宽**(bandwidth)是信号频率特性中的重要指标,具有实际应用意义。在信号的有效带宽内,集中了信号的绝大部分谐波分量。换句话说,若信号丢失有效带宽以外的谱波分量成分,不会对信号产生明显的影响。同样,系统也设有其有效带宽。当信号通过系统时,信号与系统的有效带宽必须“匹配”。若信号的有效带宽大于系统的有效带宽,信号通过系统时,就会损失许多重要成分而产生较大失真;若信号的有效带宽远小于系统的带宽,信号可以顺利通过系统,但对系统资源是巨大浪费。

图 3-8 画出了周期相同,脉冲宽度不同的信号及其频谱。由图可见,由于周期相同,因而相邻谱线的间隔相同;脉冲宽度愈窄,其频谱包络线第一个零点的频率愈高,即信号的有效频谱宽度愈宽,频带内所含的分量愈多。即信号的频带宽度与脉冲宽度成反比。由式(3-18)可见,当信号周期不变而脉冲宽度减小时,频谱的幅度会相应减小。

图 3-9 画出了脉冲宽度相同而周期不同的信号及其频谱。由图可见,这时频谱包络线的零点所在位置不变,而当周期增大时,相邻谱线的间隔减小,频谱变密。如果周期无限增大(这时就成为非周期信号),那么相邻谱线的间隔将趋近于零,周期信号的**离散频谱**(discrete frequency spectrum)就过渡到非周期信号的**连续频谱**(continuous frequency spectrum)。由式(3-18)可知,随着周期的增大,各谐波分量的幅度也相应减小。图 3-9 为示意图,未按严格比例画出。

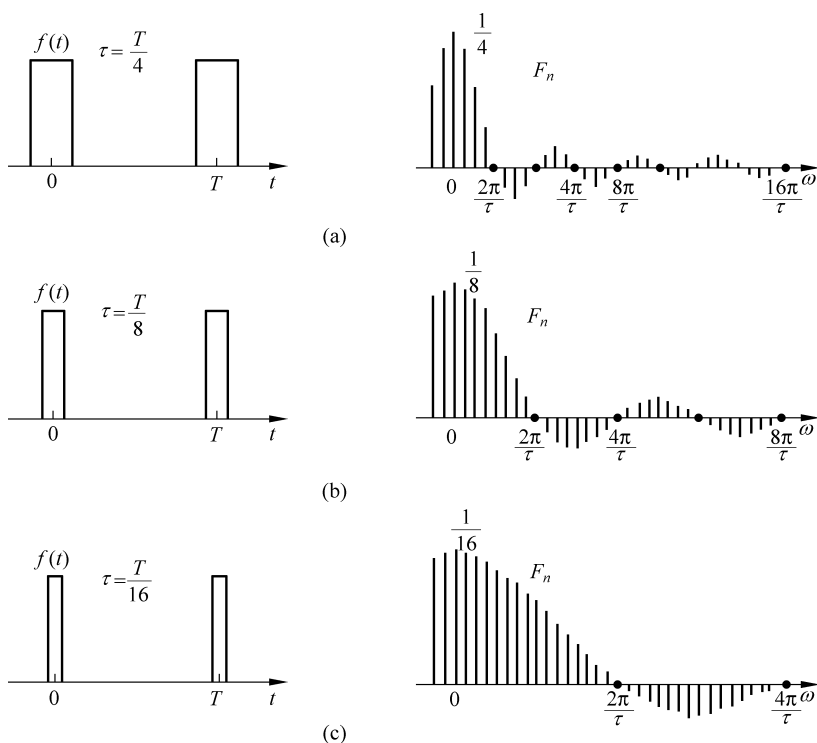


图 3-8 脉冲宽度与频谱的关系

3.2.3 周期信号频谱的特点

图 3-8 和图 3-9 反映了周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 频谱的一些性质,实际上它也反映了所有周期信号频谱的普遍性质,这就是:

(1) 离散性。频谱由频率离散而不连续的谱线组成,这种频谱称为离散频谱或线谱。

(2) 谐波性。各次谐波分量的频率都是基波频率 $\Omega = 2\pi/T$ 的整数倍,而且相邻谐波的频率间隔是均匀的,即谱线在频率轴上的位置是 Ω 的整数倍。

(3) 收敛性。谱线幅度随 $n\Omega \rightarrow +\infty$ 而衰减到零,频谱具有收敛性或衰减性。



视频 3-4 周期
与频谱的关系

3.2.4 周期信号的功率谱

周期信号属于功率信号,周期信号 $f(t)$ 的平均功率可定义为在 $1\ \Omega$ 电阻上消耗的平均功率,即

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \quad (3-22)$$

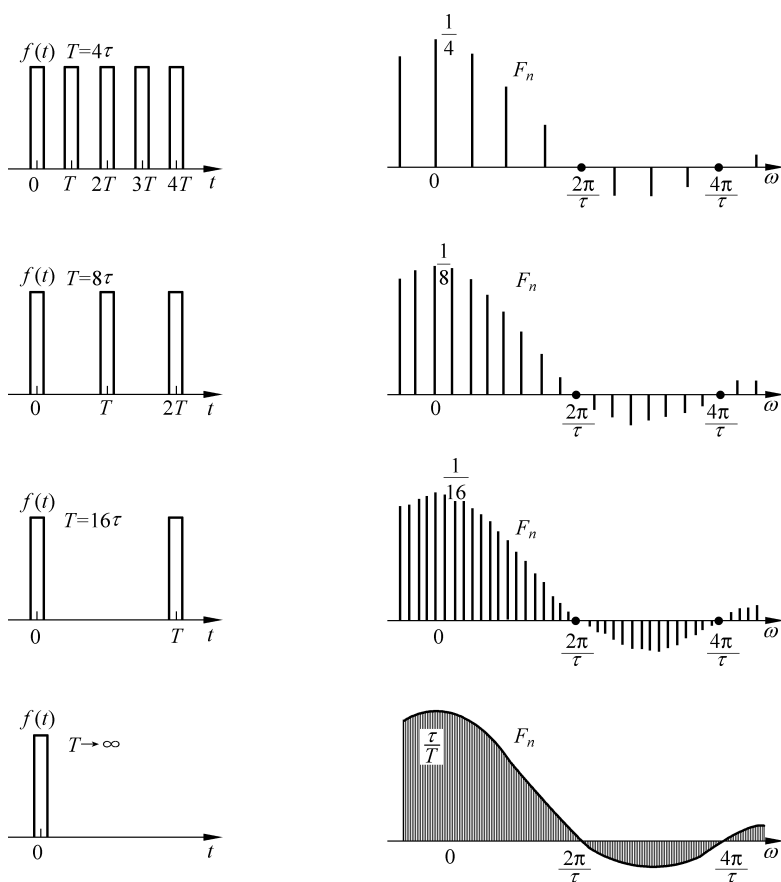


图 3-9 周期与频谱的关系

周期信号 $f(t)$ 的平均功率可以用式(3-22)在时域进行计算,也可以在频域进行计算。实函数 $f(t)$ 的指数型傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

将此式代入式(3-22),并利用 F_n 的有关性质,可得

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2 \quad (3-23)$$

该式称为**帕塞瓦尔(Parseval)定理**。它表明周期信号在时域的平均功率完全可以在频域用 F_n 加以确定,周期信号在时域的平均功率等于频域中的直流功率分量和各次谐波平均功率分量之和。 $|F_n|^2$ 与 $n\Omega$ 的关系称为周期信号的**功率频谱**,简称为**功率谱**(power spectrum)。显然,周期信号的功率谱也是离散谱。

例 3-4 试计算图 3-10(a)所示信号 $f(t)$ 在有效谱宽度内,谐波分量所具有的平均功率占整个信号平均功率的百分比。

解 由例 3-10(a)图可求得信号 $f(t)$ 的功率

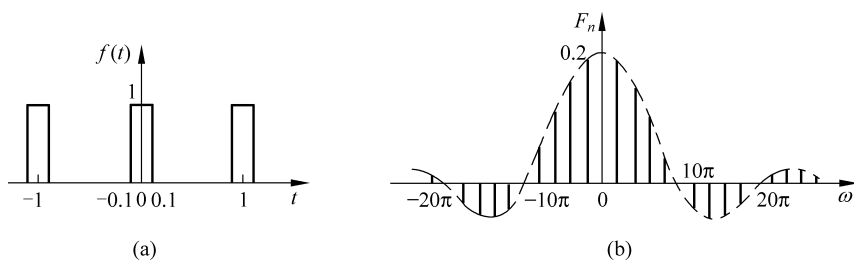


图 3-10 例 3-4 图

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{1}{1} \int_{-0.1}^{0.1} 1^2 dt = 0.2$$

将 $f(t)$ 展开为指数型傅里叶级数,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

由式(3-18)知,其傅里叶系数

$$F_n = \frac{\tau}{T} \text{Sa} \frac{n\pi\tau}{T} = 0.2 \text{Sa}(0.2n\pi)$$

其频谱如图 3-10(b)所示,频谱的第一个零点在 $n=5$,此时

$$\omega = 5\Omega = 10\pi/T = 10\pi \text{ rad/s}$$

根据式(3-23),在有效频谱宽度内信号的平均功率为

$$P_B = |F_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^5 |F_n|^2$$

将 $|F_n|$ 代入,得

$$\begin{aligned} P_B &= (0.2)^2 + 2 \times (0.2)^2 \times [\text{Sa}^2(0.2\pi) + \text{Sa}^2(0.4\pi) + \text{Sa}^2(0.6\pi) + \text{Sa}^2(0.8\pi) \\ &\quad + \text{Sa}^2(\pi)] = 0.04 + 0.08 \times (0.8751 + 0.5728 + 0.2546 + 0.0547 + 0) \\ &= 0.1806 \end{aligned}$$

故

$$\frac{P_B}{P} = \frac{0.1806}{0.2} = 90.3\%$$

从上式可以看出,对于所给出的周期矩形脉冲,包含在有效频谱宽度内的信号平均功率约占整个信号平均功率的 90%。

3.3 非周期信号的频谱——傅里叶变换

除周期信号外,自然界和各种工程技术领域中还广泛地存在着非周期信号。例如,放射线的强度随时间的衰变呈指数规律,振荡器的频率漂移几乎随时间线性增长,汽车点火装置产生的电火花呈脉冲性,人们天天与之打交道的语音呈非周期性等。这些非周期信号能否分解为三角函数或复指数函数这样的周期函数? 应该怎样进行这种分解? 这些就是本节所要讨论的问题。事实上,傅里叶本人在提出他的著名论断“周期信号可表示为成谐波关系的三角函数之加权



视频 3-5
傅里叶变换

和”以后,就曾致力于非周期信号的分解。

3.3.1 从傅里叶级数到傅里叶变换

实际上,非周期信号可以看成是周期趋于无穷大的周期信号。设 $f_T(t)$ 是周期为 T 的周期信号,其每一个周期内的波形都相同,设为 $f(t)$,如图 3-11 所示,可以看出

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - kT) \\ f(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) \end{aligned} \quad (3-24)$$

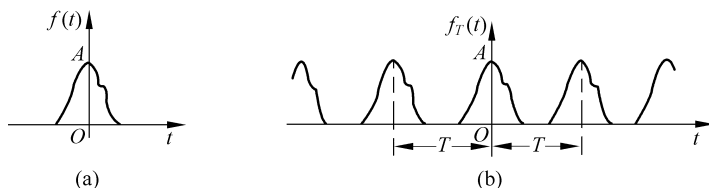


图 3-11 $f(t)$ 和 $f_T(t)$ 的波形

对于周期信号 $f_T(t)$,它可以表示为

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t} \quad (3-25)$$

式中

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\Omega t} dt \quad (3-26)$$

将式(3-26)代入式(3-25)中,得

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\Omega t} dt \right] e^{jn\Omega t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\Omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\Omega t} dt \right] e^{jn\Omega t} \end{aligned} \quad (3-27)$$

当 $T \rightarrow +\infty$ 时,显然有 $\Omega = 2\pi/T \rightarrow d\omega$,即相邻两谱线间的间隔趋于无穷小; $n\Omega \rightarrow \omega$,即离散变量 $n\Omega$ 趋于连续变量 ω ; $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$,即求和趋于积分;再考虑式(3-24),于是式(3-27)将变为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (3-28)$$

上式方括号中的部分是参变量 ω 的函数,记为 $F(j\omega)$,即

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-29)$$

代回式(3-28),得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-30)$$

这就是著名的傅里叶变换(Fourier transform)。它说明非周期信号也可以分解为简谐函数的加权叠加(积分也是一种叠加形式),只不过不再是成谐波关系的简谐函数,而是角频率连续变化的无穷多个简谐函数的叠加。式(3-29)和式(3-30)组成一对互逆的积分变换,其中式(3-29)称为傅里叶正变换(FT),记为 $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$,求得的 $F(j\omega)$ 称为 $f(t)$ 的频谱密度函数(frequency spectrum density function)或简称为频谱函数;式(3-30)称为傅里叶反变换(IFT),记为 $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$, $f(t)$ 称为频谱函数 $F(j\omega)$ 的原函数。式(3-29)及式(3-30)也可简称为傅里叶变换及反变换,文献中常将两式合并,用双箭头表示 $f(t)$ 和 $F(j\omega)$ 的变换对应关系,记成

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) \quad (3-31)$$

傅里叶变换从傅里叶级数推导而来,傅里叶变换的存在同样要满足狄利克雷条件。

3.3.2 非周期信号的频谱函数

由非周期信号的傅里叶变换可知

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

此式表明,非周期信号 $f(t)$ 可以由无数个指数函数 $e^{j\omega t}$ 之和来表示,每个指数函数分量的大小为 $F(j\omega) d\omega$,这是一个无穷小量, $F(j\omega)$ 是相对量。由式(3-26)和式(3-29)比较中知 $F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{2\pi F_n}{\Omega}$, $F(j\omega)$ 为单位频率的振幅,是一个密度的概念,因而称其为频谱密度函数,简称为频谱函数。频谱函数 $F(j\omega)$ 一般是复函数,可记为

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

式中, $|F(j\omega)|$ 为 $F(j\omega)$ 的模,它代表信号 $f(t)$ 中各频率分量的相对大小; $\varphi(\omega)$ 为 $F(j\omega)$ 的相位,它代表各频率分量的相位。与周期信号的频谱相对应,习惯上将 $|F(j\omega)|$ 与 ω 的关系曲线称为非周期信号的幅度(频)谱($|F(j\omega)|$ 并不是振幅!),而将 $\varphi(\omega)$ 与 ω 曲线称为相位(频)谱。它们都是 ω 的连续函数。

当 $f(t)$ 为实函数时,根据频谱函数的定义式不难导出

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \\ &= R(\omega) + jX(\omega) \\ \text{式中} \quad &\begin{cases} R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \\ X(\omega) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \end{cases} \end{aligned} \quad (3-32)$$

从而有

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

与周期信号的傅里叶级数相类似, $|F(j\omega)|$ 、 $\varphi(\omega)$ 与 $R(\omega)$ 、 $X(\omega)$ 相互之间存在下列关系

$$\begin{cases} |F(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) = \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \\ R(\omega) = |F(j\omega)| \cos\varphi(\omega) \\ X(\omega) = |F(j\omega)| \sin\varphi(\omega) \end{cases} \quad (3-33)$$

不难得到, $|F(j\omega)|$ 、 $R(\omega)$ 为 ω 的偶函数, 而 $\varphi(\omega)$ 、 $X(\omega)$ 为 ω 的奇函数, 即

$$\begin{cases} |F(j\omega)| = |F(-j\omega)| \\ \varphi(\omega) = -\varphi(-\omega) \\ R(\omega) = R(-\omega) \\ X(\omega) = -X(-\omega) \end{cases} \quad (3-34)$$

当 $f(t)$ 是实函数时, 由上述关系式还可得到以下的重要结论:

(1) 若 $f(t)$ 为 t 的偶函数, 即 $f(t) = f(-t)$, 则 $f(t)$ 的频谱函数 $F(j\omega)$ 为 ω 的实函数, 且为 ω 的偶函数。

(2) 若 $f(t)$ 为 t 的奇函数, 即 $f(t) = -f(-t)$, 则 $f(t)$ 的频谱函数 $F(j\omega)$ 为 ω 的虚函数, 且为 ω 的奇函数。

与周期信号类似, 也可将非周期信号的傅里叶变换表示式改写成三角函数的形式, 即

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)| e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)| \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega \end{aligned}$$

若 $f(t)$ 是实函数, 据 $|F(j\omega)|$ 、 $\varphi(\omega)$ 的奇偶性, 显然有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |F(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$$

可见, 非周期信号也可以分解成许多不同频率的正弦分量。与周期信号相比较, 只不过其基波频率趋于无穷小量, 从而包含了所有的频率分量; 各个正弦分量的振幅 $|F(j\omega)| d\omega/\pi$ 趋于无穷小, 从而只能用密度函数 $|F(j\omega)|$ 来表述各分量的相对大小。

3.3.3 典型信号的傅里叶变换

在第1章1.2节中介绍了一些基本信号, 先对其中一些基本信号进行傅里叶变换的求解, 再借助傅里叶变换的性质, 就可进行复杂信号的傅里叶变换。但有些信号, 如直流信号、单位阶跃信号 $\epsilon(t)$ 、符号函数 $\text{sgn}(t)$, 它们不满足在整个时间内绝对可积的条件, 直接应用定义求解傅里叶变换困难, 引入冲激函数可使其有相应的变换。

1. 单位冲激信号 $\delta(t)$

将 $\delta(t)$ 代入式(3-29), 并利用冲激函数的抽样性质, 有

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (3-35)$$

可见,单位冲激信号 $\delta(t)$ 的频谱是常数 1。也就是说, $\delta(t)$ 中包含了所有的频率分量,而各频率分量的频谱密度都相等。显然,信号 $\delta(t)$ 物理上是无法实现的。 $\delta(t)$ 的幅度频谱如图 3-12(b) 所示。

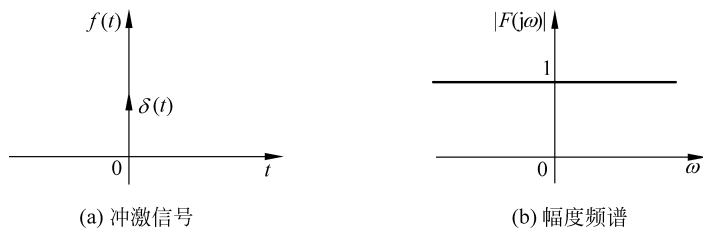


图 3-12 冲激信号及其幅度频谱

2. 单边指数信号

单边指数信号可表示为 $f(t) = e^{-at} \epsilon(t)$, ($a > 0$), 如图 3-13(a) 所示。

将 $f(t)$ 代入式(3-29), 得其频谱函数为

$$\begin{aligned}
 F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{-j\arctan \frac{\omega}{a}}
 \end{aligned} \quad (3-36)$$

其幅度频谱及相位频谱分别为

$$\begin{aligned}
 |F(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \\
 \varphi(\omega) &= -\arctan \frac{\omega}{a}
 \end{aligned}$$

单边指数信号和它的幅度频谱、相位频谱分别示于图 3-13 所示。

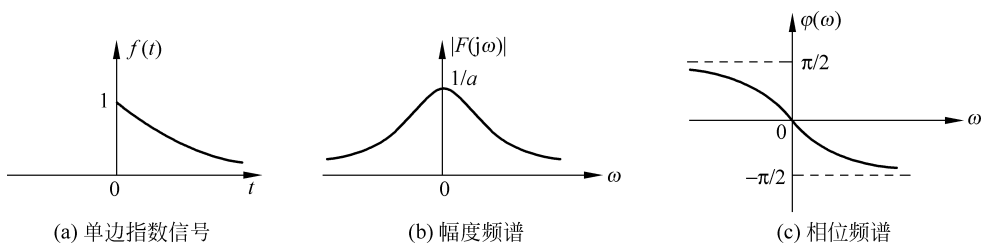


图 3-13 单边指数信号及其幅度、相位频谱

3. 单位阶跃信号 $\epsilon(t)$

单位阶跃信号 $\epsilon(t)$ 显然不满足绝对可积条件, 直接利用傅里叶变换的定义式无法求得所需结果。由于阶跃信号 $\epsilon(t)$ 可从图 3-13(a) 所示单边指数信号取 $a \rightarrow 0$ 的极限得到, 因而通过对单边指数信号的频谱函数求 $a \rightarrow 0$ 的极限可以得到 $\epsilon(t)$ 的频谱函数。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\varepsilon(t)] &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

上式中

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0, & \omega \neq 0 \\ +\infty, & \omega = 0 \end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} d\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \arctan \frac{\omega}{\alpha} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

根据冲激函数定义

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \pi \delta(\omega)$$

又

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega}$$

故有

$$\mathcal{F}[\varepsilon(t)] = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (3-37)$$

单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 的幅度频谱示于图 3-14(b)。

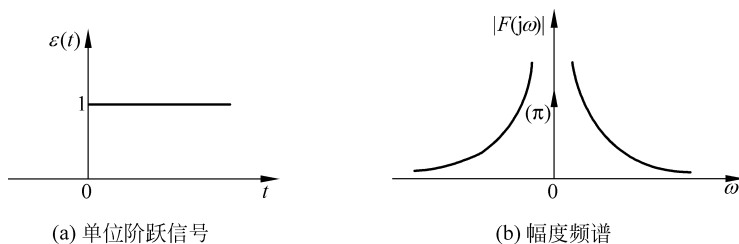


图 3-14 单位阶跃信号及其幅度频谱

4. 偶双边指数信号

偶双边指数信号如图 3-15(a)所示,可表示为

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0, \alpha > 0 \\ e^{\alpha t}, & t < 0, \alpha > 0 \end{cases}$$

将 $f(t)$ 代入式(3-29),可得其频谱函数为

$$\begin{aligned}F(j\omega) &= \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}\end{aligned} \quad (3-38)$$

由于 $f(t)$ 是 t 的偶函数, 所以 $F(j\omega)$ 为 ω 的实函数且为 ω 的偶函数。 $f(t)$ 的幅度频谱如图 3-15(b) 所示。

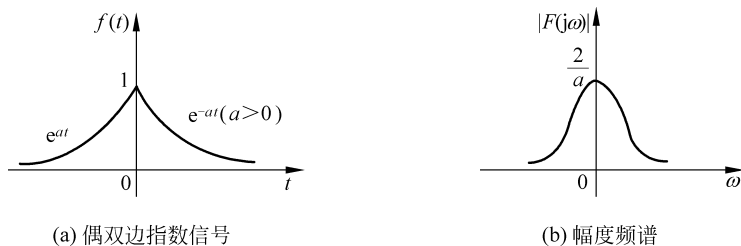


图 3-15 偶双边指数信号及其频谱

5. 单位直流信号

单位直流信号可表示为

$$f(t) = 1, \quad -\infty < t < +\infty$$

可见该信号也不满足绝对可积条件, 由于直流信号 1 为偶双边指数信号取 $a \rightarrow 0$ 的极限, 因此可用偶双边指数信号的频谱取 $a \rightarrow 0$ 的极限来求得其傅里叶变换, 即

$$F(j\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0, & \omega \neq 0 \\ +\infty, & \omega = 0 \end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} d\omega = 2\pi$$

显然, 这表明其频谱函数为一个冲激强度为 2π , 出现在 $\omega = 0$ 的冲激函数, 即

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (3-39)$$

其波形和幅度频谱如图 3-16 所示。

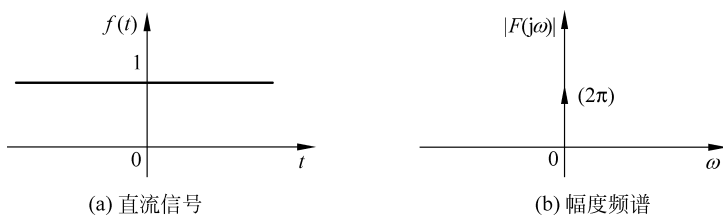


图 3-16 直流信号及其幅度频谱

6. 奇双边指数信号

奇双边指数信号可表示为

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0, a > 0 \\ -e^{at}, & t < 0, a > 0 \end{cases}$$

其频谱函数

$$\begin{aligned}
 F(j\omega) &= \int_{-\infty}^0 -e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\
 &= -\frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = j \frac{-2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}
 \end{aligned} \quad (3-40)$$

频谱函数的幅度谱和相位谱分别表示为

$$\begin{aligned}
 |F(j\omega)| &= \frac{2|\omega|}{\alpha^2 + \omega^2} \\
 \varphi(\omega) &= \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

奇双边指数信号的波形和幅度频谱如图 3-17 所示。

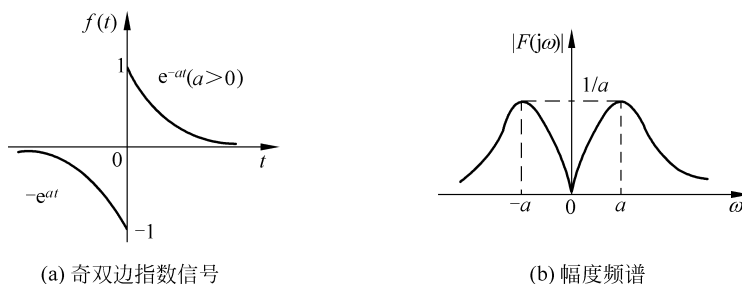


图 3-17 奇双边指数信号及其幅度频谱

7. 符号函数信号

符号函数信号或正负号函数信号以 $\text{sgn}(t)$ 记,如图 3-18(a)所示,其表示式为

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

显然,这种信号不满足绝对可积条件,但它存在傅里叶变换。对于奇双边指数信号

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0, \alpha > 0 \\ -e^{at}, & t < 0, \alpha > 0 \end{cases}$$

当 $\alpha \rightarrow 0$ 时,其极限为符号函数信号 $\text{sgn}(t)$ 。因此可以用求 $f(t)$ 的频谱函数 $F(j\omega)$ 取 $\alpha \rightarrow 0$ 极限的方法来求 $\text{sgn}(t)$ 的频谱函数。符号函数信号的频谱函数为

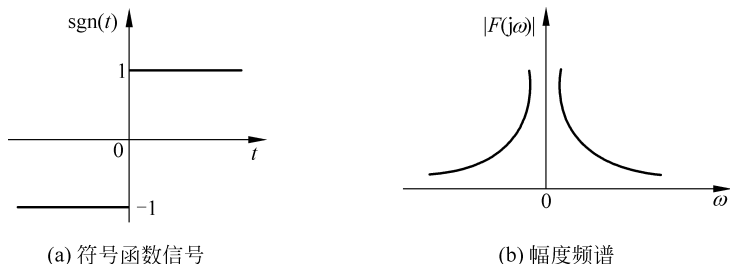


图 3-18 符号函数信号及其幅度频谱

$$\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-j \frac{2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right) = \frac{2}{j\omega}, \quad \omega \neq 0 \quad (3-41)$$

其幅度频谱如图 3-18(b)。

8. 矩形脉冲信号 $G_\tau(t)$

一般也称门信号, $G_\tau(t)$ 可表示为

$$G_\tau(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

由式(3-29), 可得

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}}{-j\omega} = \frac{2\sin\omega\tau/2}{\omega} = \tau \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned} \quad (3-42)$$

并有

$$|F(j\omega)| = \tau \left| \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right| \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) > 0 \\ \pi, & \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

门信号 $G_\tau(t)$ 的波形如图 3-19(a)、频谱如图 3-19(b)所示, 图 3-19(c)为它的幅度频谱, 图 3-19(d)为它的相位频谱。可以看出, 门信号存在于时域中有限范围, 其频谱却以 $\operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ 规律变化, 分布于无限宽的频率范围内, 其主要能量处于 $0 \sim \frac{2\pi}{\tau}$ 范围。

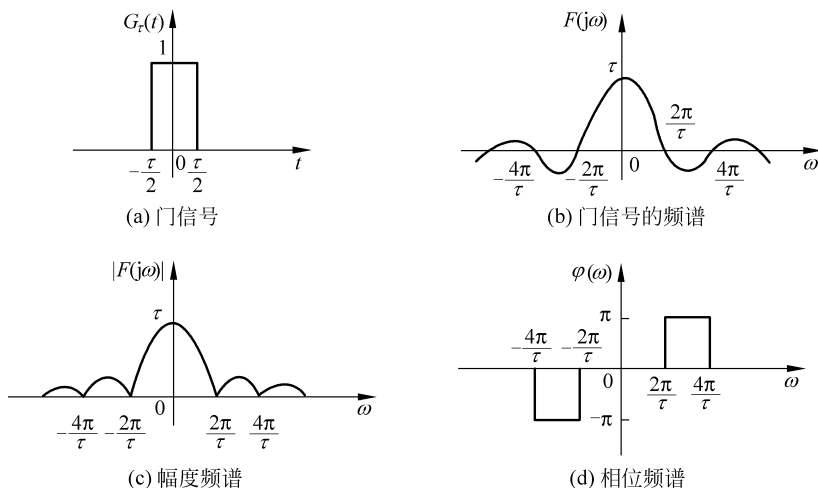


图 3-19 门信号及其频谱

熟悉上述典型信号的频谱函数,利用傅里叶变换性质可以方便求得其他信号的频谱,将对进一步掌握信号与系统的频域分析带来很大的方便。为便于查找,表 3-1 给出了部分常用信号的傅里叶变换对。

表 3-1 常用傅里叶变换对

$f(t)$		$F(j\omega)$	
$G_{\tau}(t)$		$\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$	
$\tau \text{Sa}\left(\frac{\tau t}{2}\right)$	$\text{Sa}(t), \tau=2$	$2\pi G_{\tau}(\omega)$	$\pi G_2(\omega)$
$e^{-\alpha t} \varepsilon(t), \alpha > 0$		$\frac{1}{\alpha + j\omega}$	
$t e^{-\alpha t} \varepsilon(t), \alpha > 0$		$\frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$	
$e^{-\alpha t }, \alpha > 0$		$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$	
$\delta(t)$		1	
1		$2\pi\delta(\omega)$	
$\delta(t-t_0)$		$e^{-j\omega t_0}$	
$\cos\omega_0 t$		$\pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$	
$\sin\omega_0 t$		$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)]$	
$\varepsilon(t)$		$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	
$\text{sgn}(t)$		$\frac{2}{j\omega}, F(0)=0$	
$\frac{1}{\pi t}$		$-j\text{sgn}(\omega)$	
$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$		$\Omega\delta_{\Omega}(\omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-n\Omega), \Omega = \frac{2\pi}{T}$	
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}$		$2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega-n\Omega)$	
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} \varepsilon(t), \alpha > 0$		$\frac{1}{(\alpha + j\omega)^n}$	

3.4 傅里叶变换的基本性质

通过傅里叶变换,一个时间函数 $f(t)$ 可以用其唯一对应的频谱密度函数 $F(j\omega)$ 来表示,反之亦然。这样就建立起了信号的时域和频域之间的联系。为了更进一步了解时域

和频域之间的内在联系,简化变换的运算,便于傅里叶分析的应用,这一节将系统地讨论傅里叶变换的性质及有关定理,研究信号在一个域中进行运算或变化时,会在另一个域中引起的相应变化。

1. 线性

若 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega)$

则 $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \longleftrightarrow a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)$ (3-43)

式中, a_1, a_2 为任意常数。这个式子说明,傅里叶变换是一种线性变换,它满足齐次性和叠加性。式(3-43)可由正反傅里叶变换的定义方便地证明,请读者自行完成。

例如,可以利用傅里叶变换的线性性质求单位阶跃信号的频谱函数 $F(j\omega)$,单位阶跃信号可表示为

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

$$\text{由于} \quad \frac{1}{2} \longleftrightarrow \pi \delta(\omega), \quad \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega}$$

$$\text{所以} \quad \varepsilon(t) \longleftrightarrow \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

2. 对称性

若 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

则 $F(jt) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ (3-44)

上式表明,如果函数 $f(t)$ 的频谱函数为 $F(j\omega)$,那么时间函数 $F(jt)$ 的频谱函数是 $2\pi f(-\omega)$ 。这称为傅里叶变换的对称性。这里的对称是运算法则的对称,即时域以“ f ”规律变化信号,其频域以“ F ”规律变化;时域以“ F ”规律变化的函数,在频域以“ f ”规律变化, 2π 只影响其幅度, $(-\omega)$ 表示折叠,证明如下:

傅里叶反变换式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

将上式中的自变量 t 换为 $-t$,得

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

将上式中的 t 换为 ω ,将原有的 ω 换为 t ,得

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(jt) e^{-j\omega t} dt$$

或

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(jt) e^{-j\omega t} dt$$

上式表明,时间函数 $F(jt)$ 的傅里叶变换为 $2\pi f(-\omega)$,即式(3-44)成立。

如果 $f(t)$ 是 t 的实偶函数,则其频谱函数是 ω 的实偶函数。即

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) = R(\omega)$$

考虑到 $f(-\omega) = f(\omega)$, 式(3-44)则变为

$$R(t) \longleftrightarrow 2\pi f(\omega) \quad \text{或} \quad \frac{1}{2\pi} R(t) \longleftrightarrow f(\omega)$$

这就是说, 如果偶函数 $f(t)$ 的频谱函数是 $R(\omega)$, 则与 $R(\omega)$ 形式相同的时间函数 $R(t)$ 的频谱函数与 $f(t)$ 有相同的形式, 为 $2\pi f(\omega)$; 这里系数 2π 只影响纵坐标的尺度, 而不影响函数的基本特征。

例如, 时域单位冲激函数 $\delta(t)$ 的傅里叶变换为频域的常数 $1(-\infty < \omega < +\infty)$; 由对称性可得, 时域的常数 $1(-\infty < t < +\infty)$ 的傅里叶变换为 $2\pi\delta(-\omega)$, 由于 $\delta(\omega)$ 是 ω 的偶函数, 即 $\delta(\omega) = \delta(-\omega)$, 故有

$$\begin{aligned} \delta(t) &\longleftrightarrow 1 \\ 1(-\infty < t < +\infty) &\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

这一性质, 可用图 3-20 加以说明。图 3-20(a) 表示为一偶函数 $f(t)$ 的单位冲激函数 $\delta(t)$, 经过傅里叶正变换, 成为图 3-20(b) 所示的频谱函数 $F(j\omega) = 1$ 。现将图 3-20(a) 中的变量 t 改为 ω , 即把

$$f(t) = \delta(t)$$

改为

$$f(\omega) = \delta(\omega)$$

成为图 3-20(c) 所示的频谱函数再把图 3-20(b) 中的变量 ω 改为 t , 并考虑到反变换式中的乘数 $\frac{1}{2\pi}$, 把 $R(\omega) = 1$ 改为

$$R(t) = \frac{1}{2\pi}$$

成为图 3-20(d) 所示的时间函数。经过这样把变量 t 和 ω 进行对称的互易, 从图 3-20(a) 到图 3-20(b) 的正变换就成了从图 3-20(c) 和图 3-20(d) 的反变换。

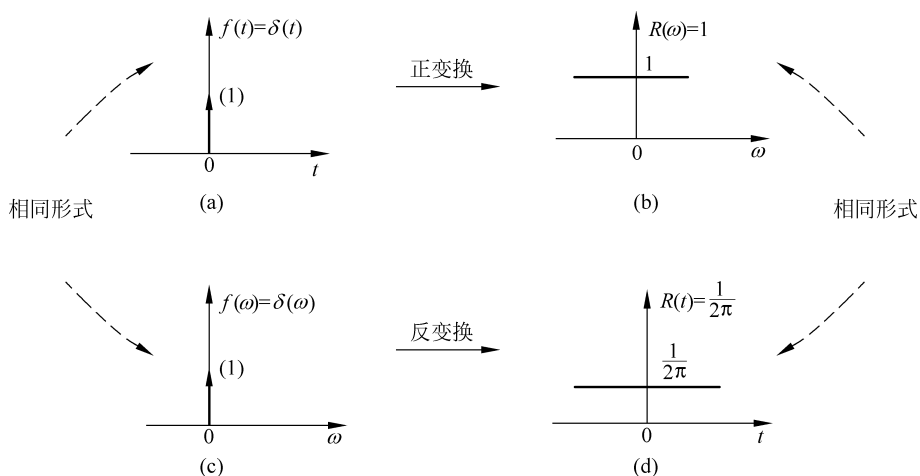


图 3-20 偶函数时域和频域的对称性

例 3-5 求抽样信号 $\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$ 的频谱函数。

解 直接利用式(3-29)不易求出 $\text{Sa}(t)$ 的傅里叶变换, 利用对称性则较为方便。

由式(3-42)知, 宽度为 τ , 幅度为 1 的门信号 $G_\tau(t)$ 的频谱函数为 $\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 即

$$G_\tau(t) \longleftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

根据对称性可得

$$\tau \text{Sa}\left(\frac{\tau t}{2}\right) \longleftrightarrow 2\pi G_\tau(-\omega) = 2\pi G_\tau(\omega)$$

令 $\tau=2$, 则有

$$2\text{Sa}(t) \longleftrightarrow 2\pi G_2(\omega)$$

再据线性

$$\text{Sa}(t) \longleftrightarrow \pi G_2(\omega)$$

即

$$\mathcal{F}[\text{Sa}(t)] = \pi G_2(\omega) = \begin{cases} \pi, & |\omega| < 1 \\ 0, & |\omega| > 1 \end{cases}$$

其对称性波形和频谱如图 3-21 所示。

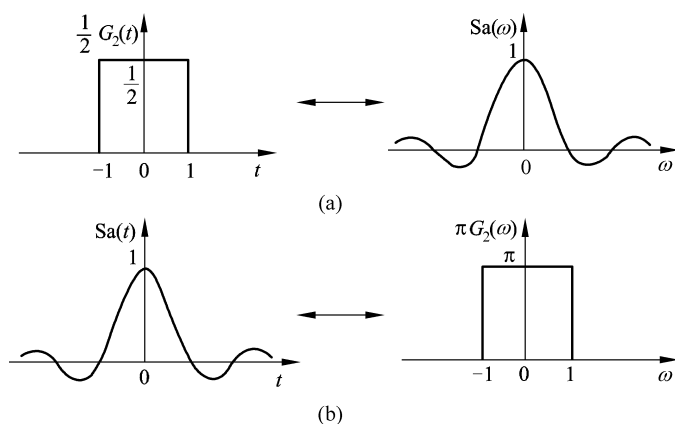


图 3-21 例 3-5 图

对称特性为某些信号的时间函数和频谱函数互求提供了不少方便。这里要强调指出的是, 这种对称关系只适用于偶函数。如果 $f(t)$ 是 t 的实奇函数, 则其频谱函数应为 ω 的虚奇函数, 即 $f(t) \longleftrightarrow \text{j}X(\omega)$ 。具体阐述请参阅其他有关书籍。

3. 尺度变换性

某信号的波形如图 3-22(a)所示, 若将该信号波形沿时间轴压缩到原来的 $1/a$ (例如 $1/3$), 就成为图 3-22(c)所示的波形, 它可表示为 $f(at)$ 。这里 a 是实常数。如果 $a > 1$,

则波形压缩; 如果 $0 < a < 1$, 则波形展宽, 如果 $a < 0$, 则波形反转并压缩或展宽。

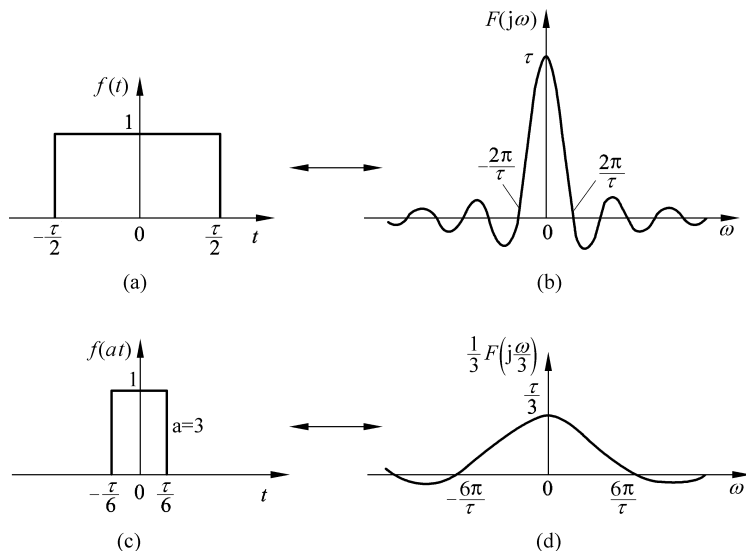


图 3-22 波形展缩与其频谱的变化关系

若

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$

则对于实常数 $a (a \neq 0)$, 有

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j \frac{\omega}{a}\right) \quad (3-45)$$

式(3-45)表明, 若信号 $f(t)$ 在时间坐标上压缩到原来的 $1/a$, 那么其频谱函数在频率坐标上将展宽 a 倍, 同时其幅度减小为原来的 $1/|a|$ 。也就是说, 在时域中信号占据时间的压缩对应于其频谱在频域中信号占有频带的扩展, 或者反之, 信号在时域中的扩展对应于其频谱在频域中压缩。这一规律称为尺度变换特性或时频展缩特性。图 3-22 画出了门信号 $f(t)$ 与 $f(3t)$ 的时域波形及频谱图。

式(3-45)可证明如下: 设 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$, 则展缩后的信号 $f(at)$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

令 $x = at$, 则 $t = \frac{x}{a}$, $dt = \frac{1}{a} dx$ 。

当 $a > 0$ 时, 有

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\frac{\omega}{a} x} dx = \frac{1}{a} F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$$

当 $a < 0$ 时, 有

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{+\infty}^{-\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} \frac{1}{a} dx = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\frac{\omega}{a} x} dx = -\frac{1}{a} F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$$

综合以上两种情况, 即得式(3-45)。

例 3-5 的求解,根据对称性、尺度变换性和线性可以得到同样的结果,读者自行练习。

由尺度变换特性可知,信号的持续时间与信号的占有频带成反比。例如,对于门函数信号 $G_{\tau}(t)$,其有效频谱宽度 $B_w = 2\pi/\tau$ 。在电子技术中,有时需要将信号持续时间缩短,以加快信息传输速度,这就不得不在频域内展宽频带。

顺便提及,式(3-45)中,若令 $a = -1$,得

$$f(-t) \longleftrightarrow F(-j\omega) \quad (3-46)$$

式(3-46)也称为傅里叶变换的折叠性。

4. 时移性

时移特性也称为延时特性。若

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) \quad (3-47)$$

且 t_0 为常数,则有 $f(t \pm t_0) \longleftrightarrow F(j\omega)e^{\pm j\omega t_0}$ 式(3-47)表示,在时域中信号沿时间轴右移(即延时) t_0 ,其在频域中所有频率“分量”相应落后相位 ωt_0 ,而幅度保持不变。

证明如下:

若 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$,则迟延信号的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

令 $x = t - t_0$,则上式可以写为

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega(x+t_0)} dx = e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

同理可得

$$\mathcal{F}[f(t + t_0)] = e^{j\omega t_0} F(j\omega)$$

如果信号既有时移,又有尺度变换,则有:

若 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$, a 和 b 为实常数。但 $a \neq 0$,则

$$f(at - b) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} e^{-j\frac{b}{a}\omega} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) \quad (3-48)$$

显然,尺度变换性和时移特性是上式的两种特殊情况,当 $b=0$ 时得式(3-45);当 $a=1$ 时得式(3-47)。

例 3-6 如图 3-23(a),已知信号宽度为 2 的门信号,即 $f_1(t) = G_2(t)$,可求得傅里叶变换 $F_1(j\omega) = 2\text{Sa}(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega}$,求图 3-23(b)、(c)中函数 $f_2(t)$ 、 $f_3(t)$ 的傅里叶变换。

解 (1) 图 3-23(b)中函数 $f_2(t)$ 可写为时移信号 $f_1(t+1)$ 与 $f_1(t-1)$ 之差,即

$$f_2(t) = f_1(t+1) - f_1(t-1)$$

由傅里叶变换的线性和时移性可得 $f_2(t)$ 的傅里叶变换

$$F_2(j\omega) = F_1(j\omega)e^{j\omega} - F_1(j\omega)e^{-j\omega} = \frac{2\sin\omega}{\omega} (e^{j\omega} - e^{-j\omega}) = j4 \frac{\sin^2\omega}{\omega}$$

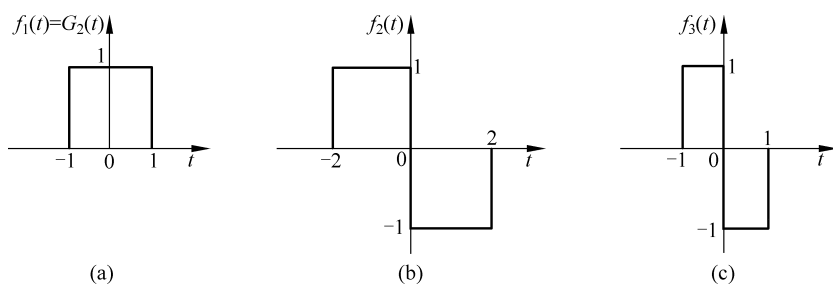


图 3-23 例 3-6 图

(2) 图 3-23(c) 中的函数 $f_3(t)$ 是 $f_2(t)$ 的压缩, 可写为

$$f_3(t) = f_2(2t)$$

由尺度变换性可得

$$F_3(j\omega) = \frac{1}{2} F_2\left(j \frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2} j^4 \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} = j^4 \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}}{\omega}$$

显然 $f_3(t)$ 也可写为

$$f_3(t) = f_1(2t+1) - f_1(2t-1)$$

5. 频移性

频移特性也称为调制特性。

若

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$

且 ω_0 为常数, 则有

$$f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \longleftrightarrow F[j(\omega \mp \omega_0)] \quad (3-49)$$

式(3-49)表明, 信号 $f(t)$ 乘以因子 $e^{j\omega_0 t}$, 对应于将频谱函数沿 ω 轴右移 ω_0 ; 信号 $f(t)$ 乘以因子 $e^{-j\omega_0 t}$, 对应于将频谱函数左移 ω_0 , 即所谓的时域相移, 对应频域频移。时域顺(逆)时针旋转, 对应频域沿 ω 轴左(右)移。式(3-49)证明如下:

$$\mathcal{F}\{f(t)e^{\pm j\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{\pm j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(\omega \mp \omega_0)t} dt = F[j(\omega \mp \omega_0)]$$

例 3-7 已知信号 $f(t)$ 傅里叶变换为 $F(j\omega)$, 求信号 $e^{j4t}f(3-2t)$ 的傅里叶变换。

解 由已知 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$, 利用时移特性有

$$f(t+3) \longleftrightarrow F(j\omega)e^{j3\omega}$$

据尺度变换性, 令 $a = -2$, 得

$$f(-2t+3) \longleftrightarrow \frac{1}{|-2|} F\left(-j \frac{\omega}{2}\right) e^{j3\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{1}{2} F\left(-j \frac{\omega}{2}\right) e^{-j\frac{3\omega}{2}}$$

由频移特性,得

$$e^{j4t} f(-2t+3) \longleftrightarrow \frac{1}{2} F(-j \frac{\omega-4}{2}) e^{-j \frac{3(\omega-4)}{2}}$$

频移特性在各类电子系统中应用广泛,如调幅、同步解调等都是在频谱搬移基础上实现的。实现频谱搬移的原理如图 3-24 所示。它是将信号 $f(t)$ (常称为调制信号) 乘以载频信号 $\cos\omega_0 t$ 或 $\sin\omega_0 t$, 得到高频已调信号 $y(t)$, 即

$$y(t) = f(t) \cos\omega_0 t$$

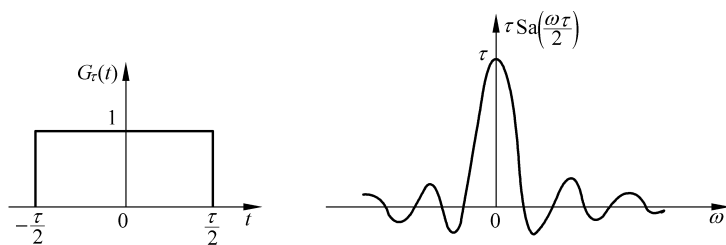
例如,若 $f(t)$ 是幅度为 1 的门信号 $G_\tau(t)$, 则

$$y(t) = G_\tau(t) \cos\omega_0 t = \frac{1}{2} G_\tau(t) e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} G_\tau(t) e^{j\omega_0 t}$$

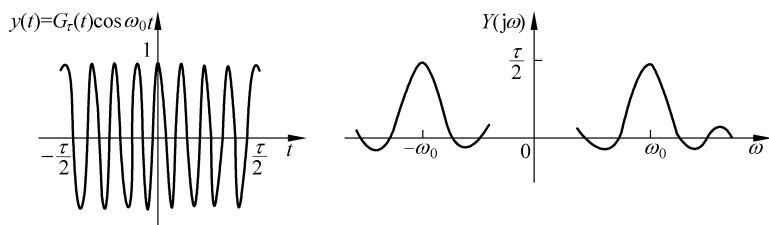
$y(t)$ 常称为高频脉冲信号。由于 $G_\tau(t) \longleftrightarrow \tau \text{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$, 根据线性和频移特性, 高频脉冲信号 $y(t)$ 的频谱函数

$$Y(j\omega) = \frac{\tau}{2} \text{Sa}\left[\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}\right] + \frac{\tau}{2} \text{Sa}\left[\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}\right] \quad (3-50)$$

图 3-25(a)画出了门信号 $G_\tau(t)$ 及其频谱, 图 3-25(b)画出了高频脉冲信号 $y(t)$ 及其频谱。



(a) 门函数及其频谱



(b) 高频脉冲及其频谱

图 3-25 高频脉冲的频谱

显然,若信号 $f(t)$ 的频谱为 $F(j\omega)$, 则高频已调信号 $f(t) \cos\omega_0 t$ 或 $f(t) \sin\omega_0 t$ 的频谱函数为

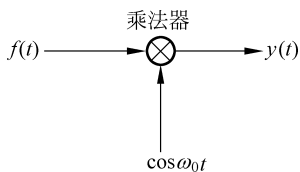


图 3-24 实现频谱搬移的原理图

$$\left. \begin{aligned} f(t) \cos \omega_0 t &\longleftrightarrow \frac{1}{2} F[j(\omega + \omega_0)] + \frac{1}{2} F[j(\omega - \omega_0)] \\ f(t) \sin \omega_0 t &\longleftrightarrow \frac{1}{2} j F[j(\omega + \omega_0)] - \frac{1}{2} j F[j(\omega - \omega_0)] \end{aligned} \right\} \quad (3-51)$$

可见,当用某低频信号 $f(t)$ 去调制角频率为 ω_0 的余弦(或正弦)信号时,高频已调信号的频谱是将 $f(t)$ 的频谱 $F(j\omega)$ 包络线按比例复制为两个,分别向左和向右搬移 ω_0 ,在搬移中幅度频谱的形式并未改变,只是幅度缩小一半。上述频率搬移的过程,在电子技术中,就是调幅(amplitude modulation)的过程。所以,实施调幅的办法,就是设法在时域中乘以一个高频正弦波。这在后续的调制-解调原理中详细介绍。

6. 时域微分性

若

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$

且满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt < +\infty$$

即 $f(t)$ 可积的条件,则

$$\frac{df(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega F(j\omega) \quad (3-52)$$

此性质可证明如下:

据傅里叶反变换定义式,有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

上式两端对 t 求微分,从而得

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \frac{de^{j\omega t}}{dt} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

因此有

$$\frac{df(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega F(j\omega)$$

例如,我们知道 $\delta(t) \longleftrightarrow 1$,利用时域微分性质有

$$\frac{d\delta(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega$$

此性质表明,在时域中对信号 $f(t)$ 求导数,对应于频域中用 $j\omega$ 乘以 $f(t)$ 的频谱函数(满足其应用条件)。如果应用此性质对微分方程两端求傅里叶变换,可将微分方程变换成代数方程。从理论上讲,为微分方程的求解找到了一种新的方法。

此性质还可推广到 $f(t)$ 的 n 阶导数,即

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega) \quad (3-53)$$

例 3-8 求三角形脉冲

$$f_{\Delta}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{\tau} |t|, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

的频谱函数。

解 三角形脉冲 $f_{\Delta}(t)$ 及其一阶导数和二阶导数分别如图 3-26(a)、(b)、(c) 所示, 且都是可积的。若令 $f(t) = f''_{\Delta}(t)$, 则三角形脉冲 $f_{\Delta}(t)$ 是函数 $f(t)$ 的二重积分, 即

$$f_{\Delta}(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^x f(y) dy dx$$

式中, x, y 都是时间变量, 引用它们是为了避免把积分限与被积函数变量相混淆。

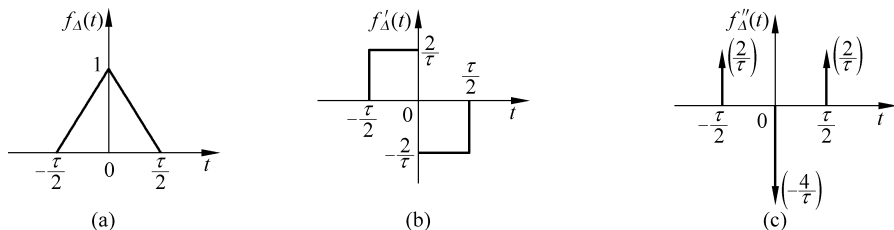


图 3-26 例 3-8 图($f_{\Delta}(t)$ 及其导数)

图 3-26(c) 的函数由三个冲激函数组成, 它可以写为

$$f(t) = \frac{2}{\tau} \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \frac{4}{\tau} \delta(t) + \frac{2}{\tau} \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

由于 $\delta(t) \longleftrightarrow 1$, 根据时移特性, $f(t)$ 的频谱可以写为

$$F(j\omega) = \frac{2}{\tau} e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - \frac{4}{\tau} + \frac{2}{\tau} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} = \frac{2}{\tau} (e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - 2 + e^{-j\frac{\omega\tau}{2}})$$

$$= \frac{4}{\tau} \left[\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) - 1 \right] = -\frac{8 \sin^2 \frac{\omega\tau}{4}}{\tau}$$

所以 $f_{\Delta}(t)$ 的频谱函数为

$$F_{\Delta}(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} F(j\omega) = \frac{8 \sin^2 \frac{\omega\tau}{4}}{\omega^2 \tau} = \frac{\tau}{2} \frac{\sin^2 \frac{\omega\tau}{4}}{\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)^2} = \frac{\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

7. 频域微分性

若

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$(-jt)^n f(t) \longleftrightarrow F^{(n)}(j\omega) \quad (3-54)$$

式中, $F^{(n)}(j\omega)$ 为 $F(j\omega)$ 对 ω 的 n 阶导数。

例 3-9 求单位斜坡信号 $r(t) = t\varepsilon(t)$ 的频谱函数。

解 因为

$$\varepsilon(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

根据频域微分性得

$$t\varepsilon(t) \longleftrightarrow j \frac{d}{d\omega} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

8. 时域积分性

若

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$\int_{-\infty}^t f(x) dx \longleftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega} \quad (3-55)$$

如果 $F(0)=0$, 则有

$$\int_{-\infty}^t f(x) dx \longleftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} \quad (3-56)$$

证明如下:

由于 $f(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$, 即

$$\int_{-\infty}^t f(x) dx = f(t) * \varepsilon(t)$$

应用时域卷积性质, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(x) dx\right] &= \mathcal{F}[f(t)]\mathcal{F}[\varepsilon(t)] = F(j\omega) \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] \\ &= \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega} \end{aligned}$$

时域积分性质多用于 $F(0)=0$ 的情况。 $F(0)=0$ 表明 $f(t)$ 的频谱函数中直流分量的频谱密度为零。

由于 $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$, 显然有 $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ 。也就是说, $F(0)=0$ 等效于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0$, 即当 $f(t)$ 波形在 t 轴上、下两部分面积相等时, $F(0)=0$ 。此时有

$$\int_{-\infty}^t f(x) dx \longleftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

例 3-10 根据 $\delta(t) \longleftrightarrow 1$ 和积分性质求 $f(t) = \varepsilon(t)$ 的频谱函数。

解 因为

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

又

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x) dx$$

根据时域积分性

$$\varepsilon(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

此例若用时域微分性就可能得出错误结果,读注意 $\varepsilon(t)$ 不可积,其中有直流分量。

例 3-11 求图 3-27(a)所示信号 $f(t)$ 的频谱函数 $F(j\omega)$ 。

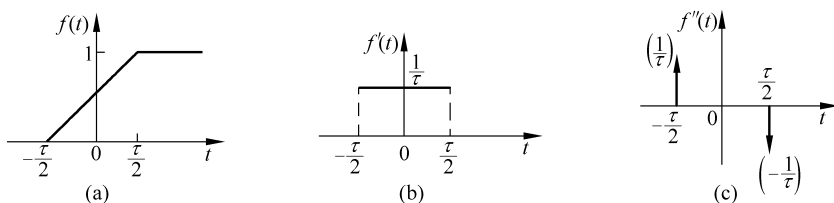


图 3-27 例 3-11 图

解 $f(t)$ 对 t 求两次微分后,得

$$f''(t) = \frac{1}{\tau}\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \frac{1}{\tau}\delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

且

$$f''(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\tau}e^{j\omega\tau/2} - \frac{1}{\tau}e^{-j\omega\tau/2} = j\frac{2}{\tau}\sin\frac{\omega\tau}{2}$$

由于 $f(t)$ 不满足可积条件,故时域微分性不可用,否则引起错误结果。

由时域积分性

$$\begin{aligned} f'(t) &= \int_{-\infty}^t f''(x) dx \longleftrightarrow \frac{2}{\tau\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2} + \pi \times 0 \times \delta(\omega) \\ &= \frac{2}{\tau\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2} = \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\ f(t) &= \int_{-\infty}^t f'(x) dx \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega^2\tau}\sin\frac{\omega\tau}{2} + \pi\text{Sa}(0)\delta(\omega) \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

$f'(x)$ 及 $f''(x)$ 如图 3-27(b)、(c)所示。

9. 频域积分性

若

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$\pi f(0)\delta(t) + \frac{f(t)}{-jt} \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(j\eta) d\eta \quad (3-57)$$

如果 $f(0)=0$, 则有

$$\frac{f(t)}{-jt} \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(j\eta) d\eta \quad (3-58)$$

例 3-12 已知 $f(t) = \frac{\sin t}{t}$, 应用频域积分性求 $F(j\omega)$ 。

解 因为

$$\sin t = \frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt}) \longleftrightarrow \frac{2\pi}{2j}[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)] = j\pi[\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)]$$

根据频域积分性得

$$\frac{\sin t}{t} \longleftrightarrow \frac{1}{j} \int_{-\infty}^{\omega} j\pi[\delta(x + 1) - \delta(x - 1)]dx = \pi[\epsilon(\omega + 1) - \epsilon(\omega - 1)] = \pi G_2(\omega)$$

10. 时域卷积

若

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega)$$

则

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)F_2(j\omega) \quad (3-59)$$

此性质证明如下:

依据卷积积分的定义

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau$$

将其代入求傅里叶正变换的定义式(3-29), 得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \end{aligned}$$

由时移性质知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t - \tau)e^{-j\omega t} dt = F_2(j\omega)e^{-j\omega\tau}$$

从而有

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_2(j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = F_2(j\omega)F_1(j\omega)$$

例 3-13 已知两个完全相同的幅度为 $\sqrt{\frac{2}{\tau}}$ 的门信号, 其表达式为 $f(t) = \sqrt{\frac{2}{\tau}}G_{\tau/2}(t)$, 波形如图 3-28(a)所示。求其卷积 $f_{\Delta}(t) = f(t) * f(t)$ 的频谱函数。

解 由于门信号 $G_{\tau}(t)$ 与其频谱函数的对应关系是

$$G_{\tau}(t) \longleftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

利用尺度变换性, 令 $a=2$, 将 $G_{\tau}(t)$ 压缩, 得

$$G_{\tau/2}(t) \longleftrightarrow \frac{\tau}{2} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

于是得信号 $f(t)$ 的频谱函数

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\left[\sqrt{\frac{2}{\tau}} G_{\tau/2}(t)\right] = \sqrt{\frac{\tau}{2}} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

最后由时域卷积定理可得三角形脉冲 $f_{\Delta}(t)$ 的频谱函数

$$F_{\Delta}(j\omega) = \mathcal{F}[f_{\Delta}(t)] = \mathcal{F}[f(t) * f(t)] = F(j\omega)F(j\omega) = \frac{\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

其频谱如图 3-28(b) 所示。

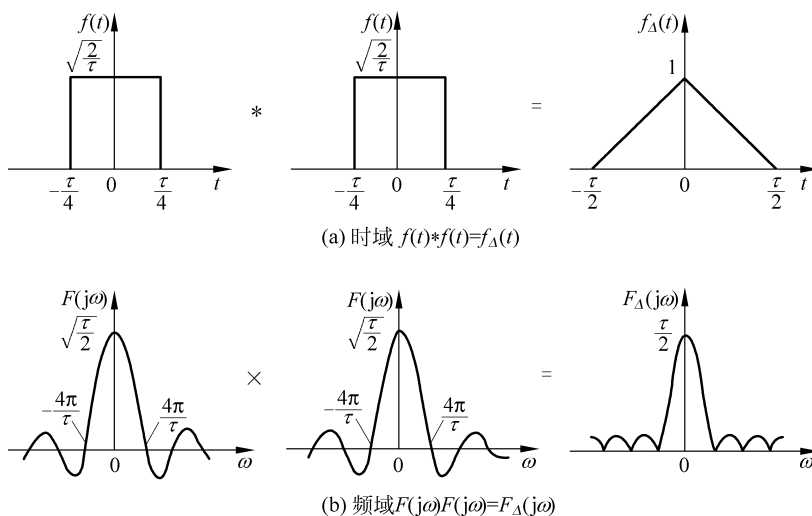


图 3-28 时域卷积定理的应用

卷积性质在信号与系统分析中占有重要地位,它将系统分析中的时域方法与频域方法紧密联系在一起。在时域分析中,求某线性系统的零状态响应 $y_f(t)$ 时,若已知外加信号 $f(t)$ 及系统的单位冲激响应 $h(t)$,则有

$$y_f(t) = f(t) * h(t)$$

在频域分析中,若知道 $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$,则由卷积性质可知

$$\mathcal{F}\{y_f(t)\} = F(j\omega)H(j\omega)$$

将此式进行傅里叶反变换就可得系统的零状态响应 $y_f(t)$ 。由此可以看到卷积性质的重要作用。

11. 频域卷积

若

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega)$$

则

$$f_1(t)f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(j\omega) * F_2(j\omega)] \quad (3-60)$$

应注意,式(3-60)中的卷积是对变量 ω 进行的,即

$$F_1(j\omega) * F_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(j\eta)F_2[j(\omega - \eta)]d\eta$$

此性质可证明如下:

根据傅里叶反变换的定义式(3-30),有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi}[F_1(j\omega)*F_2(j\omega)]\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(j\eta)F_2[j(\omega-\eta)]d\eta\right]e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(j\eta)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2[j(\omega-\eta)]e^{j\omega t}d\omega\right]d\eta\end{aligned}$$

应用频移性质,可知

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2[j(\omega-\eta)]e^{j\omega t}d\omega = f_2(t)e^{j\eta t}$$

所以有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi}[F_1(j\omega)*F_2(j\omega)]\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(j\eta)f_2(t)e^{j\eta t}d\eta \\ &= f_2(t)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(j\eta)e^{j\eta t}d\eta = f_2(t)f_1(t)\end{aligned}$$

频域卷积性质有时也称为时域相乘性质。

评注 例 3-8 与例 3-13 的频谱函数是相同的,由此说明,两个波形完全相同的门信号 $f(t)$ 相卷积可得到三角形脉冲 $f_{\Delta}(t)$,即 $f(t)*f(t)=f_{\Delta}(t)$,请读者应用图解法自行验证。

12. 帕塞瓦尔定理

前面研究了信号的频谱(幅度频谱和相位频谱),它是频域中描述信号特征的方法之一,此外还可以用能量谱来描述信号。这里仅给出能量谱的初步概念。

设

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$

若 $f(t)$ 为实函数,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(j\omega)|^2d\omega \quad (3-61)$$

在周期信号的傅里叶级数讨论中,曾得到周期信号的帕塞瓦尔定理,即

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|F_n|^2$$

此式表明,周期信号的功率等于该信号各频率分量功率之和。一般来说,非周期信号不是功率信号,其平均功率为零,但其能量为有限值,因而是一个能量信号。

非周期信号的总能量为

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)dt$$

非周期信号的帕塞瓦尔定理表明:对非周期信号,在时域中求得的信号能量与频域中求得的信号能量相等。由于 $|F(j\omega)|^2$ 是 ω 的偶函数,因而式(3-61)还可写为

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(j\omega)|^2d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}|F(j\omega)|^2d\omega \quad (3-62)$$

非周期信号是由无限多个振幅为无穷小的频率分量组成的,各频率分量的能量也为无穷小量。为了表明信号能量在频率分量上的分布情况,与频谱密度函数相似,引入能量密度频谱函数,简称为**能量谱**(energy spectrum)。能量谱 $G(\omega)$ 为各频率点上单位频带中的信号能量,所以信号在整个频率范围的全部能量为

$$W = \int_0^{+\infty} G(\omega) d\omega \quad (3-63)$$

与式(3-62)对照,显然有

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} |F(j\omega)|^2 \quad (3-64)$$

以上讨论的傅里叶变换的性质列于表 3-2,以便查阅。

表 3-2 傅里叶变换的基本性质

性质名称	时域 $f(t)$	频域 $F(j\omega)$
线性	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega)$
对称性	$F(jt)$	$2\pi f(-\omega)$
折叠性	$f(-t)$	$F(-j\omega)$
尺度变换性	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$
时移性	$f(t \pm t_0)$	$F(j\omega) e^{\pm j\omega t_0}$
频移性	$e^{\pm j\omega_0 t} f(t)$	$F[j(\omega \mp \omega_0)]$
时域微分	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(j\omega)$
频域微分	$t^n f(t)$	$(j)^n \frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n}$
时域积分	$\int_{-\infty}^t f(x) dx$	$\frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \delta(\omega)$
频域积分	$\pi f(0) \delta(t) - \frac{f(t)}{jt}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\eta) d\eta$
时域卷积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(j\omega) F_2(j\omega)$
频域卷积	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$
帕塞瓦尔定理	$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) ^2 d\omega$

3.5 周期信号的傅里叶变换

前面通过傅里叶级数展开对周期信号进行了频谱分析,并针对非周期信号频谱分析学习了傅里叶变换。通过周期信号的傅里叶级数及非周期信号的傅里叶变换的讨论,得到了周期信号频谱为离散的幅度谱,非周期信号频谱是连续的密度谱的结论。如果对周期信号用傅里叶级数,对非周期信号用傅里叶变换,显然会给频域分析带来很多不便。那么,两者能否统一起来?这就需要讨论周期信号是否存在傅里叶变换。一般来说,周期信号不满足傅里叶变换存在的充分条件——绝对可积,因而直接用傅里叶变换的定义式是无法求解的,而引入奇异函数之后,有些不满足绝对可积条件的信号也可求其傅里叶变换。例如,前面讨论的直流信号,阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 等。因此,引入奇异函数之后,周期信号也可能存在傅里叶变换。可以推知,由于周期信号频谱的离散性,它的傅里叶变换(即频谱函数)必定也是离散的,而且是由一系列冲激信号所组成。下面先讨论最常见的周期信号的傅里叶变换,在此基础上再去研究一般周期信号的傅里叶变换。

1. 复指数信号的傅里叶变换

周期信号都可以表示成指数形式的傅里叶级数,对于复指数信号

$$f(t) = e^{\pm j\omega_0 t}, \quad -\infty < t < +\infty$$

因为

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

由频移性得

$$\begin{cases} e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \\ e^{-j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \end{cases} \quad (3-65)$$

复指数信号表示一个单位长度的相量以固定的角频率 ω_0 随时间旋转,经傅里叶变换后,其频谱为集中于 ω_0 处,强度为 2π 的冲激信号。这说明信号时间的相移对应于频域中的频移特性。

2. 余弦、正弦信号的傅里叶变换

对于余弦信号

$$f_1(t) = \cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \quad -\infty < t < +\infty$$

其频谱函数

$$\begin{aligned} F_1(j\omega) &= \frac{1}{2}[2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned} \quad (3-66)$$

对于正弦信号

$$f_2(t) = \sin\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \quad -\infty < t < +\infty$$

其频谱函数

$$\begin{aligned} F_2(j\omega) &= \frac{1}{2j} [2\pi\delta(\omega - \omega_0) - 2\pi\delta(\omega + \omega_0)] \\ &= j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned} \quad (3-67)$$

它们的波形及其频谱如图 3-29 所示。

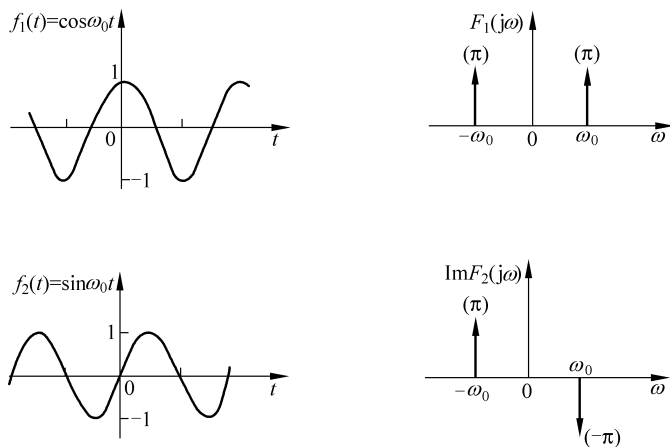


图 3-29 余弦、正弦信号波形及其频谱

3. 单位冲激序列 $\delta_T(t)$ 的傅里叶变换

若信号 $f(t)$ 为单位冲激序列, 即

$$f(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (3-68)$$

$f(t) = \delta_T(t)$ 为周期信号, 其周期为 T 。依据周期信号的傅里叶级数分析, 可将其表示为指数形式的傅里叶级数, 即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

式中, Ω 为基波角频率 ($\Omega = 2\pi/T$), F_n 为复振幅

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T}$$

对其进行傅里叶变换, 并利用线性和频移性得

$$F(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - n\Omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \Omega\delta_\Omega(\omega) \quad (3-69)$$

即

$$\delta_T(t) \longleftrightarrow \Omega\delta_\Omega(\omega)$$

式中, $\delta_{\Omega}(\omega)$ 表示一个冲激序列。

可见, 时域周期为 T 的单位冲激序列, 其傅里叶变换也是周期的冲激序列, 频域周期为 Ω , 冲激强度相等, 均为 Ω , 也就是说, 一个冲激序列的傅里叶变换仍是一个冲激序列。单位冲激序列的波形、傅里叶系数 F_n 与其频谱函数 $F(j\omega)$ 如图 3-30 所示。

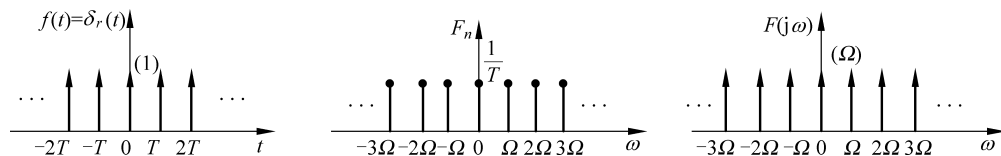


图 3-30 单位冲激序列的傅里叶变换

4. 一般周期信号的傅里叶变换

设 $f(t)$ 为周期信号, 其周期为 T , 依据周期信号的傅里叶级数分析, 可将其表示为指数形式的傅里叶级数。即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

式中, Ω 为基波角频率 ($\Omega = 2\pi/T$), F_n 为复振幅

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

对周期信号 $f(t)$ 求傅里叶变换, 从而有

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \mathcal{F}[e^{jn\Omega t}]$$

所以得到

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3-70)$$

式(3-70)表明, 一般周期信号的傅里叶变换(频谱函数)是由无穷多个冲激函数组成, 这些冲激函数位于信号的各谐波频率 $n\Omega$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处, 其强度为相应傅里叶级数系数 F_n 的 2π 倍。

周期信号的频谱除按式(3-70)求解之外, 还可按下面的方式求得。

设一周期信号 $f_T(t)$, 其周期为 T , $f_T(t)$ 中位于第一个周期的信号若为 $f_a(t)$, 则 $f_T(t)$ 可以看作是 $f_a(t)$ 的周期延拓, 其可以表达为

$$f_T(t) = f_a(t) * \delta_T(t) = f_a(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

若令 $\mathcal{F}\{f_a(t)\} = F_a(j\omega)$, 应用傅里叶变换的卷积性质, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_T(t)] &= \mathcal{F}[f_a(t)] \mathcal{F}[\delta_T(t)] = \mathcal{F}[f_a(t)] \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\Omega) \\ &= F_a(j\omega) \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\Omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_a(jn\Omega) \delta(\omega - n\Omega) \\
 &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} F_a(jn\Omega) \delta(\omega - n\Omega) \quad (3-71)
 \end{aligned}$$

对照式(3-70)和式(3-71)可知,周期信号 $f_T(t)$ 的傅里叶级数的系数 F_n 和其第一个周期的信号 $f_a(t)$ 的傅里叶变换 $F_a(j\omega)$ 的关系为

$$F_n = \frac{1}{T} F_a(j\omega) \big|_{\omega=n\Omega} \quad (3-72a)$$

$$F_a(j\omega) = T F_n \big|_{n\Omega=\omega} \quad (3-72b)$$

由上可知,周期信号的傅里叶变换,可通过其第一个周期内的非周期信号的傅里叶变换求得。

第一个周期的信号 $f_a(t)$ 在 $-\infty < t < +\infty$ 时间范围为非周期信号,因而可通过各种性质容易地求得其傅里叶变换,代入式(3-71)即得周期信号 $f_T(t)$ 的频谱函数。

例 3-14 图 3-31(a) 表示一周期为 T , 脉冲宽度为 τ , 幅度为 1 的周期矩形脉冲信号, 记为 $P_T(t)$ 。试求其频谱函数。

解 由式(3-18)可知,图 3-31(a) 所示周期矩形脉冲信号 $f(t) = P_T(t)$ 的傅里叶系数为

$$F_n = \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$

$P_T(t)$ 的傅里叶级数的幅度频谱画于图 3-31(b) 所示。

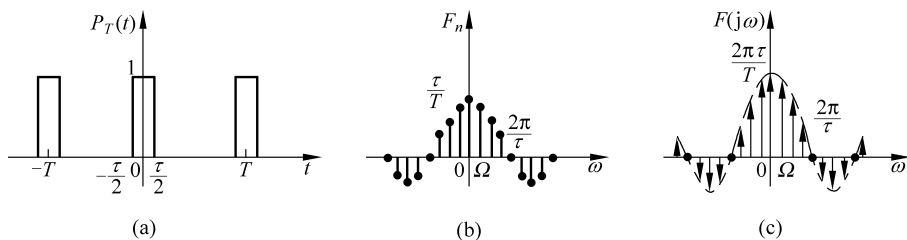


图 3-31 例 3-14 图 周期矩形脉冲信号及其频谱

将上式代入式(3-70),得

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{P_T(t)\} = \frac{2\pi\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\Omega)$$

$P_T(t)$ 的频谱函数 $F(j\omega)$ 如图 3-31(c) 所示。

此外,本题也可用式(3-71)描述的方法求解,具体过程如下:

对周期信号 $f_T(t)$, 式(3-71)中的 $f_a(t)$ 为门信号 $G_\tau(t)$, 由(3-42)知

$$G_\tau(t) \longleftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

将其代入式(3-71),有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_T(t)] &= \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \frac{2\pi\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\Omega) \\ &= \frac{2\pi\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\Omega)\end{aligned}$$

其结果与前面相同。

3.6 连续信号的抽样定理

前面各节讨论的时间连续信号也称模拟信号,这类信号实际上是由模拟欲传输的信息而得到的一种电流或电压,取值为实数(模拟量)。由于受诸多因素的限制,一般模拟信号的加工处理质量不高。而数字信号仅用 0、1 来表示,它的加工处理比模拟信号有着无可比拟的优越性,因而受到广泛重视。随着数字技术及电子计算机的迅速发展,数字信号处理得到越来越广泛的应用,电子设备的数字化也已成为一种发展方向。

要得到数字信号,往往首先要对传输信息的模拟信号进行抽样,得到一系列离散时刻的样值信号,然后对这些离散时刻的样值信号进行量化、编码。可见,这里的一个关键环节就是抽样。抽样实际上是指抽取样本的过程,即从一连续信号 $f(t)$ 中,每隔一定时间间隔抽取一个样本数值,得到一个由样本值构成的序列。抽样过程可以在时域中进行,也可以在频域中进行。

3.6.1 限带信号和抽样信号

限带信号是指其频谱宽度有限的信号,此时频谱函数 $F(j\omega)$ 满足

$$F(j\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_m \quad (3-73)$$

式中, ω_m 称为信号 $f(t)$ 的最高频率。例如如图 3-32(a) 表示的 $f(t)$, 若其频谱函数如图 3-32(b) 所示, 则可以判定 $f(t)$ 为限带信号。实际工程中的脉冲信号, 若忽略其占有频带之外的频率分量, 就可视为限带信号。本节仅讨论限带信号的抽样问题。

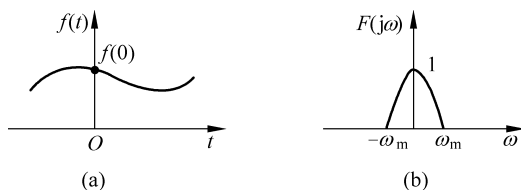


图 3-32 限带信号及其频谱

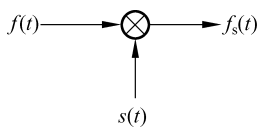


图 3-33 抽样信号 $f_s(t)$

抽样信号是指利用抽样序列 $s(t)$ 从连续信号 $f(t)$ 中“抽取”一系列离散样值而得的离散信号,也称为取样信号,用 $f_s(t)$ 表示。连续信号抽取的过程可用图 3-33 所示的数学模型表示,即抽样信号

$$f_s(t) = f(t)s(t) \quad (3-74)$$

式中,抽样序列 $s(t)$ 也称为开关函数。若其间隔时间相同,均为 T_s ,则称均匀抽样。 T_s

称为抽样周期, $f_s = 1/T_s$ 称为抽样频率, $\omega_s = 2\pi f_s$ 称为抽样角频率。

3.6.2 抽样信号 $f_s(t)$ 的频谱

因抽样信号 $f_s(t) = f(t)s(t)$, 故随抽样序列 $s(t)$ 不同, $f_s(t)$ 也不尽相同, 下面讨论常用抽样信号的频谱。

1) 均匀冲激抽样

如果抽样序列 $s(t)$ 是周期冲激函数序列 $\delta_{T_s}(t)$, 即

$$s(t) = \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \quad (3-75)$$

由式(3-69)可知, 其频谱函数

$$S(j\omega) = \mathcal{F}\{s(t)\} = \mathcal{F}\{\delta_{T_s}(t)\} = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \quad (3-76)$$

式中, $\omega_s = 2\pi/T_s$ 。

由式(3-74)知, 抽样信号 $f_s(t) = f(t)s(t) = f(t)\delta_{T_s}(t)$

设 $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$, 根据频域卷积定理, 得抽样信号 $f_s(t)$ 的频谱函数为

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

由于 $F(j\omega)$ 与 n 无关, 故利用冲激函数卷积的性质, 得

$$F_s(j\omega) = \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[j(\omega - n\omega_s)] = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[j(\omega - n\omega_s)] \quad (3-77)$$

图 3-34(a)、(b) 分别给出了 $s(t)$ 、 $f(t)$ 和 $f_s(t)$ 及其频谱 $S(j\omega)$ 、 $F(j\omega)$ 和 $F_s(j\omega)$ 的关系, 其中取 $\omega_s \geq 2\omega_m$, 即抽样频率大于信号 $f(t)$ 频谱最高频率的两倍。

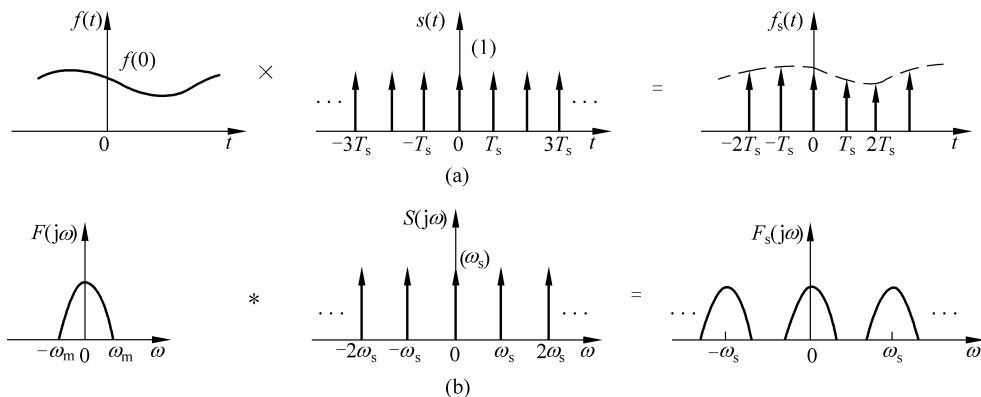


图 3-34 均匀冲激抽样

由图 3-34 可知, 当 $\omega_s \geq 2\omega_m$ 时, 抽样信号 $f_s(t)$ 的频谱函数 $F_s(j\omega)$ 是原信号 $f(t)$ 频谱 $F(j\omega)$ 的周期性延拓, 每隔 ω_s 重复出现一次。因此 $f_s(t)$ 中含有 $f(t)$ 的全部信息, 可以从 $f_s(t)$ 恢复原信号 $f(t)$ 。均匀冲激抽样也称为理想抽样 (ideal sampling)。

2) 矩形脉冲抽样

如果抽样序列 $s(t)$ 是周期矩形脉冲序列, 即 $s(t) = P_{T_s}(t)$, 其波形如图 3-35 所示。由例 3-14 的结论, 得其频谱函数

$$S(j\omega) = \mathcal{F}\{s(t)\} = \mathcal{F}\{P_{T_s}(t)\} = \frac{2\pi\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s)$$



视频 3-6 信号

(3-78) 均匀冲激抽样

如图 3-35 所示, 它是频域周期 $\omega_s = 2\pi/T_s$ 的冲激函数序列, 冲激强度的

包络线是抽样函数 $\frac{2\pi\tau}{T_s} \text{Sa}(\omega\tau/2)$ 。

由 $f_s(t) = f(t)s(t) = f(t)P_{T_s}(t)$, 根据频域卷积定理可得抽样信号 $f_s(t)$ 的频谱函数为

$$\begin{aligned} F_s(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * S(j\omega) \\ &= \frac{\tau}{T_s} F(j\omega) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s) \\ &= \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F[j(\omega - n\omega_s)] \end{aligned} \quad (3-79)$$

若取 $\omega_s \geq 2\omega_m$, 则 $f(t)$, $f_s(t)$ 及其频谱 $F(j\omega)$, $F_s(j\omega)$ 如图 3-35 所示。

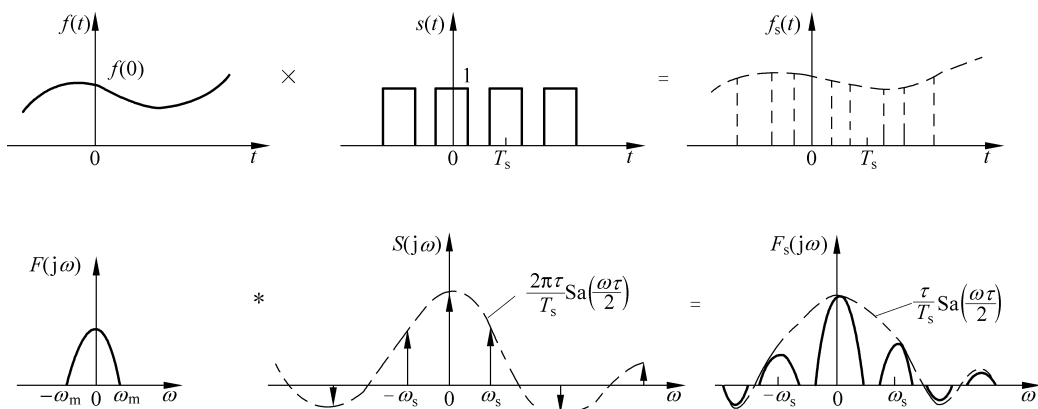


图 3-35 矩形脉冲抽样

由图 3-35 可以看出, 当 $\omega_s \geq 2\omega_m$ 时, 抽样信号 $f_s(t)$ 的频谱函数是由原信号 $f(t)$ 的频谱 $F(j\omega)$ 的无限个频移组成, 其频移的角频率为 $n\omega_s$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 其振幅随 $\frac{\tau}{T_s} \text{Sa}(\omega\tau/2)$ 变化。因此, 可以利用低通滤波器从 $f_s(t)$ 中恢复原信号。而当 $\omega_s < 2\omega_m$ 时, 则 $F_s(j\omega)$ 中各频移的频谱将相互有重叠部分, 无法将它们分开, 因而不能再恢复原信号。频谱重叠的现象也称为混叠(aliasing)现象。显然, 在均匀冲激抽样时, 也可能会出现混叠现象。矩形脉冲抽样也称为自然抽样(natural sampling)。

3.6.3 时域抽样定理

1. 时域抽样定理

前面分析了均匀冲激抽样信号和矩形脉冲抽样信号的频谱, 可以看到: 一个最高频率 f_m (角频率为 ω_m) 的限带信号 $f(t)$ 可以用均匀等间隔 $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$ 的抽样信号 $f_s(t) = f(nT_s)$ 值唯一确定。这就是**时域抽样定理**(time domain sampling theorem)。

时域抽样定理给出了连续信号离散化时的最大允许抽样间隔 $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$, 此间隔称为**奈奎斯特间隔**(Nyquist interval)。对应的抽样频率 $f_s = 2f_m$ 称为**奈奎斯特频率**(Nyquist frequency) (或 $\omega_s = 2\omega_m$), 即最低允许的抽样频率。此外, 该定理还指明, 在 $\omega_s \geq 2\omega_m$ 条件下所得到的离散信号 $f(nT_s)$ 包含原连续信号 $f(t)$ 的全部信息。因此, 对信号 $f(nT_s)$ 的传输也就相应于对信号 $f(t)$ 的传输, 这在信号的多路传输应用中有着重要的意义。

2. 原信号 $f(t)$ 的恢复

由于满足抽样定理而得到的抽样信号 $f_s(t)$ 中包含有 $f(t)$ 的全部信息, 因而由抽样信号 $f_s(t)$ 可以恢复 $f(t)$ 。下面来讨论 $f(t)$ 的恢复。

由图 3-34 所示抽样信号 $f_s(t)$ 及其频谱 $F_s(j\omega)$ 可知, 抽样信号 $f_s(t)$ 经过一个截止频率为 ω_c 的**理想低通滤波器**(ideal low-pass filter) 当 $\omega_m \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_m$ 时, 就可从 $F_s(j\omega)$ 中取出 $F(j\omega)$ 。从时域上来说, 这样就恢复了连续时间信号 $f(t)$, 即

$$F(j\omega) = F_s(j\omega)H(j\omega) \quad (3-80)$$

式中, $H(j\omega)$ 为理想低通滤波器的频率特性。 $H(j\omega)$ 的特性为

$$H(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (3-81)$$

上述从抽样信号 $f_s(t)$ 恢复 $f(t)$ 的原理过程如图 3-36 所示。

以上是用频域分析的方法讨论 $f(t)$ 的恢复。下面进一步讨论在时域中对 $f(t)$ 的恢复。

由式(3-80)可知

$$F(j\omega) = F_s(j\omega)H(j\omega)$$

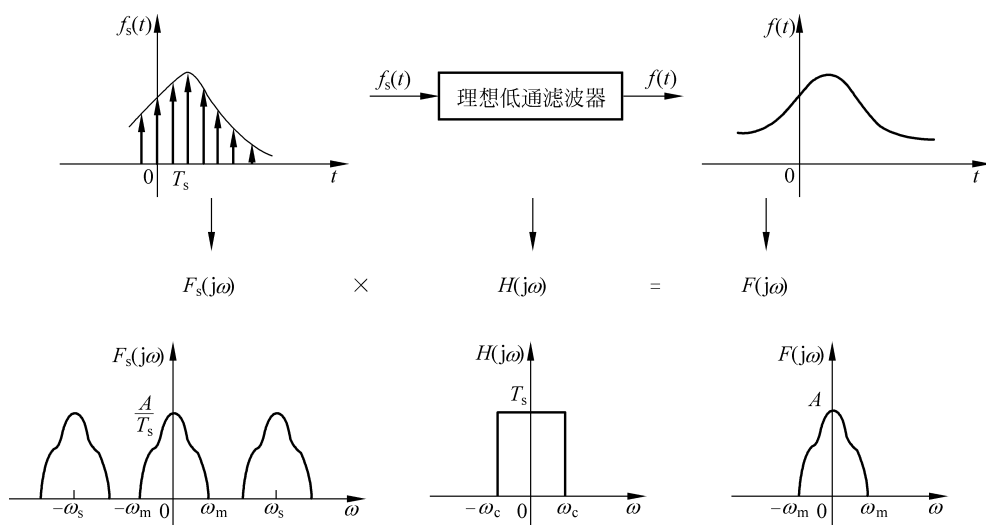
根据傅里叶变换的时域卷积性质, 得

$$f(t) = f_s(t) * h(t) \quad (3-82)$$

式中, $f_s(t)$ 为 $F_s(j\omega)$ 的傅里叶反变换, 其中

$$f_s(t) = f(t)\delta_{T_s}(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$h(t)$ 为理想低通滤波器的单位冲激响应, 可由 $H(j\omega)$ 的傅里叶反变换得到, 即

图 3-36 $f(t)$ 的恢复原理

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \frac{T_s \omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t)$$

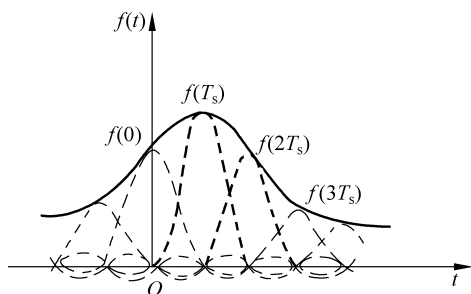
将 $f_s(t)$ 及 $h(t)$ 的表示式代入式(3-82), 从而得

$$\begin{aligned} f(t) &= \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s) \right] * \frac{T_s \omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{T_s \omega_c}{\pi} f(nT_s) [\delta(t - nT_s) * \text{Sa}(\omega_c t)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{T_s \omega_c}{\pi} f(nT_s) \text{Sa}[\omega_c(t - nT_s)] \end{aligned} \quad (3-83)$$

当抽样间隔 $T_s = \frac{1}{2f_m}$ 时, $f(t)$ 可简化为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s) \text{Sa}[\omega_m(t - nT_s)] \quad (3-84)$$

上式表明, 连续时间信号 $f(t)$ 可以由无数多个位于抽样点 nT_s 的 Sa 函数组成, 其各个

图 3-37 $f(t)$ 的恢复

Sa 函数的幅值为该点的抽样值 $f(nT_s)$ 。因此, 只要知道各抽样点的样值 $f(nT_s)$, 就可唯一地确定 $f(t)$ 。这个过程见图 3-37。

例 3-15 黑白电视每秒发送 30 幅图像, 每幅图像又分为 525 条水平扫描线, 每条水平线又在 650 个点上采样。求采样频率 f_s 。若此频率为奈奎斯特频率, 求黑白电视信号的最高频率 f_m 。

解 采样频率, 即每秒传送的采样点数

为
因
故

$$f_s = 30 \times 525 \times 650 = 10\,237\,500 \text{ Hz}$$

$$f_s = 2f_m$$

$$f_m = f_s/2 \approx 5 \text{ MHz}$$

例 3-16 图 3-38(a)所示系统。已知 $f_0(t) = \frac{\omega_m}{\pi} \text{Sa}(\omega_m t)$, 系统 $H_1(j\omega)$ 的频率特性如图 3-38(b)所示。 $H_2(j\omega)$ 为一个理想低通滤波器。

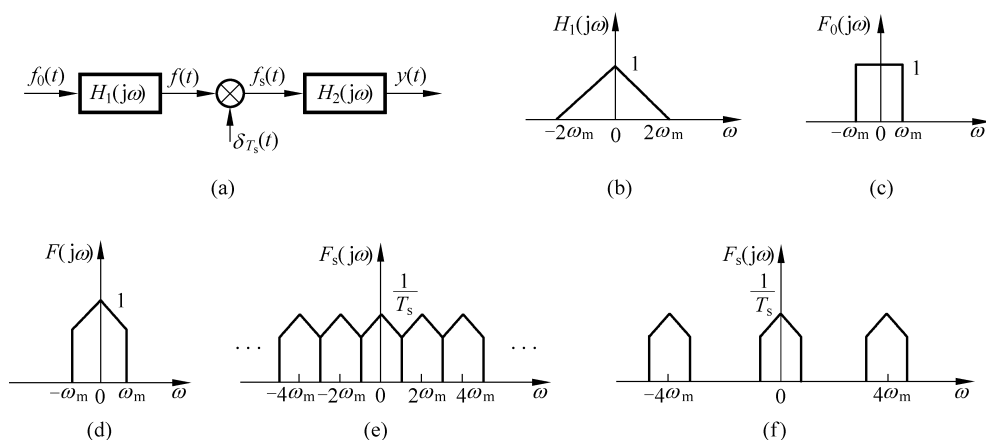


图 3-38 例 3-16 图

- (1) 画出 $f(t)$ 的频谱图。
- (2) 若使 $f_s(t)$ 包含 $f(t)$ 的全部信息, $\delta_{T_s}(t)$ 的最大间隔 T_s 应为多少?
- (3) 分别画出在奈奎斯特频率及 $\omega_s = 4\omega_m$ 时抽样信号的频谱图 $F_s(j\omega)$;
- (4) 在 $\omega_s = 4\omega_m$ 情况下, 若 $y(t) = f(t)$, 则理想低通滤波器截止角频率应为多少? 幅频特性应具有何种形式?

解 (1) 由给出的 $f_0(t)$ 可知, 其频谱 $F_0(j\omega)$ 为

$$F_0(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_m \\ 0, & |\omega| > \omega_m \end{cases}$$

如图 3-38(c)所示。由

$$F(j\omega) = F_0(j\omega)H_1(j\omega)$$

可画出 $F(j\omega)$, 如图 3-38(d)所示。

(2) 根据时域抽样定理, 抽样频率应满足

$$2\pi f_s \geq 2\omega_m$$

即

$$2\pi/T_s \geq 2\omega_m, \quad T_s \leq \frac{\pi}{\omega_m}$$

所以最大间隔 T_s 应为 π/ω_m , 即奈奎斯特间隔。

(3) 奈奎斯特频率是 $\omega_s = 2\omega_m$ 。由抽样定理, 可分别画出 $\omega_s = 2\omega_m$ 和 $\omega_s = 4\omega_m$ 时抽样信号的频谱 $F_s(j\omega)$, 如图 3-38(e), (f)所示。

(4) 若 $y(t)=f(t)$, 则应有 $Y(j\omega)=F(j\omega)$, 故理想低通滤波器的截止角频率 ω_c 应满足 $\omega_m \leq \omega_c \leq (\omega_s - \omega_m)$, 一般取 $\omega_c = \omega_s/2$ 。其频率特性应为

$$H_2(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



视频 3-7
抽样定理例题

3.7 调制与解调

在信号传输系统中,调制与解调理论应用非常广泛。比如音频信号,由于其频率范围在 20 Hz~20 kHz 内较低,在空气中传输时会急剧衰减而无法传输到较远的距离。另外,无线通信是依靠空间辐射传输信号的,发射天线的尺寸必须大于辐射信号波长的十分之一才能有效传输,对于音频信号设置几十千米的天线显然不现实。因此需要通过调制提高其频率,应用解调使其信号恢复。而调制和解调的基本原理是利用信号与系统的频域分析和傅里叶变换的基本性质,将信号的频谱搬移,使之互不重叠地占据不同的频率范围,从而完成信号的传输或处理。本节仅介绍有关应用的基本概念。

3.7.1 调制

一个调制系统,就是由一个信号去控制另一个信号的某一个参量。图 3-39 所示为一幅度调制(amplitude-modulation)系统。幅度调制简称调幅(AM)。图中 $f(t)$ 为调制信号,亦即待传输或处理的信号, $\cos\omega_0 t$ 是高频正弦信号,称为载波信号, ω_0 为载波角频率。因此,由该系统输出的响应 $y(t)$ 为

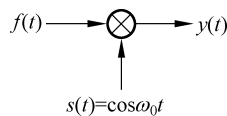


图 3-39 调制系统

$$y(t) = f(t)s(t) = f(t)\cos\omega_0 t$$

可见, $y(t)$ 是一个幅度随 $f(t)$ 变化的高频正弦振荡信号,故称为调幅信号。调制信号 $f(t)$ 可以是连续信号,像广播系统的语言信号;也可以是脉冲信号,像雷达系统的调制脉冲。

若调制信号 $f(t)$ 为语言信号,其频谱函数为 $F(j\omega)$, 占据有限带宽 $(-\omega_0 \sim +\omega_0)$, 则系统的输出

$$y(t) = f(t)\cos\omega_0 t$$

可由频域卷积定理,得到调制系统输出信号 $y(t)$ 的频谱函数

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * S(j\omega)$$

式中

$$S(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

所以

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2} F[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} F[j(\omega + \omega_0)] \quad (3-85)$$

式(3-85)表明调幅信号 $y(t)$ 的频谱函数只含有原信号 $f(t)$ 的信息,不包含载波成

分,因此称为抑制载波调幅系统。

图 3-40 表明调幅信号 $f(t)\cos\omega_0 t$ 的频谱和调制信号的频谱形状一样,只是搬移到 $\pm\omega_0$ 处,即所需的高频范围内。调制过程是一次频谱搬移,得到的是一个调制的高频信号,这种经过调制的高频信号很容易以电磁波形式辐射传播。

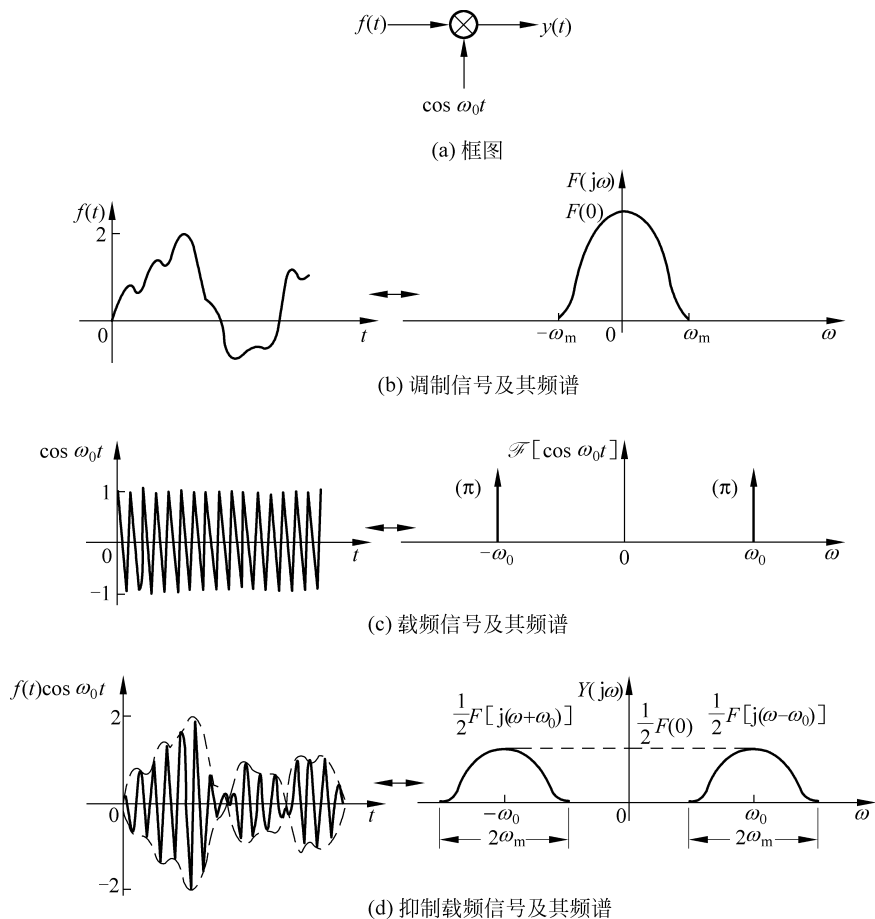


图 3-40 抑制载波调幅及其频谱

除幅度调制外,还有频率调制和相位调制,它们比幅度调制具有更好的抑制噪声和抗干扰能力,读者可参阅其他文献学习,在此不作介绍。

3.7.2 同步解调

从已调的高频调幅信号 $y(t)$ 中恢复原调制信号 $f(t)$ 的过程称为解调,解调系统如图 3-41 所示。

图 3-41 中, $y(t)=f(t)\cos\omega_0 t$ 是已调信号,系统中的高频信号 $\cos\omega_0 t$ 称本机振荡(或本地振荡),它与原调幅的载波信号必须严格同频率同相位,保持严格同步,即同步解

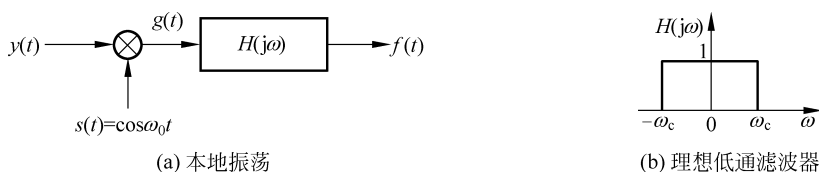


图 3-41 解调系统

调。其次,要求理想低通滤波器的截止角频率 ω_c 必须满足条件

$$\omega_m < \omega_c < 2\omega_0 - \omega_m \quad (3-86)$$

其频率特性为

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

解调器的本地振荡 $\cos\omega_0 t$ 与已调信号 $y(t)$ 的乘积,即把系统接收到的调幅信号经本地载波信号再调制为

$$g(t) = y(t)s(t) = f(t)\cos^2\omega_0 t = \frac{1}{2}[f(t) + f(t)\cos 2\omega_0 t]$$

上式两端取傅里叶变换得

$$G(j\omega) = \frac{1}{2}F(j\omega) + \frac{1}{4}[j(\omega + 2\omega_0)] + \frac{1}{4}F[j(\omega - 2\omega_0)] \quad (3-87)$$

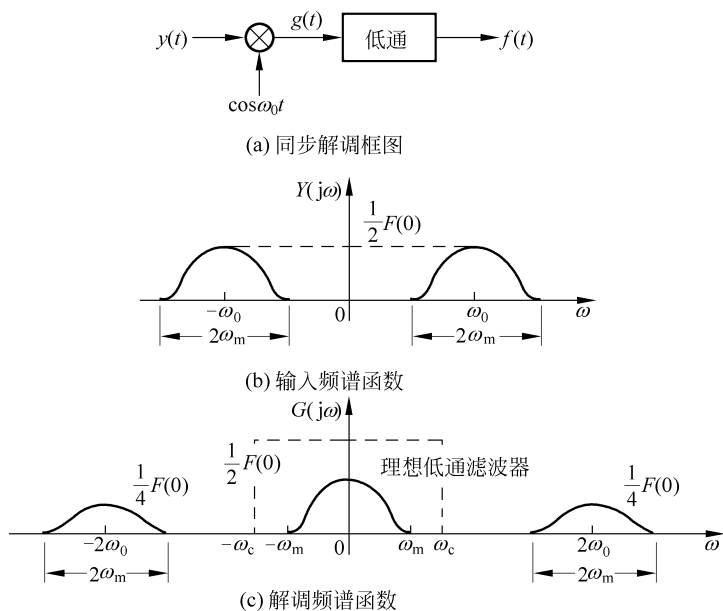


图 3-42 同步解调的框图及频谱

从图 3-42 中可清楚地看到,已调高频信号 $y(t)$ 经过再调制,频谱函数 $Y(j\omega)$ 再经过频谱搬移,使 $F(j\omega)$ 在 $\omega = 0$ 处再现,利用理想低通滤波器可以把 $g(t)$ 频率高于 ω_m 的高频信号抑制掉,从而恢复了原信号 $f(t)$ 。这种同步解调系统简单经济、可节省大功率的

发射设备,适用于定点之间的通信。

3.8 频分复用与时分复用

信号从一个地点传输到另一地点要借助于媒介,该媒介称为信道。信道若是广阔的空间,则称为无线电通信。信道若是传输线,则称为有线电通信。被传送的信号带宽与信道频段宽度相比,是一个很小的有限值,因此,在一个信道内只传送一个信号显然是非常浪费的,但是如果把具有相同带宽的信号同时放到信道中,在接收端又无法将它们分开,则无法实现通信。下面将介绍的频分复用和时分复用,从中可以了解现代通信是如何复用同一信道而传送多路信号的。

复用是指将若干个彼此独立的信号合并成可在同一信道上传输的复合信号的方法,常见的信号复用采用按频率区分与按时间区分的方式,前者称为频分复用,后者称为时分复用。

3.8.1 频分复用

通常在通信系统中,将信道的带宽分割成不同的频段,每一频段传送一路信号,这就是频分复用(Frequency Division Multiple Access, FDMA)。为此,在发送端首先要对各路信号进行调制将其频谱函数搬移到相应的频段内,使之互不重叠。再送入信道一并传输。在接收端则采用不同通带的带通滤波器将各路信号分隔,然后再分别解调,恢复各路信号。

图 3-43 是频分复用系统的示意图。如图 3-43 所示, $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ 为 n 路低频信号,通过调制器将各路信号的频谱经过频谱搬移,搬至各自的载频处,但互不重叠,即信号互不干扰经过信道传输。欲将各路信号从合成信号 $g(t)$ 中分离出来,首先要选择相应的带通滤波器,使各路的已调信号无失真地通过自己的通道,再进行解调,恢复各路原信号 $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ 。

频分复用系统最大优点是信道复用率高,允许复用路数较多,系统组成原理简单,是模拟通信中主要的一种复用方式,在有线与微波通信系统中应用十分广泛。频分复用的缺点是设备生产较为复杂,同时因滤波器特性不够理想,及信道内存在的非线性容易产生路间干扰。

3.8.2 时分复用

时分多路复用的基础是抽样定理。多路的连续时间信号经矩形脉冲序列抽样后,得到了离散的抽样值,把各路信号的抽样值有序地排列起来,就可以实现时分复用(Time Division Multiple Access, TDMA)。图 3-44 表示了三路信号抽样脉冲互不重叠穿插排列的示意图。

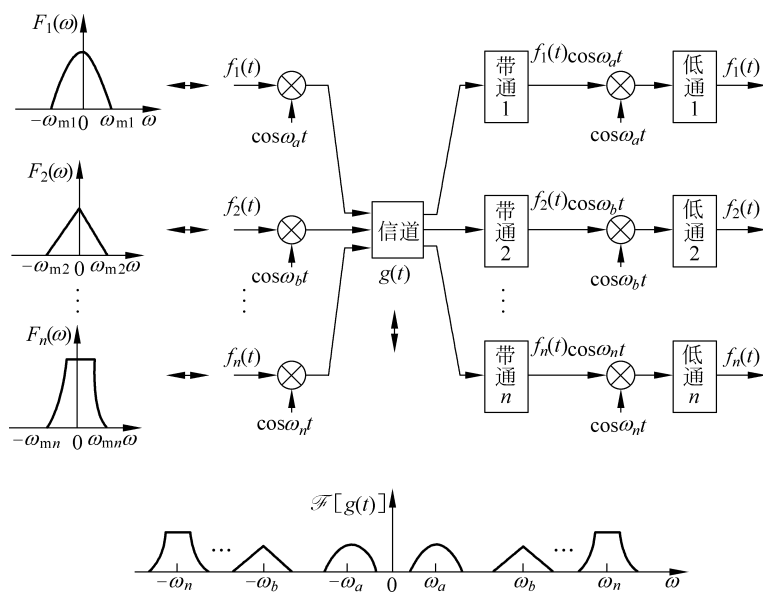


图 3-43 频分复用系统

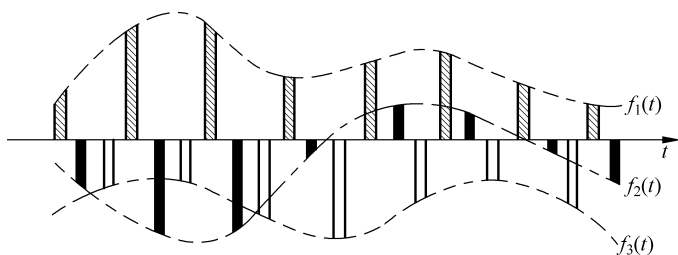


图 3-44 三路信号的时分复用

由此可见,时分复用是将所有的信号分配在不同的时间区域,如果要进行高频发射,还需要进行频谱搬移。图 3-45 所示为三路时分复用系统原理图。

图 3-45 中各路输入信号 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 和 $f_3(t)$ 是限带信号,加到合路转换开关(一般用电子开关电路),完成对信号的抽样和抽样值的有序排列,然后经过调制,将已调制信号通过信道传输到接收端。接收的复用信号先经过解调器变换成样值信号,最后由分路转换开关,按顺序将各路样值信号分别送入各自的低通滤波器,从而恢复成原信号 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 和 $f_3(t)$ 。

从以上的分析可以看出,分路转换开关与合路转换开关、调制器与解调器必须同步运行,才能无失真地恢复原信号。也就是说,同步对时分复用系统来说是至关重要的。时分复用易于实现系统小型化、集成化、便于保密,时分复用和计算机技术的结合极大地促进了数字通信的发展。

通过对频分复用和时分复用的分析,可以初步了解频分复用和时分复用在时间与频率通信空间的关系。时间-频率通信空间示意图如图 3-46 所示。图 3-46(a)说明了频分

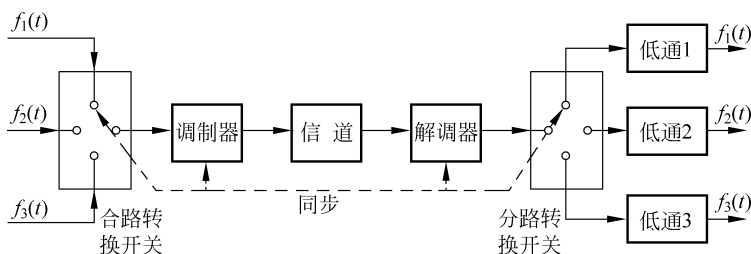


图 3-45 三路时分复用系统原理图

复用是表示每路信号在所有时间里都存在于信道中,混在一起,但是每路信号独自占据有限的不同频率区间。图 3-46(b)说明了时分复用是表示每路信号占据不同的时间区间,但所有信号的频谱可以具有同一频率区间的分量。

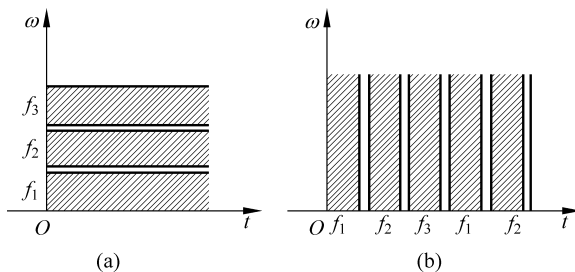


图 3-46 时间-频率通信空间示意图

从电路实现方面看,时分复用系统优于频分复用系统。时分复用系统中产生与恢复各路信号的电路结构相同,且以数字电路为主,易于大规模集成实现。而在频分复用系统中,为了分离相互混杂的系统,在接收端需要设计不同的带通滤波器,实现相对较复杂。

3.9 连续系统的频域分析

第 2 章中介绍了系统的时域分析方法,它是以单位冲激信号 $\delta(t)$ 和单位阶跃信号 $\epsilon(t)$ 作为基本信号,基于系统的线性时不变性导出的一种分析方法。本节将以虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 作为基本信号,同样地,基于系统的线性叠加性质导出另一种计算零状态响应的分析方法,即频域分析方法。

从系统的时域分析可知,对一个线性时不变系统外加激励信号 $f(t)$,则该系统的零状态响应为 $y_i(t)$, $y_i(t)$ 等于 $f(t)$ 与系统单位冲激响应 $h(t)$ 的卷积,即

$$y_i(t) = f(t) * h(t) \quad (3-88)$$

可见,用时域法求系统响应时,要遇到求解卷积积分这样一个数学问题。通过傅里叶变换的时域卷积性质,对式(3-88)两端求傅里叶变换,显然有

$$Y_i(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) \quad (3-89)$$

式中, $H(j\omega)$ 为该系统单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换。与式(3-88)对照, 可得

$$y_f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y_f(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)H(j\omega)\} \quad (3-90)$$

应用式(3-90)求解系统零状态响应 $y_f(t)$ 的方法实质上就是所谓的频域分析法(frequency-domain analysis method)。频域分析法将时域法中的卷积运算变换成频域的相乘关系, 这给系统零状态响应的求解带来很大方便。当式(3-90)中傅里叶变换的正反变换均易求得时, 用系统的频域分析法求解系统零状态响应是一种较方便的方法。然而, 因频域分析方法只能求系统的零状态响应, 这使得它的应用有一定的局限性。

以上是关于求系统零状态响应频域法的简单讨论。从理论上讲, 是容易理解并被接受的, 然而其物理意义不是很明确。对照用时域法求解系统响应的分析过程, 下面从信号的分解和线性叠加的思路, 进一步讨论系统的频域分析法。

3.9.1 系统对周期与非周期信号的响应

1. 基本信号 $e^{j\omega t}$ 激励下的零状态响应

由信号 $f(t)$ 的傅里叶变换可知, 任意信号 $f(t)$ 可以表示为无穷多个虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 的线性组合, 即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-91)$$

式中, 各个虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 的系数大小可以看作是 $F(j\omega)d\omega/2\pi$; $F(j\omega)$ 是 $f(t)$ 的频谱函数, 即

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

既然任意信号 $f(t)$ 是由无穷多个基本信号 $e^{j\omega t}$ 组合而成, 那么欲求信号 $f(t)$ 激励下系统的零状态响应 $y_f(t)$, 应首先分析在基本信号 $e^{j\omega t}$ 激励下系统的零状态响应 $y_f(t)$ 。

设线性时不变系统的单位冲激响应为 $h(t)$, 根据时域分析公式(3-88), 系统对基本信号 $e^{j\omega t}$ 的零状态响应为

$$y_f(t) = e^{j\omega t} * h(t)$$

根据卷积积分的定义, 有

$$y_f(t) = e^{j\omega t} * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

上式中的积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ 正好是 $h(t)$ 的傅里叶变换, 记为 $H(j\omega)$, 即

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

通常, 称 $H(j\omega)$ 为系统函数, $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$ 。于是上式为

$$y_f(t) = H(j\omega) e^{j\omega t} = |H(j\omega)| e^{j[\omega t + \phi(\omega)]} \quad (3-92)$$

此结果表明: 一个线性时不变系统, 对基本信号 $e^{j\omega t}$ 的零状态响应是基本信号 $e^{j\omega t}$ 本

身乘以一个与时间 t 无关的常系数 $H(j\omega)$, $H(j\omega)$ 为该系统单位冲激响应 $h(t)$ 的频谱函数。式(3-92)是频域分析的基础。

2. 正弦周期信号激励下的零状态响应

正弦信号

$$f(t) = A \cos \Omega t = \frac{A}{2} (e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}) \quad -\infty < t < +\infty$$

由式(3-92)可知,此时系统的零状态响应

$$y_f(t) = \frac{A}{2} H(j\Omega) (e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}) = A |H(j\Omega)| \cos[\Omega t + \phi(\Omega)] \quad (3-93)$$

式中

$$H(j\Omega) = H(j\omega)|_{\omega=\Omega} = |H(j\Omega)| e^{j\phi(\Omega)}$$

所以,线性系统对正弦信号激励的响应是与激励同频率的正弦量,其振幅为激励的振幅与系统函数 $H(j\Omega)$ 模值之乘积,其相位为激励的初相位与系统函数 $H(j\Omega)$ 相位之和,这个结果与正弦稳态中相量法的分析结论完全一致。

3. 非正弦周期信号激励下的零状态响应

对于周期为 T 的非正弦周期信号 $f(t)$,可展开为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

式中

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

由式(3-92)和式(3-93),此时系统的零状态响应

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n H(jn\Omega) e^{jn\Omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n| |H(jn\Omega)| e^{j[n\Omega t + \phi(n\Omega) + \theta(n\Omega)]} \\ &= F_0 H(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 |F_n| |H(jn\Omega)| \cos[n\Omega t + \phi(n\Omega) + \theta(n\Omega)] \quad (3-94) \end{aligned}$$

式中

$$F_n = |F_n| e^{j\theta(n\Omega)}$$

$$H(jn\Omega) = |H(jn\Omega)| e^{j\phi(n\Omega)}$$

因此,当周期信号 $f(t)$ 作用于线性系统时,其零状态响应 $y_f(t)$ 仍然为一周期信号,其周期与 $f(t)$ 相同,将相应的指数型傅里叶级数扩大 $H(jn\Omega)$,就可得到 $y_f(t)$ 的三角型傅里叶级数。

由于周期信号是周而复始、无始无终的信号,当它作用于线性系统时,其激励作用的起点只能在 $t = -\infty$ 。这意味着由初始条件所引起系统储能的变化已消失,其零输入响应不存在。另外,系统响应中所有随时间而衰减的暂态分量也将由于时间的无穷延续而消逝,只有稳态分量存在。因此,正如式(3-94)所表示的,周期信号作用于系统的零状态

响应是稳态响应。所以,对于一个线性时不变渐近稳定电路,可根据电路分析课程中的谐波分析方法求其稳态响应。

下面从傅里叶变换的观点来研究周期信号作用于线性系统时响应的频谱。

因

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega)$$

故

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n H(jn\Omega) \delta(\omega - n\Omega) \quad (3-95)$$

式中

$$H(jn\Omega) = H(j\omega) \big|_{\omega=n\Omega}$$

可见,响应的频谱和激励信号的频谱一样,是由无穷项冲激序列 $\delta(\omega - n\Omega)$ 组成的,也是离散频谱,只是响应频谱的冲激强度被系统函数加权。

例 3-17 图 3-47(a) 所示电路,激励为电压 $u(t)$,响应为电流 $i(t)$ 。

- (1) 求系统函数 $H(j\omega)$;
- (2) 若激励 $u(t)$ 如图 3-47(b) 所示,求其响应 $i(t)$;
- (3) 确定响应的频谱密度函数 $I(j\omega)$,画出其频谱图。

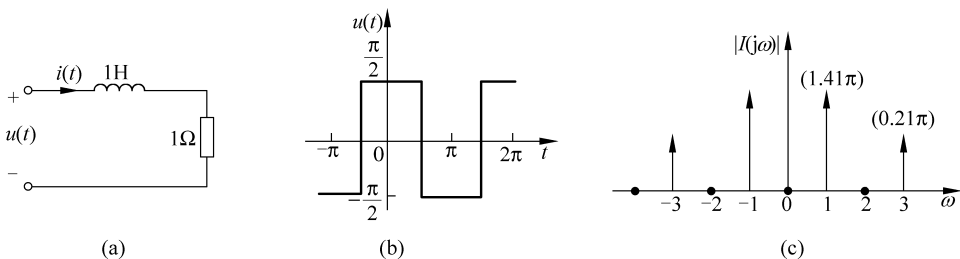


图 3-47 例 3-17 图

解 (1) 当 $u(t) = \delta(t)$ 时,列出电路的算子形式方程为

$$(p + 1)i(t) = \delta(t)$$

解出

$$i(t) = \frac{1}{p + 1} \delta(t)$$

冲激响应

$$h(t) = e^{-t} \epsilon(t)$$

故电路的系统函数

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

(2) 若激励 $u(t)$ 为图 3-47(b) 所示波形,有 $\Omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \text{ rad/s}$, $u(t)$ 可表示为

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} e^{jnt}$$

或

$$u(t) = 2\cos t - \frac{2}{3}\cos 3t + \frac{2}{5}\cos 5t + \dots$$

由式(3-94), 电流响应

$$\begin{aligned} i(t) &= 2 \left| \frac{1}{1+j} \right| \cos(t - \arctan 1) - \frac{2}{3} \left| \frac{1}{1+j3} \right| \cos(3t - \arctan 3) + \dots \\ &= 1.414\cos(t - 45^\circ) - 0.21\cos(3t - 71.6^\circ) + 0.08\cos(5t - 78.8^\circ) + \dots \end{aligned}$$

(3) 由式(3-95), 响应的频谱函数

$$\begin{aligned} I(j\omega) &= 2\pi \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} H(jn) \delta(\omega - n) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \frac{1}{jn+1} \delta(\omega - n) \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi}{n(jn+1)} \sin \frac{n\pi}{2} \delta(\omega - n) & n = \pm 1, \pm 3, \dots \\ 0 & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$I(j\omega)$ 的幅度频谱如图 3-47(c) 所示。

4. 非周期信号激励下的零状态响应

由于任意信号 $f(t)$ 可以表示为无穷多个基本信号 $e^{j\omega t}$ 的线性组合, 因而应用线性叠加性质不难得到任意信号 $f(t)$ 激励下系统的零状态响应。其推导过程如下

因为

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &\longrightarrow H(j\omega) e^{j\omega t} \\ \frac{1}{2\pi} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega &\longrightarrow \frac{1}{2\pi} F(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega &\longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} F(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

所以

$$f(t) \longrightarrow y_f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)H(j\omega)]$$

由此可得用频域分析法求解系统零状态响应的步骤为:

- ① 求输入信号 $f(t)$ 的频谱函数 $F(j\omega)$;
- ② 求系统函数 $H(j\omega)$;
- ③ 求零状态响应 $y_f(t)$ 的频谱函数 $Y_f(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega)$;
- ④ 求 $Y_f(j\omega)$ 的傅里叶反变换, 即得 $y_f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)H(j\omega)]$ 。

例 3-18 已知激励信号 $f(t) = (3e^{-2t} - 2)\varepsilon(t)$, 试求

图 3-48 所示电路中电容电压的零状态响应 $u_{Cf}(t)$ 。

解 信号 $f(t)$ 的频谱函数为

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{3}{2+j\omega} - 2 \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right]$$

从电路图中可以求得系统函数

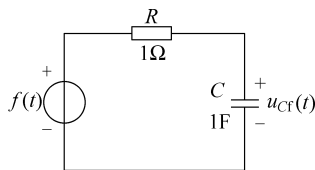


图 3-48 例 3-18 图

$$H(j\omega) = \frac{U_{cf}(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega}$$

因此可得

$$U_{cf}(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) = \frac{3}{(2 + j\omega)(1 + j\omega)} - \frac{2}{1 + j\omega} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right]$$

注意到 $\delta(\omega)$ 的取样性质, 并为了较方便地求得 $U_{cf}(j\omega)$ 的反变换, 将 $U_{cf}(j\omega)$ 按如下形式整理:

$$\begin{aligned} U_{cf}(j\omega) &= \frac{3}{(2 + j\omega)(1 + j\omega)} - 2\pi\delta(\omega) - \frac{2}{j\omega(1 + j\omega)} \\ &= \frac{3}{1 + j\omega} - \frac{3}{2 + j\omega} - 2\pi\delta(\omega) - \left(\frac{-2}{1 + j\omega} + \frac{2}{j\omega} \right) \\ &= \frac{5}{1 + j\omega} - \frac{3}{2 + j\omega} - 2 \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \end{aligned}$$

从而求得零状态响应

$$u_{cf}(t) = \mathcal{F}^{-1}[U_{cf}(j\omega)] = (5e^{-t} - 3e^{-2t} - 2)\varepsilon(t)$$

3.9.2 频域系统函数

1. 定义

系统函数 $H(j\omega)$ 可由式(3-89)定义为

$$H(j\omega) = \frac{Y_f(j\omega)}{F(j\omega)}$$

系统函数 $H(j\omega)$ 等于零状态响应的频谱函数 $Y_f(j\omega)$ 与输入激励的频谱函数 $F(j\omega)$ 之比, 即电路分析中的网络函数或传输函数。随着激励信号与待求响应的关系不同, 在电路分析中 $H(j\omega)$ 将有不同的含义。它可以是阻抗函数、导纳函数、转移电压比或电流比等。

2. $H(j\omega)$ 的物理意义

$H(j\omega)$ 是系统单位冲激响应的频谱函数, 考虑到

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$H(j\omega)$ 理解为将 $h(t)$ 分解为无穷多个指数信号之和时, 其相应的频率密度函数。

由式(3-92)可知, $H(j\omega)$ 的另一个物理意义是: 当激励为 $e^{j\omega t}$ 时, 系统零状态响应的加权函数, 并且零状态响应 $y_f(t)$ 随时间 t 的变化规律与 $e^{j\omega t}$ 的变化规律完全相同, 仅差一个加权函数 $H(j\omega)$ 。

3. $H(j\omega)$ 的求法

频域系统函数 $H(j\omega)$ 的求解方法主要有:

(1) 当给定激励与零状态响应时,根据定义求,即

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}$$

(2) 当已知系统单位冲激响应 $h(t)$ 时

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

(3) 当给定系统的电路模型时,用正弦稳态分析的相量法求;

(4) 当给定系统的数学模型(微分方程)时,用傅里叶变换法求。

例 3-19 求图 3-49(a)所示电路的频域系统函数。

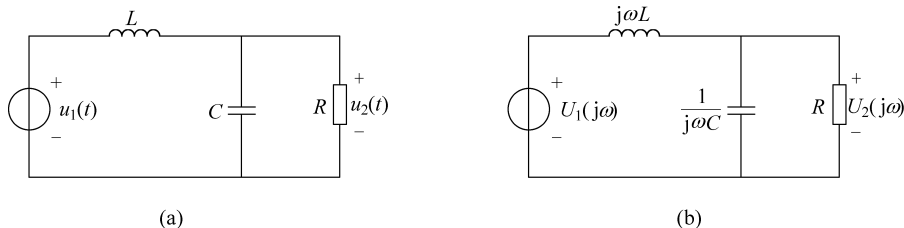


图 3-49 例 3-19 图

解 原电路的相量模型如图 3-49(b)所示,有

$$U_2(j\omega) = \frac{U_1(j\omega)}{j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}R} \frac{1}{j\omega C} + R} \frac{1}{j\omega C}R$$

故

$$H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2 LC + j\omega \frac{L}{R} + 1}$$

系统的频域分析类似正弦稳态分析中的相量法,但其与电路中的相量法有着本质的区别。电路中的相量代表某一频率的正弦量,单一角频率 ω 由正弦电源频率唯一确定;频域分析时系统的输入是任意信号,它包含了所有频率分量,角频率 ω 是个变量。

例 3-20 已知描述系统的微分方程为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = f(t)$$

求系统函数 $H(j\omega)$ 。

解 对原微分方程两边取傅里叶变换,并根据时域微分性质,可得

$$[(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2]Y(j\omega) = F(j\omega)$$

所以

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2 + j3\omega + 2} = \frac{1}{(2 - \omega^2) + j3\omega}$$

3.9.3 频域分析的应用举例

例 3-21 图 3-50(a)所示系统的周期激励 $f(t)$ 如图 3-50(b)所示,系统幅频特性如图 3-50(c)所示,相频特性 $\phi(\omega)=0$,求系统的零状态响应 $y_f(t)$ 。

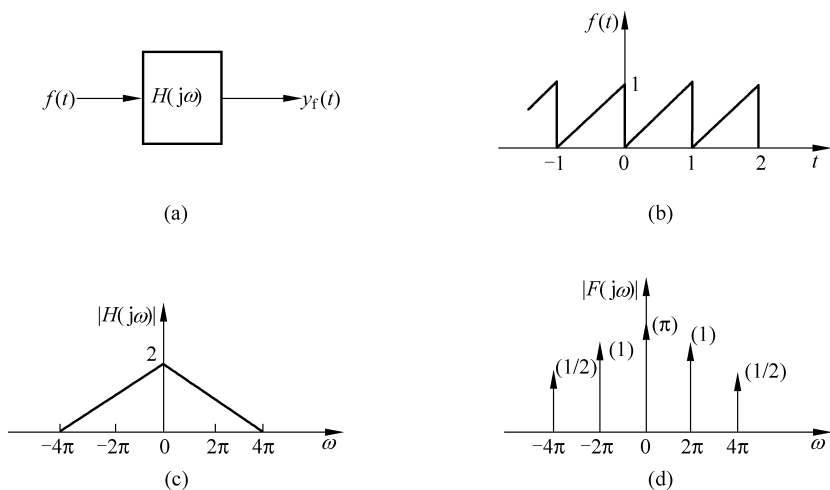


图 3-50 例 3-21 图

解 由于激励 $f(t)$ 为周期信号,故系统零状态响应仅含稳态响应。因为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

式中, $\Omega=2\pi$; $F_0=1/2$; $F_n = \frac{j}{2n\pi}$ 。其频谱函数

$$F(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{j}{n} \delta(\omega - 2n\pi) + \pi\delta(\omega) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{j}{n} \delta(\omega - 2n\pi)$$

其幅度频谱如图 3-50(d)所示。故

$$Y_f(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) = -j\delta(\omega + 2\pi) + 2\pi\delta(\omega) + j\delta(\omega - 2\pi)$$

所以,系统响应为

$$y_f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y_f(j\omega)\} = 1 - j \frac{e^{-j2\pi t}}{2\pi} + j \frac{e^{j2\pi t}}{2\pi} = 1 - \frac{1}{\pi} \sin 2\pi t \quad -\infty < t < +\infty$$

例 3-22 对于图 3-51(a)所示系统,已知

$$f(t) = \frac{\sin 2t}{2\pi t} \quad -\infty < t < +\infty$$

$$s(t) = \cos 1000t \quad -\infty < t < +\infty$$

系统函数 $H(j\omega)$ 的幅频特性如图 3-51(b)所示,相频特性 $\phi(\omega)=0$ 。求零状态响应 $y(t)$ 。

解 因

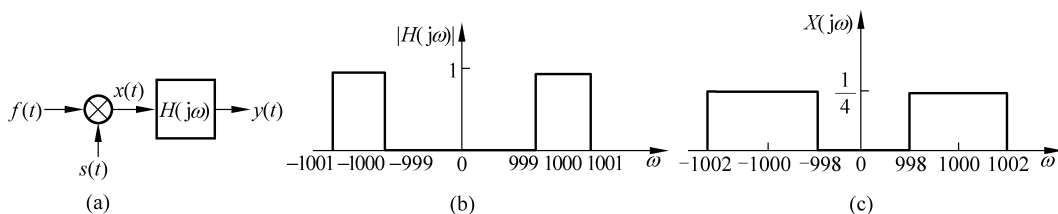


图 3-51 例 3-22 图

$$4 \frac{\sin 2t}{2t} \longleftrightarrow 2\pi G_4(\omega)$$

故

$$F(j\omega) = \frac{1}{2}G_4(\omega)$$

$$S(j\omega) = \pi[\delta(\omega + 1000) + \delta(\omega - 1000)]$$

又

$$x(t) = f(t)s(t)$$

由频域卷积定理

$$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi}F(j\omega) * S(j\omega) = \frac{1}{4}[G_4(\omega + 1000) + G_4(\omega - 1000)]$$

其频谱如图 3-51(c)所示。

$$\begin{aligned} \text{由} \quad Y(j\omega) &= X(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{4}H(j\omega) \\ &= \frac{1}{4\pi}G_2(\omega) * \pi[\delta(\omega + 1000) + \delta(\omega - 1000)] \\ &= \frac{1}{2\pi}F_1(j\omega) * F_2(j\omega) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} F_1(j\omega) &= \frac{1}{2}G_2(\omega) \longleftrightarrow f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin t}{t} \\ F_2(j\omega) &= \pi[\delta(\omega + 1000) + \delta(\omega - 1000)] \longleftrightarrow f_2(t) = \cos 1000t \end{aligned}$$

所以

$$y(t) = f_1(t)f_2(t) = \frac{\sin t}{2\pi t} \cos 1000t$$

3.9.4 无失真传输条件

从以上分析可知,在一般情况下,系统的响应与所加激励波形不相同。也就是说,信号在传输过程中产生了失真。

1. 失真的概念

如果信号通过系统传输时,其输出波形发生畸变,称为失真。反之,若信号通过系统只引起时间延迟及幅度增减,而形状不变,则称不失真,如图 3-52 所示。

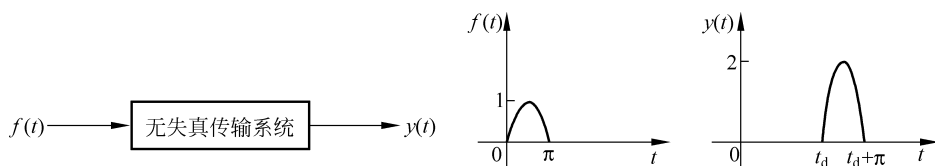


图 3-52 系统的无失真传输

通常把失真分为两大类:一类为**线性失真**(linear distortion),另一类为**非线性失真**(nonlinear distortion)。

信号通过线性系统所产生的失真称线性失真。其特点是在响应 $y(t)$ 中不会产生新频率。也就是说,组成响应 $y(t)$ 的各频率分量在激励信号 $f(t)$ 中都含有,只不过各频率分量的幅度、相位不同而已。反之, $f(t)$ 中的某些频率分量在 $y(t)$ 中可能不再存在。如图 3-53 所示的失真就是线性失真,对 $y(t)$ 与 $f(t)$ 求傅里叶变换可知, $y(t)$ 中决不会有 $f(t)$ 中不含有的频率分量,但是 $f(t)$ 中的高频分量得到了抑制,通过系统分析知道此电路具有低通滤波特性。

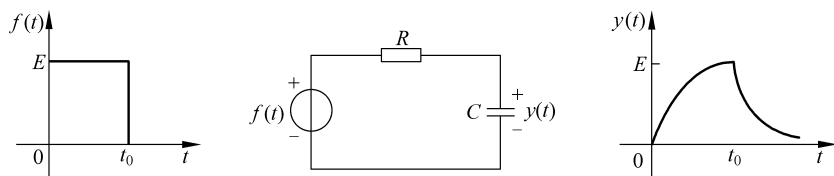


图 3-53 线性失真

信号通过非线性电路所产生的失真称为非线性失真。其特点是在响应 $y(t)$ 中产生了信号 $f(t)$ 中所没有的新的频率成分。如图 3-54 所示,其输入信号 $f(t)$ 为单一正弦波, $f(t)$ 中只含有 f_0 的频率分量,经过非线性元件二极管后得到的半波整流信号,在波形上产生了失真,在频谱上产生了由无穷多个 f_0 倍的谐波分量构成的新频率,这就是非线性失真。

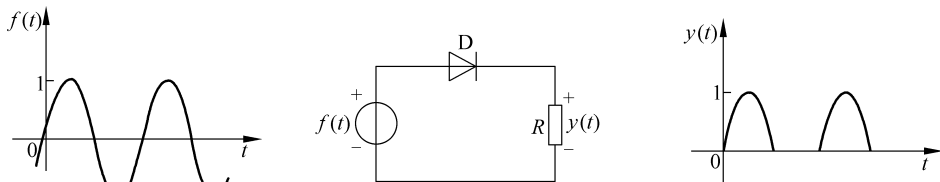


图 3-54 非线性失真

在实际应用中,有时需要有目的地利用系统进行波形变换,这样必然产生失真,如果这种失真是我们需要的,可以不做处理。但多数希望信号无失真地传输,这就要讨论无失真传输的条件。

2. 无失真传输条件

从图 3-52 可以得到,要求信号 $f(t)$ 无失真地传输,在时域上 $y(t)$ 与 $f(t)$ 之间应满足

$$y(t) = Kf(t - t_d) \quad (3-96)$$

式中,幅度增量 K 及延迟时间 t_d 均为常数。这样,输出 $y(t)$ 在幅度上比 $f(t)$ 增大了 K 倍(当 $0 < K < 1$ 时,幅度实际上是压缩了 K 倍),在时间上滞后了 t_d 秒,波形的样子没有畸变,因而称为不失真传输。式(3-96)为系统不失真传输在时域中的条件。对式(3-96)两端求傅里叶变换,有

$$Y(j\omega) = KF(j\omega)e^{-j\omega t_d}$$

由于

$$Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega)$$

从而不难得到系统不失真传输在频域的条件为

$$H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_d} \quad (3-97)$$

即系统无失真传输在频域中的幅频、相频条件为

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = K \\ \phi(\omega) = -\omega t_d \end{cases} \quad (3-98)$$

式(3-98)表明:欲使信号通过线性系统不失真传输,应使系统函数的模值为常数,而相位特性为过原点的直线,如图 3-55 所示。

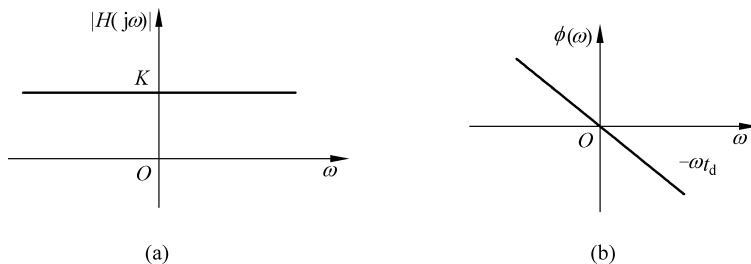


图 3-55 系统不失真传输的幅频、相频条件

例 3-23 要使图 3-56(a)所示电路为一个无失真传输系统,试确定 R_1 和 R_2 的值,已知激励为正弦稳态函数。

解 图 3-56(a)电路的相量模型如图 3-56(b)所示。由相量法可得

$$Y(j\omega) = \frac{(R_1 + j\omega)\left(R_2 + \frac{1}{j\omega}\right)}{R_1 + R_2 + j\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)} F(j\omega)$$

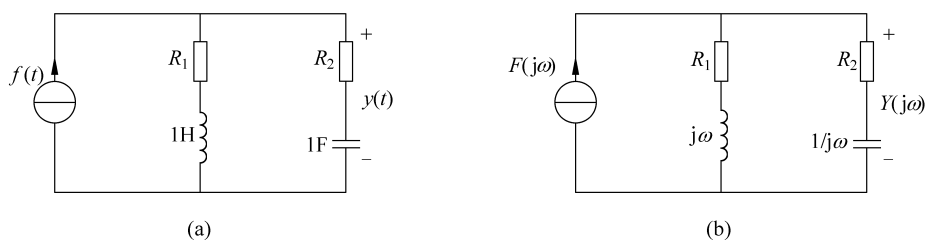


图 3-56 例 3-23 图

故系统函数

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{(R_1 R_2 + 1) + j(\omega R_2 - R_1/\omega)}{(R_1 + R_2) + j(\omega - \frac{1}{\omega})}$$

若该电路为一个无失真传输系统,则应满足式(3-98),即

$$|H(j\omega)| = K$$

$$\phi(\omega) = -\omega t_d$$

可见,当 $R_1 = R_2 = 1 \Omega$ 时,可满足此条件,即

$$|H(j\omega)| = 1$$

$$\phi(\omega) = 0$$

所以

$$R_1 = R_2 = 1 \Omega$$

3.9.5 理想低通滤波器

具有图 3-57 所示幅频、相频特性的系统称为理想低通滤波器,它将低于某一角频率 ω_c 的信号无失真地传送,而阻止角频率高于 ω_c 的信号通过,其中 ω_c 称为截止角频率。能使信号通过的频率范围称为通带,阻止信号通过的频率范围称为阻带或阻带。

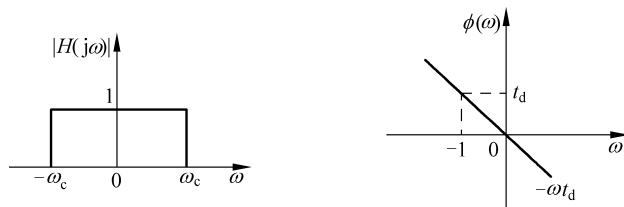


图 3-57 理想低通滤波器的系统函数

由图 3-57 可知,理想低通滤波器的系统函数为

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_d}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (3-99)$$

其中, ω_c 为截止角频率, t_d 为延迟时间。

由 $H(j\omega)$ 的物理意义可知, 对式(3-99)直接求傅里叶反变换则可得理想低通滤波器的冲激响应, 即

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega t_d} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_d)} d\omega \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t-t_d)] \end{aligned}$$

理想低通滤波器的冲激响应 $h(t)$ 如图 3-58 所示。

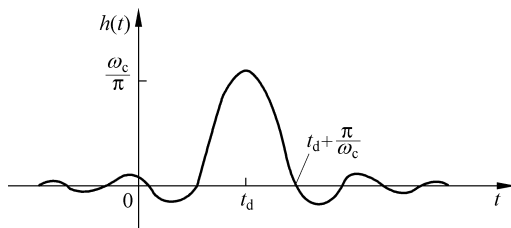


图 3-58 理想低通滤波器的冲激响应

由图 3-58 可以看到, 理想低通滤波器的冲激响应 $h(t)$ 与激励信号 $\delta(t)$ 对照, 波形产生失真。这是由于将 $\delta(t)$ 中 $|\omega| > \omega_c$ 的频率成分全部抑制后所产生的结果, 此种失真为线性失真。同时还可看到冲激响应 $h(t)$ 在 $t=0$ 之前已经出现。这在物理上是不符合因果关系的, 因为 $\delta(t)$ 是在 $t=0$ 时才加入, 而由 $\delta(t)$ 所产生的响应 $h(t)$ 不应出现在加入 $\delta(t)$ 之前。可见, 理想低通滤波器在物理上是无法实现的。尽管理想低通滤波器(包括其他理想滤波器)是物理不可实现的, 但其在信号的分析与处理中以及实际滤波器的分析和设计中, 均具有极其重要的理论指导价值。下面简单分析图 3-53 所示实际应用中较为广泛而又简单的 RC 低通滤波器。

画出图 3-53 电路如图 3-59(a)所示。

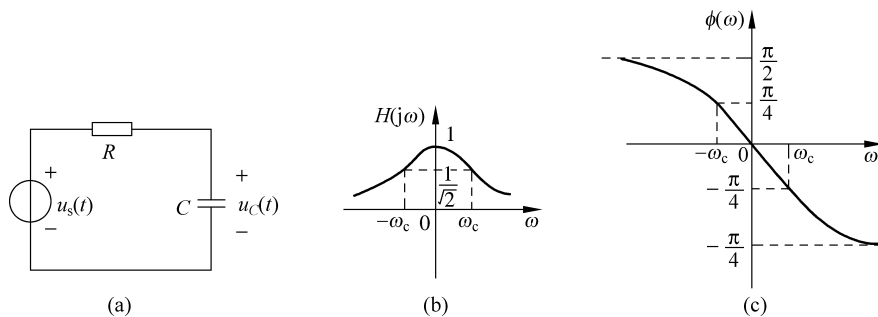


图 3-59 RC 低通滤波器

可得系统函数

$$H(j\omega) = \frac{-j \frac{1}{\omega C}}{R - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

其幅频特性和相频特性分别为

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

相应的幅频特性曲线和相频特性曲线分别如图 3-59(b)、(c)所示。 ω_c 为截止角频率,其定义为信号幅值降为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 处的频率,此处角频率 $\omega_c = \frac{1}{RC}$ 。

上述低通滤波器与理想低通滤波器相比有一定差别,读者可通过相关知识学习,设计更加逼近理想而又可实现的低通滤波器。

一般来说,一个系统是否为物理可实现的,可用下面的准则来判断。

在时域,要求系统的冲激响应满足因果条件,即

$$h(t) = 0, \quad t < 0 \quad (3-100)$$

在频域,有一个佩利-维纳准则,即 $H(j\omega)$ 物理可实现的必要条件是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < +\infty \quad (3-101)$$

由上式可知, $|H(j\omega)|$ 可以在某些离散点上为零,但不能在某一有限频带内为零,这是因为在 $|H(j\omega)| = 0$ 的频带内, $\ln |H(j\omega)| = +\infty$ 。由此可见,所有理想滤波器都是物理不可实现的。

例 3-24 图 3-60(a)所示系统, $f(t)$ 为被传送的信号, 设其频谱 $F(j\omega)$ 如图 3-60(b)所示, $s_1(t) = s_2(t) = \cos\omega_0 t$, $s_1(t)$ 为发送端的载波信号, $s_2(t)$ 为接收端的本地振荡信号。

- (1) 求解并画出信号 $y_1(t)$ 的频谱 $Y_1(j\omega)$;
- (2) 求解并画出信号 $y_2(t)$ 的频谱 $Y_2(j\omega)$;
- (3) 今欲使输出信号 $y(t) = f(t)$, 求理想低通滤波器的传递函数 $H(j\omega)$, 并画出其图形。

解 (1) 由于 $y_1(t) = f(t)s_1(t) = f(t)\cos\omega_0 t$
则由频谱搬移特性可知

$$\begin{aligned} Y_1(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * [\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} F[j(\omega + \omega_0)] + \frac{1}{2} F[j(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

其频谱如图 3-60(c)所示。



视频 3-8 信号通过
低通滤波器实验

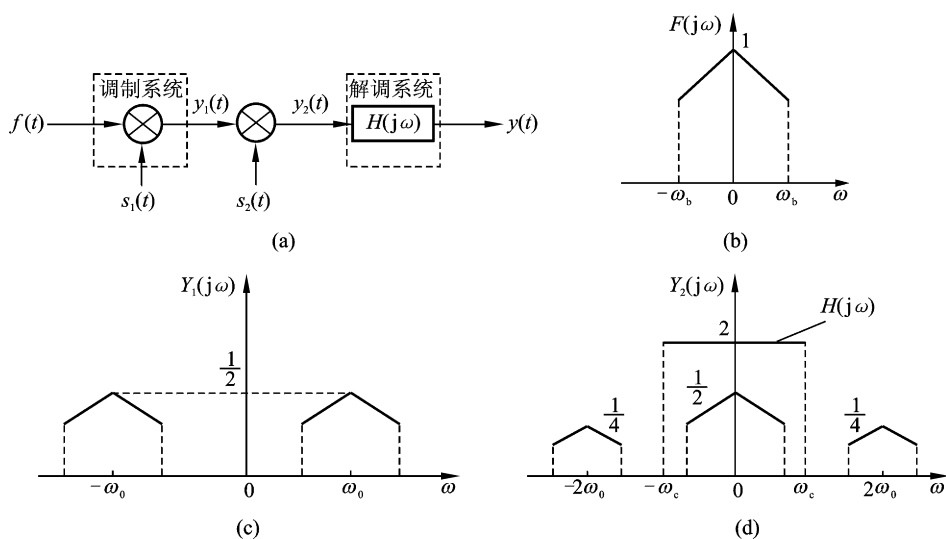


图 3-60 例 3-24 图

$$(2) \text{ 由于 } y_2(t) = y_1(t)s_2(t) = f(t)\cos\omega_0 t \cos\omega_0 t = \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}f(t)\cos 2\omega_0 t$$

则由频谱搬移特性可知

$$\begin{aligned} Y_2(j\omega) &= \frac{1}{2}F(j\omega) + \frac{1}{4\pi}F(j\omega) * [\pi\delta(\omega + 2\omega_0) + \pi\delta(\omega - 2\omega_0)] \\ &= \frac{1}{2}F(j\omega) + \frac{1}{4}F[j(\omega + 2\omega_0)] + \frac{1}{4}F[j(\omega - 2\omega_0)] \end{aligned}$$

其频谱包含着原信号 $f(t)$ 的全部信息,如图 3-60(d)所示。

(3) 欲使 $y(t) = f(t)$, 理想低通滤波器的传递函数 $H(j\omega)$ 应如图 3-60(d) 的虚门框所示, 即

$$H(j\omega) = 2G_{2\omega_c}(\omega)$$

其中截止角频率 ω_c 应满足条件

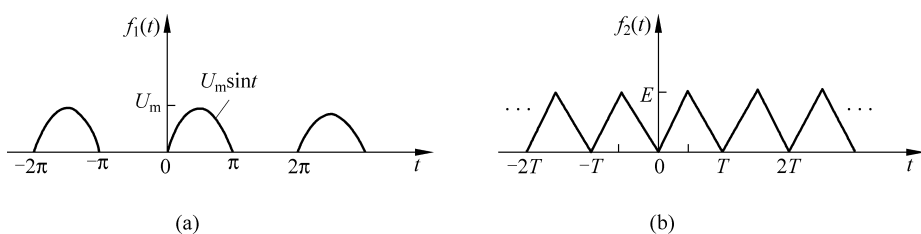
$$\omega_b \leq \omega_c \leq 2\omega_0 - \omega_b$$

评注 该题是信号传输系统调制与解调理论应用的基本概念, 调制与解调的基本原理是利用信号与系统的频域分析和傅里叶变换的基本性质, 将信号的频谱搬移, 使之互不重叠地占据不同的频率范围, 从而完成信号的传输与处理。为提高信道的传输效率, 通信工程中往往采用频分复用和时分复用等技术。

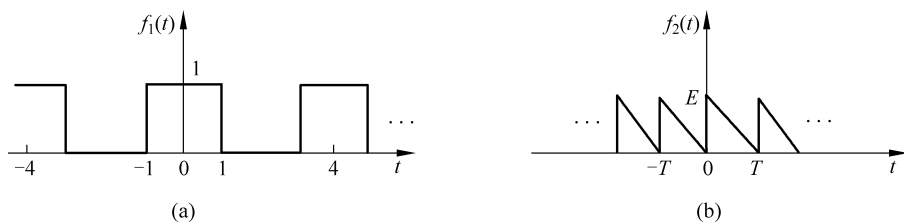
习题

3-1 将题图 3-1 所示信号 $f(t)$ 展开为三角型傅里叶级数。

3-2 将题图 3-2 所示信号展开为指数型傅里叶级数。

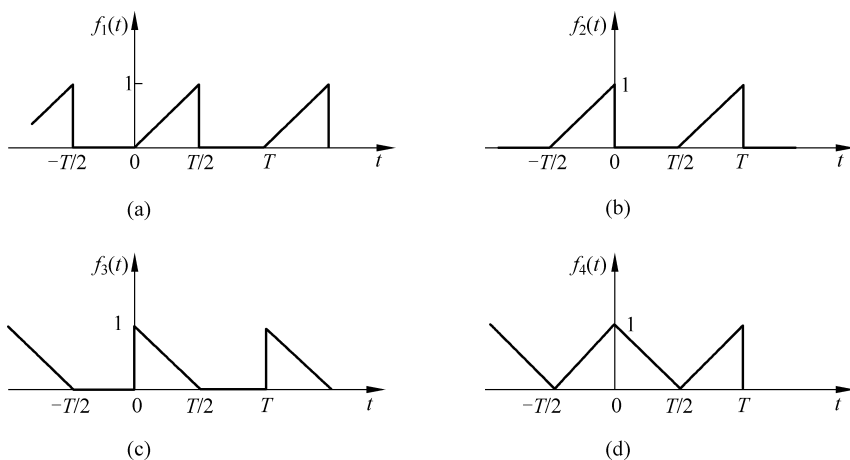


题图 3-1



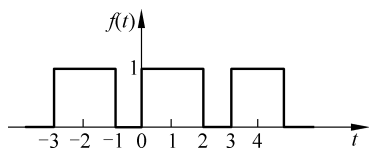
题图 3-2

3-3 题图 3-3 所示四种相同周期的信号:



题图 3-3

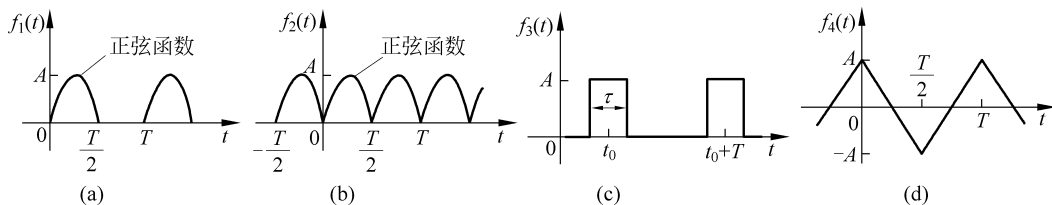
- (1) 求题图 3-3(a)所示信号 $f_1(t)$ 的三角型傅里叶级数;
- (2) 利用 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 、 $f_3(t)$ 、 $f_4(t)$ 的关系,求 $f_2(t)$ 、 $f_3(t)$ 和 $f_4(t)$ 的三角型傅里叶级数展开式。



题图 3-4

3-4 试将题图 3-4 所示周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 展开为傅里叶级数,画出其单边和双边幅度频谱和相位频谱,并求该信号的占有频带 B_ω 。

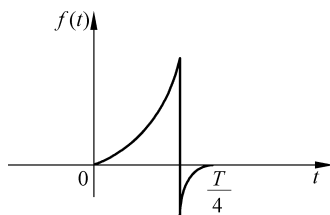
3-5 试求题图 3-5 所示周期信号的指数型傅里叶级数系数 F_n ,并画出它的幅度频谱。(题图 3-5(c)中设 $T=4\tau$)



题图 3-5

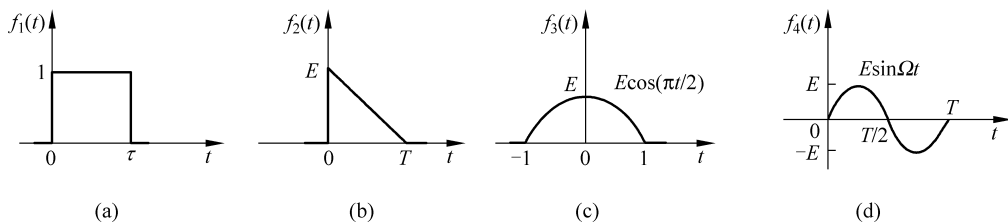
3-6 已知周期函数 $f(t)$ 前四分之一周期的波形如题图 3-6 所示。根据下列各情况的要求,画出 $f(t)$ 在一个周期 $(0 < t < T)$ 的波形。

- (1) $f(t)$ 是偶函数,只含有偶次谐波;
- (2) $f(t)$ 是偶函数,只含有奇次谐波;
- (3) $f(t)$ 是偶函数,含有偶次和奇次谐波;
- (4) $f(t)$ 是奇函数,只含有偶次谐波;
- (5) $f(t)$ 是奇函数,只含有奇次谐波;
- (6) $f(t)$ 是奇函数,含有偶次和奇次谐波。



题图 3-6

3-7 求题图 3-7 所示各信号的傅里叶变换。



题图 3-7

3-8 试求下列信号的频谱函数。

- (1) $f_1(t) = \epsilon(-t)$
- (2) $f_2(t) = e^t \epsilon(-t)$
- (3) $f_3(t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(-t)$
- (4) $f_4(t) = e^{j2t} \epsilon(t)$
- (5) $f_5(t) = \epsilon(t-3)$
- (6) $f_6(t) = e^{-|t|} \cos t$

3-9 利用傅里叶变换的对称性求下列信号的频谱函数,并画出频谱图。

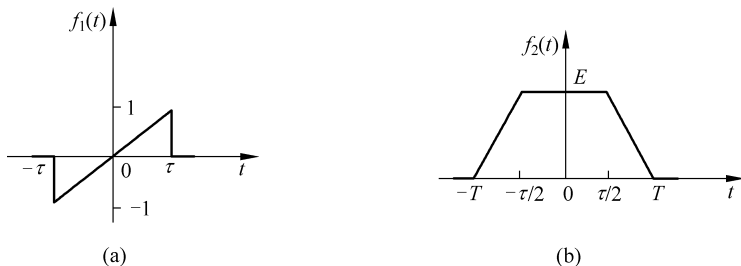
- (1) $f_1(t) = \frac{\sin 2\pi(t-2)}{\pi(t-2)}$
- (2) $f_2(t) = G_2(t)$

3-10 已知信号 $f(t)$ 的频谱函数 $F(j\omega)$ 如下,求信号 $f(t)$ 的表达式:

- (1) $F(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$
- (2) $F(j\omega) = \delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)$
- (3) $F(j\omega) = \epsilon(\omega + \omega_0) - \epsilon(\omega - \omega_0)$

$$(4) F(j\omega) = \begin{cases} \frac{\omega_0}{\pi}, & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

3-11 利用傅里叶变换的微分性质求题图 3-8 所示信号的频谱。



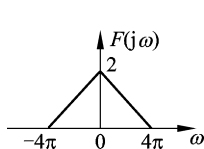
题图 3-8

3-12 求下列函数的傅里叶反变换。

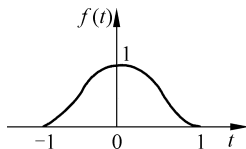
(1) $\frac{1}{(2+j\omega)^2}$ (2) $-\frac{2}{\omega^2}$ (3) $G_{4\omega_0}(\omega)$ (4) $\frac{1}{1+j\omega}\pi\delta(\omega)$

3-13 已知 $f(t) * \frac{df(t)}{dt} = (1-t)e^{-t}\epsilon(t)$, 求信号 $f(t)$ 。

3-14 题图 3-9 所示频谱函数 $F(j\omega)$ 的原函数为 $f(t)$, 求 $f(0) = f(t)|_{t=0}$ 之值。



题图 3-9



题图 3-10

3-15 题图 3-10 所示余弦脉冲信号的表示式为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos\pi t), & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

试用以下方法分别求其频谱函数 $F(j\omega)$:

- (1) 利用傅里叶变换的定义;
- (2) 利用微积分特性;
- (3) $f(t) = G_2(t) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\pi t \right)$, 利用傅里叶变换线性和频域卷积性质。

3-16 利用频域卷积定理求下列信号的频谱函数。

(1) $\cos\omega_0 t \epsilon(t)$ (2) $\sin\omega_0 t \epsilon(t)$

3-17 已知题图 3-11 所示两矩形脉冲信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$, 且

$$F_1(j\omega) = E_1 \tau_1 \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau_1}{2}\right)$$

$$F_2(j\omega) = E_2 \tau_2 \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau_2}{2}\right)$$

(1) 画出 $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 的图形;



题图 3-11

(2) 求 $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 的频谱函数 $F(j\omega)$, 并与题图 3-11(b) 所用方法进行

比较。

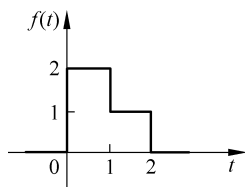
3-18 试求题图 3-12 所示信号的频谱函数。

3-19 某滤波器的零状态响应 $y_f(t)$ 和输入信号 $f(t)$ 的关系为

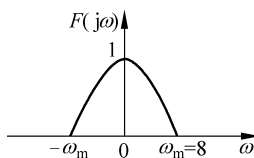
$$y_f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

画出该滤波器的幅频特性 $|H(j\omega)|$ 和相频特性 $\phi(\omega)$ 。

3-20 设 $f(t)$ 为限带信号, 频带宽度为 ω_m , 其频谱 $F(j\omega)$ 如题图 3-13 所示。



题图 3-12



题图 3-13

(1) 求 $f(2t)$ 、 $f\left(\frac{t}{2}\right)$ 的奈奎斯特抽样频率 f_N 与奈奎斯特间隔 T_N ;

(2) 用抽样序列 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_N)$ 对信号 $f(t)$ 进行抽样, 得抽样信号 $f_s(t)$, 求 $f_s(t)$ 的频谱 $F_s(j\omega)$, 画出频谱图;

(3) 若用同一个 $\delta_T(t)$ 对 $f(2t)$ 、 $f\left(\frac{t}{2}\right)$ 分别进行抽样, 试画出两个抽样信号 $f_s(2t)$, $f_s\left(\frac{t}{2}\right)$ 的频谱图。

3-21 若下列各信号被抽样, 求奈奎斯特间隔 T_N 与奈奎斯特频率 f_N :

- (1) $\text{Sa}(100t)$ (2) $\text{Sa}^2(100t)$ (3) $\text{Sa}(50t)$
 (4) $\text{Sa}(100t) + \text{Sa}^2(60t)$ (5) $\text{Sa}(200t)$ (6) $\cos 100\pi t + \cos 600\pi t$

3-22 对 $f_1(t) = \cos 100\pi t$ 和 $f_2(t) = \cos 700\pi t$ 两个信号都按周期 $T_s = \frac{1}{400}$ s 抽样。

试问哪个信号可不失真恢复成原信号? 画出均匀冲激抽样信号 $f_s(t)$ 的波形及其频谱图。

3-23 已知一系统由两个相同的子系统级联构成,子系统的冲激响应为

$$h_1(t) = h_2(t) = \frac{1}{\pi t}$$

激励信号为 $f(t)$ 。试证明系统的响应 $y(t) = -f(t)$ 。

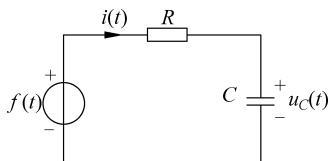
3-24 求题图 3-14 所示电路的频域系统函数:

$$H_1(j\omega) = \frac{U_C(j\omega)}{F(j\omega)} \quad H_2(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{F(j\omega)}$$

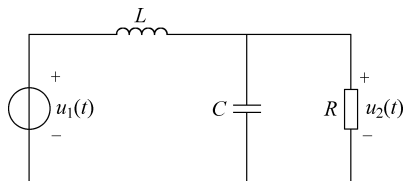
及相应单位冲激响应 $h_1(t)$ 与 $h_2(t)$ 。

3-25 求题图 3-15 所示电路的频域系统函数:

$$H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$$



题图 3-14



题图 3-15

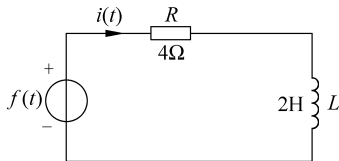
3-26 题图 3-16 所示电路, $f(t) = 10e^{-t}\epsilon(t) + 2\epsilon(t)$ 。求关于 $i(t)$ 的单位冲激响应 $h(t)$ 和零状态响应 $i(t)$ 。

3-27 已知系统的频域系统函数为

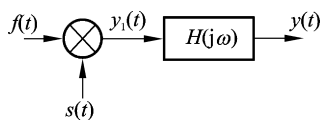
$$H(j\omega) = \frac{1 - j\omega}{1 + j\omega}$$

试求: (1) 单位阶跃响应;

(2) 激励 $f(t) = e^{-2t}\epsilon(t)$ 的零状态响应。



题图 3-16



题图 3-17

* 3-28 题图 3-17 所示系统, 已知 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2nt}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $s(t) = \cos 2t$,

$$H(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |\omega| < 3 \text{ rad/s} \\ 0, & |\omega| > 3 \text{ rad/s} \end{cases}$$

求输出 $y(t)$ 。

3-29 若 $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$, 激励为 $f(t) = \sin t + \sin 3t$, 试求响应 $y(t)$, 并画出 $f(t)$, $y(t)$ 的波形。

3-30 已知系统函数

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{-\omega^2 + j5\omega + 6}$$

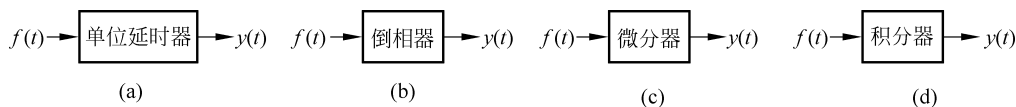
系统的初始状态 $y(0_-) = 2$, $\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{0_-} = 1$, 激励 $f(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$ 。求全响应 $y(t)$ 。

3-31 已知一线性时不变系统的方程为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{df(t)}{dt} + 2f(t)$$

求其系统函数 $H(j\omega)$ 和单位冲激响应 $h(t)$ 。

3-32 求题图 3-18 所示各系统的系统函数 $H(j\omega)$ 和单位冲激响应 $h(t)$ 。



题图 3-18

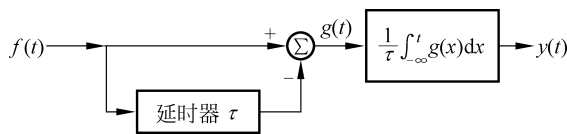
3-33 求题图 3-19 所示系统的 $H(j\omega)$ 。

3-34 题图 3-20 所示系统, 已知

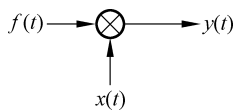
$$f(t) = \sin 300t + 2\cos 1000t + \cos 2000t$$

$$x(t) = \cos 5000t$$

试求响应 $y(t) = f(t)x(t)$ 的频谱函数, 并画出频谱图。



题图 3-19

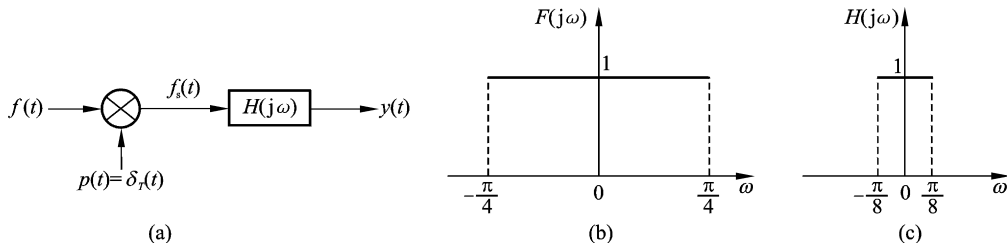


题图 3-20

3-35 理想低通滤波器的传输函数 $H(j\omega) = G_{2\pi}(\omega)$, 求输入为下列各信号时的响应 $y(t)$ 。

(1) $f(t) = \text{Sa}(t)$ (2) $f(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}$

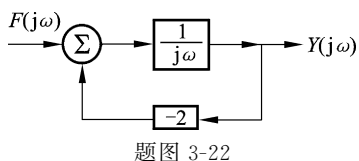
3-36 题图 3-21(a)所示系统, 输入信号 $f(t)$ 的频谱函数 $F(j\omega)$ 如题图 3-21(b)所示, 系统函数 $H(j\omega)$ 的频谱如题图 3-21(c)所示, 抽样信号 $p(t)$ 的周期为 2 s。求:



题图 3-21

(1) 频谱 $F_s(j\omega)$ 和 $Y(j\omega)$;

(2) 输出 $y(t)$ 。

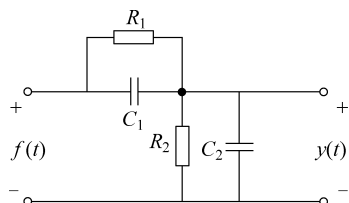


题图 3-22

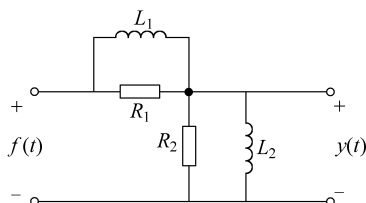
3-37 题图 3-22 所示系统框图。求: (1) 系统函数 $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}$; (2) 若 $f(t) = 2\cos t - 3\cos(2t + 30^\circ)$, 试求该系统的稳态响应 $y(t)$ 。

3-38 题图 3-23 所示电路, 写出系统函数 $H(j\omega)$ 。

若使之成为无失真传输系统, 元件参数应满足什么条件?



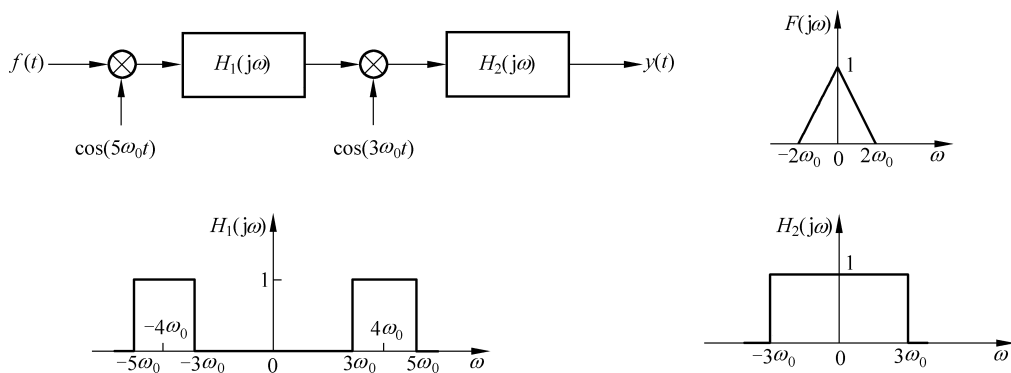
(a)



(b)

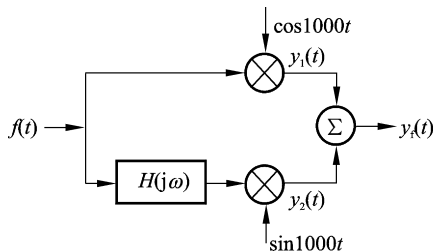
题图 3-23

3-39 题图 3-24 所示系统。已知激励信号 $f(t)$ 的频谱函数如图中 $F(j\omega)$ 。试求响应 $y(t)$ 的频谱函数 $Y(j\omega)$ 。



题图 3-24

3-40 题图 3-25 所示调制系统中, $H(j\omega) = e^{-j\frac{\pi}{2}} \text{sgn}(\omega)$, 输入信号 $f(t) = \frac{\sin 2t}{\pi t}$, 求系统的零状态响应 $y_f(t)$ 。



题图 3-25