

第 1 章 向量代数与空间解析几何

1.1 向量代数

一、主要内容

空间直角坐标系, 向量的概念, 向量的运算, 向量的数量积和向量积.

二、教学要求

1. 理解空间直角坐标系的概念, 理解向量的概念及其表示.
2. 掌握向量的运算 (线性运算、数量积、向量积), 了解两个向量垂直、平行的条件.
3. 理解单位向量、方向角与方向余弦, 向量的坐标表示式, 掌握用坐标表示式进行向量运算的方法.
4. 掌握向量的数量积、向量积的运算, 了解混合积.

三、例题选讲

例 1.1 在 x 轴上求出一點 M , 使它与点 $M_1(4, 1, 2)$ 的距离为 $\sqrt{30}$.

解 设在 x 轴上所求点 M 的坐标为 $(x, 0, 0)$, 下面求出 x .

由条件 $|M_1M| = \sqrt{30}$, 即

$$\sqrt{(x-4)^2 + (0-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{30},$$

$$(x-4)^2 = 25,$$

得

$$x = 9 \quad \text{或} \quad x = -1.$$

故所求点 M 为 $(9, 0, 0)$ 或 $(-1, 0, 0)$.

例 1.2 已知向量 $\mathbf{a} = (4, -4, 7)$, 其终点坐标为 $(2, -1, 7)$, 求向量 $\mathbf{a}$ 的始点坐标及模 $|\mathbf{a}|$.

解 设向量 $\mathbf{a}$ 的始点坐标为 (x, y, z) , 因为向量的坐标是其终点坐标与始点坐标之差, 所以有

$$2 - x = 4, \quad -1 - y = -4, \quad 7 - z = 7,$$

由此解得

$$x = -2, \quad y = 3, \quad z = 0.$$

而

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{81} = 9.$$

故向量 $\mathbf{a}$ 的始点坐标为 $(-2, 3, 0)$, $|\mathbf{a}| = 9$.

例 1.3 向量 $\mathbf{a}$ 与 x 轴的负向及 y 轴、 z 轴的正向构成相等的锐角, 求向量 $\mathbf{a}$ 的方向余弦.

解 依题意知

$$\alpha = \pi - \theta, \quad \beta = \theta, \quad \gamma = \theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right),$$

因为 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 即

$$\cos^2(\pi - \theta) + \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

所以

$$3 \cos^2 \theta = 1 \quad \text{或} \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos \gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

例 1.4 模长为 2 的向量 $\mathbf{a}$ 与 x 轴的夹角是 $\frac{\pi}{4}$, 与 y 轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$, 求向量 $\mathbf{a}$ 的坐标.

解 设向量 $\mathbf{a}$ 与 z 轴的夹角是 γ , 则

$$\cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \gamma = 1,$$

即

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2 \gamma = 1.$$

由此解得

$$\cos \gamma = \pm \frac{1}{2}.$$

因为

$$e_a = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right),$$

而 $a = |a|e_a$, 所以

$$a = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right) = (\sqrt{2}, 1, \pm 1).$$

例 1.5 已知 $|a| = 2, |b| = \sqrt{2}$, 且 $a \cdot b = 2$, 求 $|a \times b|$.

解 因为 $a \cdot b = |a||b|\cos(\widehat{a, b})$, $|a \times b| = |a||b|\sin(\widehat{a, b})$, 所以 $|a \times b|^2 + (a \cdot b)^2 = |a|^2|b|^2$, 即

$$|a \times b|^2 = 8 - 4 = 4, \quad |a \times b| = 2 \quad (\text{由 } |a \times b| \geq 0, \text{ 故舍去 } -2).$$

或由给定条件知

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $(\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{4}$, 于是

$$|a \times b| = |a||b|\sin(\widehat{a, b}) = 2 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2.$$

例 1.6 设 $|a| = 2, |b| = 5, (\widehat{a, b}) = \frac{2}{3}\pi$, 若向量 $m = \lambda a + 17b$ 与向量 $n = 3a - b$ 互相垂直, 求常数 λ .

分析 两个向量互相垂直的充分必要条件是其数量积为零, 由此入手求出常数 λ .

解

$$\begin{aligned} 0 &= m \cdot n = (\lambda a + 17b) \cdot (3a - b) \\ &= 3\lambda|a|^2 + (51 - \lambda)a \cdot b - 17|b|^2 \\ &= 12\lambda + (51 - \lambda)a \cdot b - 425 \\ &= 12\lambda + (51 - \lambda) \times 2 \times 5 \times \cos \frac{2}{3}\pi - 425 \\ &= 17\lambda - 680. \end{aligned}$$

即 $\lambda = 40$.

例 1.7 设 a, b, c 均为单位向量, 且有 $a + b + c = 0$, 求 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$.

分析 利用数量积的运算律和单位向量的概念求解.

解 因为

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \\ &= 3 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}), \end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = -\frac{3}{2}.$$

例 1.8 求垂直于向量 $\mathbf{a} = (2, 2, 1)$ 和 $\mathbf{b} = (4, 5, 3)$ 的单位向量 $\mathbf{e}_c$.

解 因为向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 同时垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 所以所求的单位向量 $\mathbf{e}_c$ 必与向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 共线. 而

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3,$$

于是, 所求的单位向量 $\mathbf{e}_c$ 为

$$\mathbf{e}_c = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k},$$

或 $-\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$ 也是所求的单位向量.

例 1.9 已知向量 $\mathbf{x}$ 垂直于向量 $\mathbf{a} = (2, -3, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 3)$, 且与向量 $\mathbf{c} = (1, 2, -7)$ 的数量积为 10, 求向量 $\mathbf{x}$.

分析 利用 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ 即可.

解 设 $\mathbf{x} = (x, y, z)$, 则依题意得

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ x + 2y - 7z = 10. \end{cases}$$

由上面方程组解得

$$x = 7, \quad y = 5, \quad z = 1,$$

故所求向量为 $\mathbf{x} = (7, 5, 1)$.

四、疑难问题解答

1. 从 $a = b$ 是否可以推出 $|a| = |b|$? 反过来, 从 $|a| = |b|$ 是否可以推出 $a = b$, 为什么?

答 从 $a = b$ 可知向量 a 与向量 b 的大小必相等, 所以必有 $|a| = |b|$. 反过来, 由 $|a| = |b|$ 只知向量 a 与向量 b 的大小相等, 二向量的方向未必相同, 所以由 $|a| = |b|$ 不能推出 $a = b$.

2. 设 a, b 为非零向量, 下列各式在什么条件下才能成立?

- (1) $|a + b| = |a - b|$; (2) $|a + b| < |a - b|$;
 (3) $|a + b| = |a| + |b|$; (4) $|a - b| = |a| + |b|$.

答 当 $a \perp b$ 时, 式 (1) 成立 (图 1.1); 当 $(\widehat{a, b}) > \frac{\pi}{2}$ 时, 式 (2) 成立 (图 1.2); a 与 b 同方向时, 式 (3) 成立; a 与 b 反向, 即当 $(\widehat{a, b}) = \pi$ 时, 式 (4) 成立 (图 1.3).

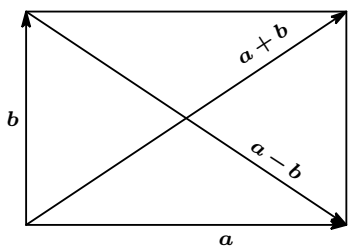


图 1.1

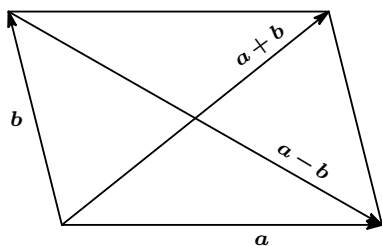


图 1.2

3. 下列说法是否正确, 为什么?

- (1) $i + j + k$ 是单位向量;
 (2) $2i > j$;
 (3) 与 x, y, z 三坐标轴的正向夹角相等的向量, 其方向角为 $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

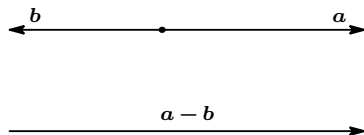


图 1.3

答 (1) 不正确. 由单位向量的定义知, 模为 1 的向量称为单位向量. 因为向量 $i + j + k$ 的模 $|i + j + k| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \neq 1$, 故 $i + j + k$ 不是单位向量.

(2) 不正确. 由于向量是既有大小又有方向的量, 所以 $2i$ 和 j 没有大小可言, 不能比较. 当然向量的模是可以比较大小的, 如 $|2i| = 2 > |j| = 1$.

(3) 不正确. 与三坐标轴正向夹角相等的向量, 其方向角不是 $\frac{\pi}{3}$. 因为任一向量的三个方向角 α, β, γ 应满足关系式

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

当 $\alpha = \beta = \gamma$ 时, 有 $3\cos^2 \alpha = 1$, 即 $\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = \arccos \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \neq \frac{\pi}{3}$.

又因为

$$\cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} \neq 1,$$

所以三个方向角均为 $\frac{\pi}{3}$ 的向量是不存在的.

练习 1.1

1. 设向量 $\mathbf{a} = (4, -1, 3)$ 和 $\mathbf{b} = (5, 2, -2)$, 求 $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$.
2. 已知向量 $\mathbf{a}$ 与三个坐标轴的夹角相等, 求向量 $\mathbf{a}$ 的方向余弦.
3. 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点坐标为 $A(1, 0, -1)$, 终点坐标为 $B(4, -4, 11)$, 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模和方向角.
4. 设向量 $\mathbf{a}$ 的方向余弦满足下列条件:
(1) $\cos \beta = 0$; (2) $\cos \beta = 1$; (3) $\cos \beta = \cos \gamma = 0$. 说明这时向量 $\mathbf{a}$ 的特点.
5. 设 $A(1, -1, 3), B(-1, 1, 4)$, 求 z 轴上的点 C 坐标, 使 $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$.
6. 设点 M 的向径与 x 轴, y 轴正向分别成 $60^\circ, 45^\circ$ 的角, 向量的模为 8, 求点 M 的坐标.
7. 若向量 $\mathbf{a} = (3, -5, 8)$ 和 $\mathbf{b} = (-1, 1, z)$ 的和与差相等, 求 z .
8. 设向量 $\mathbf{a}$ 同时垂直于向量 $\mathbf{b} = (3, 6, 8)$ 和 x 轴, 且 $|\mathbf{a}| = 2$, 求 $\mathbf{a}$.
9. 在顶点为 $A(1, -1, 2), B(5, -6, 2)$ 和 $C(1, 3, -1)$ 的三角形中, 求 AC 边上的高 BD .

练习 1.1 参考答案与提示

1. $(23, 4, 0)$.
2. 设 $\mathbf{a}$ 与三个坐标轴的夹角分别为 α, β, γ , $\alpha = \beta = \gamma$. 由 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 可得 $\mathbf{a}$ 的方向余弦为 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ 或 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.
3. 13 ; $\alpha = \arccos \frac{3}{13}, \beta = \arccos \left(-\frac{4}{13} \right), \gamma = \arccos \frac{12}{13}$.
4. (1) $\mathbf{a}$ 与 y 轴垂直或 $\mathbf{a}$ 与 Oxz 面平行; (2) $\mathbf{a}$ 与 y 轴平行或 $\mathbf{a}$ 与 Ozx 面垂直; (3) $\mathbf{a}$ 与 x 轴平行或 $\mathbf{a}$ 与 Oyz 面垂直.

5. $\left(0, 0, \frac{7}{2}\right)$.
 6. $(4, 4\sqrt{2}, \pm 4)$.
 7. $z = 1$.
 8. $\mathbf{a} = \pm \left(0, \frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$.
 9. 5.(小视频讲解).



练习 1.1-9

1.2 平面与直线

一、主要内容

平面的方程, 空间直线及其方程.

二、教学要求

1. 掌握平面方程与直线方程及其求法.
2. 了解平面、直线的相互关系, 会求平面与平面、直线与直线、平面与直线之间的夹角.
3. 会求点到直线和点到平面的距离.

三、例题选讲

例 1.10 已知一个平面通过 x 轴和点 $M_0(4, -3, -1)$, 求这个平面的方程.

分析 由题设的条件知, 所求平面通过 x 轴, 那么平面的法向量 $\mathbf{n}$ 应垂直于 x 轴, 同时也垂直于 $\overrightarrow{OM_0}$. 这样可以取法向量 $\mathbf{n}$ 为 $\mathbf{i} \times \overrightarrow{OM_0}$, 再由平面过原点 O , 用点法式可以写出所求平面的方程. 另外, 还可以利用此平面方程的特殊性求出此方程.

解法 1 依题设条件知

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \times \overrightarrow{OM_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{j} - 3\mathbf{k},$$

又平面过点 $O(0, 0, 0)$, 因此所求平面方程为

$$0(x - 0) + 1 \cdot (y - 0) - 3(z - 0) = 0,$$

即

$$y - 3z = 0.$$

解法 2 依题设条件知, 所求平面方程应为

$$By + Cz = 0,$$

又所求平面过已知点 $M_0(4, -3, -1)$, 将点 M_0 的坐标代入上面方程得

$$-3B - C = 0 \quad \text{或} \quad C = -3B.$$

即

$$By - 3Bz = 0,$$

由于 $B \neq 0$, 所以在上式两边同时消去 B , 得所求方程为

$$y - 3z = 0.$$

例 1.11 求过点 $M(1, 2, -1)$ 且与直线 $\begin{cases} x = -t + 2, \\ y = 3t - 4, \\ z = t - 1 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

分析 由于所求的平面与已知直线垂直, 所以可取直线的方向向量作为平面的法向量, 由平面的点法式方程即可得所求的平面方程. 应当注意已知直线是参数式方程.

解 已知直线的方向向量 $\mathbf{s}_1 = (-1, 3, 1)$, 取 $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1$, 因平面过点 $M(1, 2, -1)$, 故所求平面的方程为

$$-(x - 1) + 3(y - 2) + 1 \cdot (z + 1) = 0,$$

即

$$x - 3y - z + 4 = 0.$$

例 1.12 求两个平面 $2x - y + z - 6 = 0$ 和 $x + y + 2z - 5 = 0$ 的夹角.

解 已知两个平面的法向量分别为

$$\mathbf{n}_1 = (2, -1, 1), \quad \mathbf{n}_2 = (1, 1, 2),$$

所以两平面夹角的余弦

$$\cos \theta = \frac{|2 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \times \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{2},$$

因此, 所求夹角 $\theta = \frac{\pi}{3}$.

例 1.13 确定下列各组中平面与平面间的关系:

(1) $x + y - z - 1 = 0$ 与 $2x + 2y - 2z + 3 = 0$;

(2) $x + y + z = 0$ 与 $x + y - 2z + 3 = 0$.

解 (1) 两个平面的法向量分别为 $\mathbf{n}_1 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{n}_2 = (2, 2, -2)$, 满足条件

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2},$$

故这两个平面平行.

(2) 两个平面的法向量分别为 $\mathbf{n}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{n}_2 = (1, 1, -2)$, 满足条件

$$1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times (-2) = 0,$$

故这两个平面垂直.

例 1.14 设有直线

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1} \text{ 与 } L_2: \begin{cases} x-y=6, \\ 2y+z=3, \end{cases}$$

求直线 L_1 与 L_2 的夹角.

解 L_1 的方向向量 $\mathbf{s}_1 = (1, -2, 1)$, L_2 的方向向量 $\mathbf{s}_2$ 为

$$\mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

所以 L_1 与 L_2 之间的夹角 θ 的余弦为

$$\cos \theta = \left| \frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1| |\mathbf{s}_2|} \right| = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$

故 $\theta = \frac{\pi}{3}$.

例 1.15 已知直线

$$L_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2} \text{ 和 } L_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1},$$

求过两直线 L_1 和 L_2 的平面方程.

分析 所求平面的法向量 $\mathbf{n}$ 垂直于 L_1 和 L_2 的方向向量 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$, 即 $\mathbf{n} \perp \mathbf{s}_1, \mathbf{n} \perp \mathbf{s}_2$, 所以可以取 $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$. 解此题的关键是求出平面的法向量 $\mathbf{n}$. 下一步是求出平面上的一个点. 因为直线 L_1 上的点 $M_1(2, -2, 3)$ 在所求平面上, 再用平面的点法式方程即可.

解 因为 $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{s}_2$, 所以取 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2$, 即

$$\boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$



例 1.15

又点 $M_1(2, -2, 3)$ 在所求平面上, 从而所求平面方程为

$$-5(x-2) - 3(y+2) + (z-3) = 0,$$

即

$$5x + 3y - z - 1 = 0.$$

例 1.16 求过点 $M(-1, 2, 3)$, 垂直于直线 $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$, 且平行平面 $7x + 8y + 9z + 10 = 0$ 的直线方程.

分析 关键是求出直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$. 所求直线垂直于已知直线, 即 $\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{s}_1$. 所求直线平行于已知平面, 即 $\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{n}_1 (\boldsymbol{n}_1 = (7, 8, 9))$, 因此取 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{n}_1$.

解 依题意知

$$\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{s}_1, \quad \boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{n}_1,$$

取 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{n}_1$, 有

$$\boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}.$$

又直线过点 $M(-1, 2, 3)$, 从而所求直线方程为

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{-3},$$

或

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}.$$

例 1.17 确定直线 $L: \begin{cases} x+3y+2z+1=0, \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 与平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$

的位置关系.

解 直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 为

$$\boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -10 \end{vmatrix} = -28\boldsymbol{i} + 14\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k},$$