第 1 章　预备知识

函数是对现实世界中各种变量之间的相互依存关系的一种抽象，它是微积分学研究的基本对象．在中学时我们对函数的概念和性质已经有了初步的了解, 在本章中, 我们将进一步阐明函数的一般定义，介绍函数的简单性态以及反函数、复合函数、基本初等函数和初等函数等概念，这些都是学习这门课程的基础.

0-1 微积分介绍

1.1　集　合

集合是现代数学中的基本概念之一，也是函数概念的基础.

1.1.1　集合的概念

在数学上，将具有某种确定性质的对象的全体称为 **集合**， 组成集合的每一个对象称为该集合的 **元素**.

习惯上, 用大写拉丁字母 $A, B, C, X, Y, \cdots$ 表示集合, 用小写拉丁字母 $a, b, c, x, y, \cdots$ 表示集合的元素．对于给定的集合来说，它的元素是确定的．如果 a 是集合 A 中的元素，则用 $a \in A$ 来表示；如果 a 不是 A 中的元素，则用 $a \notin A$(或 $a \,\overline{\in}\, A$) 来表示.

含有有限个元素的集合称为 **有限集**；含有无限多个元素的集合称为 **无限集**; 不含任何元素的集合称为 **空集**, 用 $\varnothing$ 表示.

表示集合的方法主要有两种, 一种是列举法, 就是把集合的所有元素一一列举出来, 写在大括号内. 例如, 把方程 $x^2-4=0$ 的解构成的集合表示为 $A=\{-2,2\}$. 另一种方法是描述法，就是指出集合的元素所具有的性质．一般地，将具有某种性质的对象 x 所构成的集合表示为

$$A=\{x \mid x\text{具有某种性质}\}.$$

例如，方程 $x^2-4=0$ 的解集也可以表示为 $A=\{x \mid x^2-4=0\}$.

设 A, B 是两个集合．若 A 的每个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的 **子集**, 记作 $A \subset B$(或 $B \supset A$); 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称 A 与 B**相等**, 记作 $A=B$.

如果集合的元素都是数，则称之为 **数集**. 在本课程中涉及的集合都是数集. 常用的数集有:

(1) **自然数集**, 用 $\mathbb{N}$ 表示，即

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}.$$

(2) **整数集**, 用 $\mathbb{Z}$ 表示，即

$$\mathbb{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}.$$

(3) **有理数集**, 用 $\mathbb{Q}$ 表示.

(4) **实数集**, 用 $\mathbb{R}$ 表示.

(5) **复数集**, 用 $\mathbb{C}$ 表示.

有时我们在表示数集的字母的右上角添加“ + ”或者“ − ”，来表示该数集中所有正数或者负数构成的特定子集．例如， $\mathbb{Z}^+$ 表示全体正整数构成的集合，$\mathbb{R}^-$ 表示全体负实数构成的集合等.

1.1.2 集合的运算

集合的基本运算有三种，即并集、交集与差集.

设有集合 A 与 B, 它们的 **并集** 记作 $A\bigcup B$, 定义为

$$A\bigcup B=\{x \mid x\in A\text{或}\,x\in B\}.$$

集合 A 与 B 的 **交集** 记作 $A\bigcap B$(或 AB), 定义为

$$A\bigcap B=\{x \mid x\in A\text{且}\,x\in B\}.$$

集合 A 与 B 的 **差集** 记作 $A\setminus B$, 定义为

$$A\setminus B=\{x \mid x\in A\text{但}\,x\overline{\in}B\}.$$

从上述定义可以看出， $A\bigcup B$ 就是把 A 与 B 的所有元素放在一起所构成的集合； $A\bigcap B$ 就是把 A 与 B 的公共元素放在一起所构成的集合； $A\setminus B$ 就是在 A 中去掉属于 B 中的元素后，余下的元素所构成的集合．显然

$$A\setminus B\subset A\subset A\bigcup B,\quad AB\subset A.$$

集合 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_i\bigcup\cdots$ 表示集合 $A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$ 的所有元素放在一起所构成的集合．而 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_i\bigcap\cdots$ 表示集合 A_1, $A_2,\cdots,A_i,\cdots$ 的公共元素所构成的集合.

通常将研究某一问题时所考虑的对象的全体称为 **全集**, 用 Ω 来表示. 将 $\Omega\setminus A$ 称为集合 A 的 **补集** 或 **余集**, 用 $\overline{A}$ 表示.

集合的运算满足如下规律：

(1) $A\bigcup B=B\bigcup A$, $A\bigcap B=B\bigcap A$;

(2) $(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$, $(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$;

(3) $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$, $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$;

(4) $A\bigcup A=A$, $A\bigcap A=A$, $A\bigcup\varnothing=A$, $A\bigcap\varnothing=\varnothing$;

(5) 若$A_i\subset B(i=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\subset B$;

(6) 若$A_i\supset B(i=1,2,\cdots)$,则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\supset B$;

(7) $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$, $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$.

以上结论都可根据集合的概念和运算加以证明，请读者自己试一试.

1.1.3 区间与邻域

区间是微积分中常用的一类数集，它们的记号和定义如下 (其中 $a,b\in\mathbb{R}$)：

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;

半开区间 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$,

$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$;

无限区间 $[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$,

$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$,

$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$,

$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$,

$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

前四个区间也称为 **有限区间**, a, b 分别称为区间的 **左端点** 和 **右端点**, $b-a$ 称为 **区间长度**. $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作 “正无穷大” 和 “负无穷大”，它们不表示数值，仅仅是记号. 在不一定要指明区间是开的或闭的，以及是有限的或无限的场合，我们就简单地称之为 **区间**, 并且常用字母 I 或 X 表示.

区间可以在数轴上表示出来 (图 1.1).

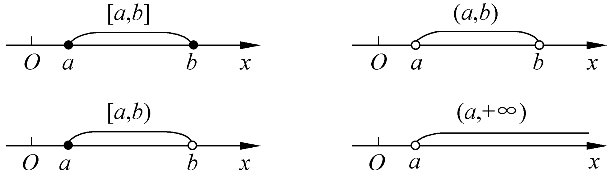

图 1.1

邻域也是微积分中经常用到的数集. 设 $a, \delta \in \mathbb{R}$, 其中 $\delta > 0$, 数集

$$\{x \mid |x-a| < \delta\}$$

称为点 a 的 δ**邻域**, 记为 $U(a,\delta)$, 点 a 称为 **邻域的中心**, δ 称为 **邻域的半径**. 由于

$$U(a,\delta) = \{x \mid -\delta < x-a < \delta\} = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\},$$

所以 $U(a,\delta)$ 就是开区间 $(a-\delta, a+\delta)$, 如图 1.2 所示.

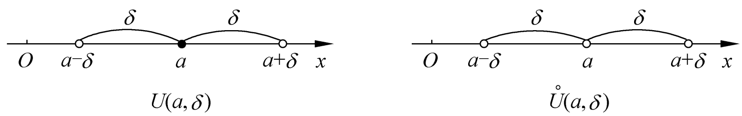

图 1.2

在 $U(a,\delta)$ 中去掉中心 a 后得到的数集

$$\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\},$$

称为点 a 的 **去心** δ **邻域**, 记作 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$. 显然

$$\overset{\circ}{U}(a,\delta) = (a-\delta, a) \bigcup (a, a+\delta),$$

是两个开区间的并集，如图 1.2 所示.

为了方便, 有时把开区间 $(a-\delta, a)$ 称为点 a 的 **左** δ **邻域**, 把开区间 $(a, a+\delta)$ 称为点 a 的 **右** δ **邻域**.

习 题 1.1

1. 用描述法表示下列集合：

(1) 大于 6 的所有实数;

(2) 圆 $x^2+y^2=16$ 内部 (不包含圆周) 一切点的集合;

(3) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合.

2. 用列举法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2-8x+12=0$ 的根的集合;

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合;

(3) 集合 $\{x| \, |x-1| \leqslant 5, x \in \mathbb{Z}\}$.

3. 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{2,4,6\}$, 求:

(1) $A \bigcup B$; (2) $A \bigcap B$; (3) $A \bigcup B \bigcup C$; (4) $A \bigcap B \bigcap C$; (5) $A \backslash B$.

4. 若 $A=\{x|3<x<5\}$, $B=\{x|x>4\}$, 求:

(1) $A\bigcup B$; (2) $A\bigcap B$; (3) $A\backslash B$.

5. 某专业共有 100 名学生，其中 70 名数学考试成绩优秀，用集合 A 表示这些学生； 40 名外语考试成绩优秀，用集合 B 表示这些学生；数学考试成绩优秀而外语考试成绩不是优秀的学生有 55 人. 试用集合关系表示下列各类学生，并计算出各类学生的数目：

(1) 两门考试成绩都是优秀的学生；

(2) 数学考试成绩不是优秀而外语考试成绩是优秀的学生；

(3) 两门考试中至少有一门成绩达到优秀的学生；

(4) 两门考试成绩均不是优秀的学生.

6. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合：

(1) $|x|\leqslant 5$; (2) $|x-2|\leqslant 1$; (3) $|x-a|<\varepsilon$ (a为常数,$\varepsilon>0$);

(4) $|x|\geqslant 3$; (5) $|x+1|>2$.

7. 用区间表示下列点集，并在数轴上表示出来：

(1) $A=\{x|\,|x+3|<2\}$;

(2) $B=\{x|1<|x-2|<3\}$.

8. 用不等式或绝对值不等式表示下列各区间：

(1) $(-2,3)$; (2) $[-2,2]$; (3) $(-5,+\infty)$.

1.2 函 数

1.2.1 映射

定义 1.2.1 设 X,Y 是两个非空集合， f 是一个对应法则. 如果对于任何一个 $x\in X$, 按照对应法则 f, 都有唯一确定的 $y\in Y$ 和它对应，则称 f 为 X 到 Y 的 **映射**, 记为

$$f:X\to Y.$$

称元素 y 为在映射 f 之下的 x 的 **像**, 记为 $f(x)$, 即 $y=f(x)$; 称元素 x 为在映射 f 之下 y 的 **原像**; 集合 X 称为映射 f 的 **定义域**, 记作 D_f, 即 $D_f=X$; 而 X 的所有元素的像 $f(x)$ 的集合

$$\{y\mid y\in Y,y=f(x),x\in X\}$$

称为映射 f 的 **值域**, 记作 R_f.

例 1.2.1 设集合 X 为某班全体学生， Y 为实数 (单位： cm) 集合，我们将每个学生与其身高建立对应关系，则每个学生均有唯一身高，即对于集合 X 的每一个元素，在集合 Y 中都有唯一确定的元素与之对应，故这样的对应关系构成了从 X 到 Y 的映射.

对于定义 1.2.1, 要注意下面几点:

(1) 应区别 f 和 $f(x)$. 前者是从 X 到 Y 的一种对应关系，后者是在 f 之下 x 的像，是 Y 的一个元素.

(2) 对任何一个 $x \in X$, 都有且只有一个像 $y = f(x) \in Y$, 即像是唯一的.

(3) 对于某个 $y \in Y$, 如果在映射 f 之下在 X 中有原像，则其原像可能不止一个，即原像不一定是唯一的.

如果原像是唯一的，即对于 X 中的任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$, 它们的像 y_1 和 y_2 也满足 $y_1 \neq y_2$, 则称映射 f 为 **单射**. 若映射 $f: X \to Y$ 满足 $R_f = Y$, 则称映射 f 为 **满射**. 如果映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为 **一一映射** (**一对一映射**).

例 1.2.2 设 $X = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}, Y = \{1, 3, \cdots, 2n-1, \cdots\}$, 对于任何一个 $n \in X$, 按照对应法则 f 得到 $2n-1 \in Y$, 则映射 $f: X \to Y$ 是一一映射. 值得注意的是: Y 是 X 的子集，Y 中的元素似乎比 X 中的元素个数“少”，这是无限集合的一个特性.

如果 $f: X \to Y$ 是一一映射，则对于每一个 $y \in Y$, 在 X 中存在唯一的 x 与 y 对应，满足 $y = f(x)$, 或记作 $x \xrightarrow{f} y$, 这样就有了一个从 Y 到 X 的映射，记作 $f^{-1}: Y \to X$, 称为映射 f 的 **逆映射**.

设有映射

$$g: X \to Y, \quad f: Y \to Z,$$

则对于每一个 $x \in X$, 有

$$x \xrightarrow{g} y \xrightarrow{f} z \quad (y \in Y, z \in Z).$$

这说明，对于每一个 $x \in X$, 通过 y, 都存在唯一的 $z \in Z$ 与 x 对应，因此产生了一个从 X 到 Z 的新映射，记为 $f \circ g: X \to Z$, 称为 g 与 f 的 **复合映射**.

1.2.2 函数的概念

有了映射的概念，就可以在映射的基础上定义函数了.

定义 1.2.2 设非空数集 $X \subset \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$, 称从 X 到 Y 的映射

$$f: X \to Y$$

为定义在 X 上的 **函数**, 称集合 X 为函数 f 的 **定义域**, 也用 D_f 表示，称集合 $R_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$ 为函数 f 的 **值域**.

函数通常记为

$$y = f(x), \quad x \in D_f,$$

称 x 为 **自变量**, 称 y 为 **因变量**.

当自变量 x 取数值 $x_0 \in D_f$ 时，与 x_0 对应的因变量 y 的数值称为定义在 D_f 上的函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的 **函数值**, 记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$, 这时，我们也说函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义.

由于经常通过函数值来研究函数，为了方便，在以后的叙述中，将“定义在 X 上的函数 f ”就说成函数 $y=f(x), x \in X$. 如前所述，我们应该注意到 f 与 $f(x)$ 是有区别的.

从函数的定义上来看, 确定一个函数的两个基本条件是定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则不论使用什么样的函数记号，它们都是同一个函数.

在实际问题中，要根据问题的条件或实际意义确定函数的定义域. 对于用公式形式给出的函数，如果没有其他附加条件，则认为函数的定义域是使得公式有意义的一切 x 值. 例如，由公式

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}$$

给出的函数 $f(x)$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$. 但是，如果 x 是斜边长为 1 的直角三角形的一条直角边的边长，$f(x)$ 是另一条直角边的边长, 则函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域应为 $(0,1)$.

例 1.2.3 *求函数* $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$ *的定义域.*

解 要使表示函数 y 的公式有意义，必须有

$$\begin{cases}16-x^2 \geqslant 0,\\ \sin x>0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-4 \leqslant x \leqslant 4,\\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi \quad (n=0,\pm 1,\cdots).\end{cases}$$

这两个不等式的公共解为

$$-4 \leqslant x<-\pi \quad \text{或} \quad 0<x<\pi,$$

故函数的定义域为 $[-4,-\pi) \bigcup (0,\pi)$.

表示函数通常的办法是给出解析表示式 (公式) 的形式, 例如，$y=\cos x, y=\ln\left(1+x^2\right)$ 等. 函数也可以用其他方式给出，如表格法、图形法等.

在平面直角坐标系 xOy 中，点的集合

$$\{(x,y) \mid y=f(x), x \in D_f\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的 **图形**(或**图像**). 一个函数的图形通常是一条曲线 (图 1.3), 称之为 **曲线** $y=f(x)$. 函数的图形具有直观性和明显性，使我们有可能利用几何方法研究函数的有关特性．相反，一些几何问题也可借助函数来做理论研究.

在函数的定义中，对于每一实数 $x\in X$, 对应唯一的实数 y, 这样的函数也称为 **单值函数**. 有时也会遇到这样的情况：对于实数集 X 中的某些实数 x, 每一个数 x 可能对应几个甚至无穷多个 y 值．例如： $y=\pm\sqrt{1-x^2}, y=\arcsin x$ 等. 这种情况不符合上述函数的定义，但为了方便，有时也把它们称为 **多值函数**. 今后，如无特别声明，本书所讨论的函数都是指单值函数.

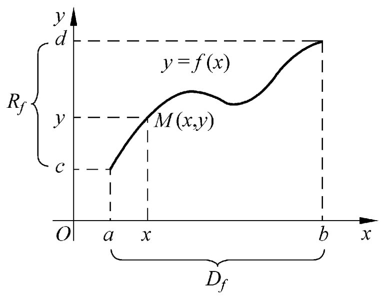

图 1.3

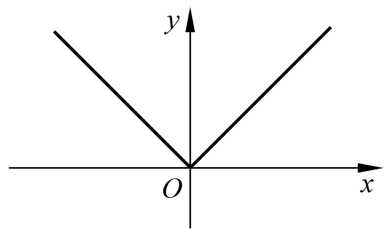

图 1.4

下面给出一些以后经常用到的函数.

例 1.2.4 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $[0,+\infty)$, 如图 1.4 所示.

例 1.2.5 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ \ \ 0, & x=0,\\ \ \ 1, & x>0,\end{cases}$$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $\{-1,0,1\}$, 如图 1.5 所示．显然，对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$|x|=x\operatorname{sgn}x.$$

例 1.2.6 对于任意实数 x, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．例如,

$$[2]=2,\quad \left[-\frac{1}{2}\right]=-1,\quad \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]=0,\quad [-\pi]=-4.$$

这个函数可以分段表示如下 (图 1.6)：

$$y = [x] = n, \quad n \leqslant x < n+1 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\mathbb{Z} = \{$整数$\}$.

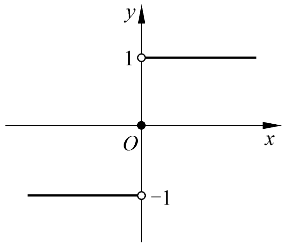

图　1.5

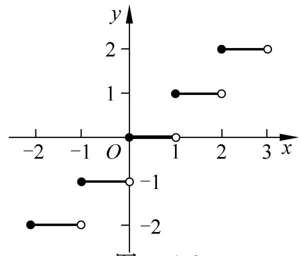

图　1.6

例 1.2.7　公共电话收费对应的函数关系. 在公共电话亭打市内电话, 每 3 分钟收费 0.4 元, 不足 3 分钟按 3 分钟收费, 这样便规定了打电话用时 t 与费用 S 的关系：

$$S = \begin{cases} 0.4\left(\left[\dfrac{t}{3}\right] + 1\right), & t > 0, \quad t \neq 3k, \\ 0.4k, & t = 3k, \quad k = 1, 2, 3, \cdots. \end{cases}$$

例 1.2.8　Dirichlet (狄利克雷) 函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}, \end{cases}$$

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{0, 1\}$.

从例 1.2.4 到例 1.2.8 这几个函数在定义域的不同部分用不同的解析式表示, 这样的函数称为 **分段初等函数**(简称为 **分段函数**). 它也是自然科学、工程技术和经济学中常用的函数形式.

1.2.3　函数的几种特性

1-1 函数的特性

1. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f, 实数集 $X \subset D_f$, 如果存在正数 M, 使得对于任意的 $x \in X$, 都有不等式

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立, 则称 $f(x)$ 在 X 上 **有界**; 如果这样的正数 M 不存在, 就说函数 $f(x)$ 在 X 上 **无界**.

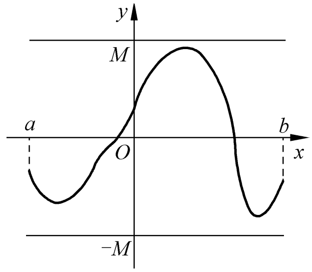

图　1.7

从几何直观上来看, 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 则函数 $y=f(x)$ 的图形位于两条平行直线 $y=M, y=-M$ 之间，如图 1.7 所示.

例如， $f(x)=\cos x$, 因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$, 都有

$$|\cos x|\leqslant 1,$$

如果取 $M=1$(当然也可以取任何大于 1 的数作为 M), 则函数 $f(x)=\cos x$ 满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M,$$

所以函数 $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

应该注意的是，讨论函数的有界性，不仅仅要考虑函数的表达式，还要考虑自变量 x 的取值范围 X. 同一个函数在自变量的不同范围上的有界性可能是不同的.

例 1.2.9　证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，在 $(0,1)$ 内是无界的.

证明　若取 $M=1$, 则对于任意 $x\in(1,2)$, 都有

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1,$$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的.

对于任何正数 M(不妨设 $M>1$), 取 $x_0=\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$, 则有

$$|f(x_0)|=\left|\frac{1}{x_0}\right|=2M>M,$$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的. □

2. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f, 区间 $X\subset D_f$, 在 X 上任取两点 x_1,x_2. 如果当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2)(\text{或}f(x_1)>f(x_2)),$$