第 1 章　引　　言

1.1　本书的范围和目标

量子光学是当下活跃发展的物理领域之一。尽管作为一个主要研究领域它已经至少存在了 20 年，不少研究生从事其中，但在过去几年间它也开始影响本科生的教学课程。这本书来源于我们在帝国理工学院和纽约城市大学教授四年级本科生和一年级研究生的课程教材。在量子光学中有众多非常好的专业研究方向可供介绍，但我们觉得应从强调基本概念的角度考虑到高年级本科生和低年级研究生的根本需求。当下这是一个吸引了最聪明学生的领域，部分是因为领域本身的非凡发展（诸如量子隐形传态、量子密码术、薛定谔猫态、贝尔不等式对局域实在论的违背等）。我们希望本书能为这个激动人心的学科提供一个容易理解的导论。

我们的目标是为假定已经选修过量子力学课程的高年级本科生或那些有兴趣将来从事这方面研究的一二年级研究生写一本涵盖量子光学本质的入门级教科书。我们所介绍的内容并不简单，对本科生以及低年级研究生而言将会是挑战，但我们试图采用最为直接的方式。尽管如此，本书中仍然会有部分内容会让读者觉得比其他部分更难一些。在每章最后安排的习题同样也难度不一。我们所讲述的几乎都是关于量子化的电磁场和它们对原子的作用，以及非经典光场的行为。本书的目标是把量子光学和近年来发展的量子信息处理联系在一起。

本书涵盖的课题包括：谐振腔中单模场的量子化、多模场的量子化、量子相位问题、相干态、相空间赝几率分布、原子-场相互作用、杰恩斯-卡明斯（Jaynes-Cummings, J-C）模型、量子相干理论、分束器和干涉仪、非经典场（压缩态等）、下转换获得的纠缠光子对局域实在论的检验、腔量子电动力学的实验实现、囚禁离子（或原子）、退相干问题，以及量子信息处理的某些应用，特别是量子密码术。本书的每一章都留有许多课后习题以及进一步阅读的参考文献。许多习题涉及数值计算，其中有些较为烦琐。

1.2　历史

本节用来简要回顾光学和光子学的物理思想的历史沿革。更多的细节可在玻恩（Born）和沃尔夫（Wolf）的第六版《光学原理》的“历史介绍”一章中找到。有关量子力学思想的发展史可在惠特克（Whitaker）最近的一本书 [1] 中找到，它的可读性很强。

阿鲁塞范（A. Muthukrishnan）、斯库利（M. O. Scully）和祖贝里（M. S. Zubairy）近期的一篇文章[2] 以最容易阅读的方式详细地检阅了光和光子的概念发展。

远古世纪的人们已经对光和光束的本性着迷不已。在 17 世纪之前，人们已经很好地建立起两个重要的概念：波和粒子。在 19 世纪上半叶，麦克斯韦在对作为电磁波的光仔细研究之后为现代场论打下根基。那时经典物理除了在少许诸如黑体辐射和光电效应等方面有点令人担心以外，似乎无往不胜。这些当然就是量子力学革命的种子。作为一位骨子里保守的理论物理学家，普朗克为了解释发热物体的光谱，似乎是相当不情愿地提出热辐射以分立的量子化单元进行发射和吸收。正是爱因斯坦推广了他的思想，提出这种新的量子代表了光本身而不仅仅是吸收和发射的过程，这样就能够描述物质与辐射如何建立热平衡（引入受激辐射的想法），同时也能解释光电效应。到了 1913 年，玻尔将量子化的基本思想运用到原子动力学中去，从而能够预言原子光谱谱线的位置。

在光量子的想法被引入很久以后，化学家吉尔伯特 • 列维斯（Gilbert Lewis）创造了光子这个新名词。在 1926 年，Lewis 写道：

> 如果我们设想某个假设的实体，它仅在极短时间内作为辐射能量的载体，而在其余时间内作为原子内的一个重要结构元素而存在，似乎应该把它称为光的粒子、光的微粒、光的量子或光量子……我因此冒昧地提议命名这个假设的新粒子为光子，它不是光但在每个辐射过程中扮演了重要角色[3]。

很清楚 Lewis 和我们现在的想法差距相当大!

德布罗意在一次异想天开中产生了关于光量子的想法，展示出它在波动和粒子方面的双面性。在 1925—1926 年令人惊讶的短时间内，海森伯、薛定谔和狄拉克为量子力学奠定了基础。他们提供给我们所有至今还在使用的理论工具：表象、量子态演化、幺正变换、微扰论等。量子力学内在的几率特性是马克斯 • 玻恩发掘的，他提出了几率幅的思想，从而能够对干涉进行全量子化的处理。

费米和狄拉克是量子力学的开拓者，他们同时也是首批考虑量子化的光如何与原子相互作用以及如何传播的专家。20 世纪 30 年代费米把自己在安娜堡发表演说的内容发表在《现代物理评论》上。这篇文章总结了在那个年代人们所了解的有关库仑规范下非相对论量子力学的知识。他对干涉（特别是李普曼条纹）的处理方法至今仍然值得阅读。关于这一点有必要引用威利斯 • 兰姆（Willis Lamb）的一段话：

> 在开始讨论（问题）前要决定需要从全宇宙中引入多少自由度，决定需要什么简正模式才能足够处理，决定如何对光源进行建模并推导它们如何驱动系统[4]。

这段表述总结了本书贯穿始终的方法。

魏斯科普夫（Weisskopf）和维格纳（Wigner）把非相对论量子力学的新方法运用到自发辐射和共振荧光的动力学中，预测了稳态跃迁的指数衰减率。他们的工作中已经出现了接下来困扰量子电动力学长达 20 年的自能问题，直到施温格（Schwinger）、

费恩曼（Feynman）、朝永振一郎（Tomonaga）和戴森（Dyson）发展出重整化的方案才得以解决。在此时最为突出的工作是库施（Kusch）对电子反常磁矩以及兰姆（Lamb）与卢瑟福（Rutherford）对原子辐射能级偏离的观察。对此感兴趣的读者可以在施韦伯（Schweber）那本关于量子电动力学的权威著作[5] 中发现对这段历史的详细描述。这期间的研究体现了把真空作为一种有观察效应的场进行考虑的重要性。在 20 世纪 40 年代晚期的一个重要工作中，开西米尔（Casimir）受胶体比原先仅考虑范德瓦尔斯作用要稳定得多的观测事实启发，阐述了原子间长程力的量子电动力学本质。并且他把原子间长程力与场的零点振动关联在一起，指出真空中的金属平板之间由于这样的零点振动而相互吸引。

爱因斯坦继续他在量子力学基本原理方面的研究，并在 1935 年与波多尔斯基（Podolsky）和罗森（Rosen）合作的著名文章中指出量子关联的怪异。这篇文章的想法经由玻姆（Bohm）和贝尔关于量子关联本性的具体预言而引爆了现代物理中最为活跃的领域之一，并成为量子信息处理新课题的基础。

基于振幅干涉即一阶关联的光学相干已经被研究了多年。20 世纪 50 年代，汉伯里 • 布朗（Hanbury Brown）和特维斯（Twiss）以光强度干涉作为星光干涉仪的研究工具，并指出热光子的探测时间如何集束化。这些工作引导了光子统计和光子计数理论的发展，并导致量子光学作为一门独立学科的开端。在光子统计思想发展的同时，研究者们开始探索光与物质相互作用中的相干性。随着拉比（Rabi）、拉姆塞（Ramsey）以及其他人的工作开展，射频光谱学已经在原子光束的研究中初露端倪。在 20 世纪 50 年代到 60 年代，卡斯特勒（Kastler）、布罗塞尔（Brossel）、希尔瑞（Series）、多德（Dodd）和其他人发展了光与原子相互作用的灵敏光泵浦探测器。

20 世纪 50 年代早期，汤斯（Townes）和他的小组以及巴索夫（Basov）和普罗霍罗夫（Prokhorov）已经基于初态精确制备、粒子数布居反转和受激辐射开发出分子微波辐射源，即新的微波激射器。50 年代，艾德 • 杰尼斯（Ed Jaynes）在研究量子化是否在微波激射器运行中起到作用方面扮演了重要角色（并以此为后期全量子模型的原子-场耦合方面的工作做好了准备，其中出现了后来被称为 J-C 模型的工作）。把微波激射器推广到光频段，从而开发出的激光革新了现代物理和技术。

格劳伯（Glauber）、沃尔夫（Wolf）、苏达香（Sudarshan）、曼德尔（Mandel）、克劳德（Klauder）及其他许多人发展了基于相干态和光电探测的量子相干理论。相干态允许我们在相空间中描述光的行为并使用早期由维格纳和其他一些人发展的赝几率概念。

在激光被开发出来的前几年并没有出现可调光源，这使得对原子和光或者分子和光相互作用的细节感兴趣的研究者们不得不依赖于分子内偶然的共振。尽管如此，这还是导致了人们开始研究相干作用和相干瞬态，如光子回波、自感应透明、光学章动以及其他现象（具体的描述可参见已成为标准的艾仑（Allen）和埃伯利（Eberly）的专著）。可调激光器在 70 年代初期出现，特别是染料激光器使得量子光学和激光光谱学的研究在精度上焕然一新。共振相互作用、相干瞬态和其他方面的研究变得越发简单明了，而

且导致量子光学变得接近人们当下理解的样子：我们首次能够以非微扰的方式研究单个原子与光相互作用的动力学。斯特鲁（Stroud）及其小组发起了凭借观测共振荧光分裂对共振荧光的研究。早期莫勒（Mollow）曾预言相干驱动会导致共振荧光谱线分裂成块。曼德尔（Mandel）、金布尔（Kimble）以及其他一些人展示了共振荧光如何反集束，这一特征曾被许多理论学者包括沃尔斯（Walls）、卡迈克尔（Carmichael）、科昂-塔努吉（Cohen-Tannoudji）、Mandel 和 Kimble 研究过。反集束现象以及它所关联的（但并非等价的）光子统计的亚泊松分布为“非经典光”的研究奠定基础。20 世纪 70 年代的几个实验探索了光子的本性：它们的可分辨性以及在单光子水平上干涉的建立。激光冷却迅速在 80 年代和 90 年代得到发展，从而允许在精确调控的基础上制备物质状态。实际上激光冷却自身已经成为一个主流研究学科，因此我们决定在本书中不讨论它。

随着从激光到高强度脉冲光的发展，从安娜堡的弗兰肯（Franken）及其合作者的开创性工作开始，一系列的非线性光学现象得到研究。谐波发生、参量下转换以及其他一些现象被展现出来。在非线性光学很大部分领域内的早期工作没有一篇需要场量子化，也不需要合理描述的量子光学。但早期也有迹象表明可以做到这些。事实上量子非线性光学是由伯纳姆（Burnham）和温伯格（Weinberg）对下转换中不同寻常的非经典关联的研究（第 9 章）开端的。在 Mandel 和其他许多人的手里，下转换中的这些关联成为揭示量子光学基本观念的基础工具。

直到 80 年代，人们研究的所有光场噪声本质上都与相位无关。这种状况随着带有相位相关噪声的压缩光源的产生而改变。压缩光源使得人们能够研究光场的海森伯不确定关系；再次证明参量下转换是产生这些非寻常光场的最为有效的工具。

量子光学领域的人们很早就意识到如果能将原子禁闭在谐振腔中，那么就能极大地改变原子辐射跃迁动力学。珀塞尔（Purcell）在其 1946 年发表的以核磁共振为背景的著名文章中，已经预言通常认为不会变化的自发辐射率事实上会因为把作为光源的原子封闭在谐振腔内而得到改变。这是因为谐振腔内的模式结构和密度与自由空间中的截然不同。在 60 年代晚期，将原子放到谐振腔内或放到靠近腔镜的位置成为可能。到 80 年代，理论学者梦想的研究单个原子与单模电磁场的相互作用成为可能。此时因为原子与场的相干激发交换，所以跃迁动力学变得完全可逆，直到相干性通过一个耗散的“退相干”过程最终消失。这个梦想就是曾提出的 J-C 模型，它构成了量子光学的一个基本构成单元（本书会对此进行详细讨论）。

信息处理中的新基本概念引导费恩曼、贝尼奥夫（Benioff）、多依奇（Deutsch）、乔萨（Jozsa）、贝内特（Bennett）、埃克特（Ekert）等在近年来发展出了量子密码术和量子计算机等领域。与使用 0 和 1 表示经典比特不同的是，量子计算机的基本单元是受量子力学规律支配的二能级系统（量子比特），它可以存在于逻辑值 0 和 1 的相干叠加态上。那么由 n 个比特构成的集合就可以处在至多由 2^n 个不同态（它们中的每个都代表一个二进制数字）构成的叠加态上。一旦我们能够控制和操控比如 1500 个量子比特，那么我们能够进行存取的状态数就超过了可观察宇宙中所有粒子数的总和。计算则由同时对所

有叠加态作用的幺正变换执行。这些建构的幺正变换基础构成了量子门的基本单元。与之相关的加密技术的绝对安全可以通过使用量子光源来保证。

使用量子叠加与量子纠缠的结果是高度的并行性，它能够指数级地提高计算速度。大量在经典计算机上不具有可行性的问题在量子计算机上能够被有效解决。皮特·肖尔（Peter Shor）在 1994 年开发的量子算法就有这样的指数级速度提高。这个算法用来解决一个重要的实际问题，即质因子分解问题。随后人们提出可能实现量子计算机的实验系统，比如线性离子阱和核磁共振。目前我们处在这两个体系都已发展出量子门的阶段。量子计算与量子密码术和量子通信密切相关。不少实验室已经开展了演示这些原则上可能实现的想法的基础实验。

线性离子阱是最有可能实现量子计算，也是我们在本书中详细讨论的平台之一。在这个系统中制备量子态（用激光冷却加上光学泵浦）以及对电子亚稳态和荧光的状态测量都是较为成熟的技术。在线性离子阱中，每个禁闭的带电离子（其原子是钙或铍）被激光冷却到微开尔文级的温度，它们沿着线性射频保罗型离子阱的对称轴分开排列成一串。任何一个离子的内态都能与整个串振动的量子态发生交换。将照射离子的激光辐射脉冲的频率调整到等于离子内态共振频率减去离子串振动的某个简正模式频率，就可以做到这一点。它使得单声子能够进出振动模式。如果用类似的激光脉冲对准另一个离子，则振动态就与该离子的内态耦合起来。用此方法可以产生所有离子量子态的一般的幺正变换。离子阱有若干特征受到人们欢迎。它在不需要任何新技术突破的前提下就能对量子比特进行操作。它可以用来测量任何离子的状态，并重复多次而毫无问题，这是量子纠错协议得以执行的重要特征。

在谐振腔内禁闭的原子或离子可以和电磁场模式发生强耦合，从而允许量子态处理以及量子长程通信之间强强联合的发生。这也提示了量子存储器可能建构的方式。原则上用这些量子系统可以实现经典计算不能完全模拟的更强大的量子处理器，但因退相位和自发辐射引起的消相干是一个难以克服的障碍。

量子纠缠态是特定形式的量子密码术和量子隐形传态的关键资源。纠缠同时也是量子计算强大的原因。在理想情况下，量子计算能比任何经典计算机以指数级加速完成特定任务。更深入的认识量子纠缠在量子信息论中所扮演的角色将使我们改进现有应用并发展出量子信息处理的新方法。这些都是后面章节要讲述的内容。

那么量子光学的未来是什么？它为激光科学和新的原子物理提供支撑。它甚至可能成为我们能够实现全新技术的载体。凭借量子光学，量子力学允许我们以一种全新的方式对信息进行处理和传输。当然我们现在所预言可能出现的技术也许会和意料之外的事情混淆在一起，整个领域因为不断出现的意外而继续充满冒险。

1.3　本书内容

本书布局如下。第 2 章展示如何把电磁场量子化为简谐振子模型，其中振子所代表的电磁场模式的状态描述了每个简正模式上的光子数布居。第 3 章引入相干态概念，它

是一类承载相位信息的量子叠加态。第 4 章描述光与物质如何相互作用。第 5 章用光场关联函数来量化我们的相干概念。第 6 章介绍一些用来操控光场状态的简单光学实验单元，比如分束器与干涉仪。第 7 章描述非经典光，它们的基本性质取决于其量子本性。第 8 章讨论自发辐射和开放环境下的耗散。第 9 章描述如何用量子辐射光源检验量子力学的基本原理，包括非局域性和贝尔不等式的检验。第 10 章讨论如何将原子禁闭在谐振腔中，以及如何用激光冷却后的囚禁离子研究基本相互作用的现象。第 11 章提供了我们所了解的在量子信息处理方面出现的新课题。本书的附录用来澄清主体内容所需要的一些数学处理。我们还试图通过课后习题阐述我们所发展的物理思想。

参考文献

[1] A. Whitaker, Einstein, Bohr and the Quantum Dilemma (Cambridge: Cambridge University Press, 1996).

[2] A. Muthukrishnan, M. O. Scully and M. S. Zubairy, Optics and Photonics News Trends, 3, No. 1 (October 2003).

[3] G. N. Lewis, Nature, 118 (1926), 874.

[4] W. E. Lamb, Jr., Appl. Phys. B, 66 (1995), 77.

[5] S. S. Schweber, QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger and Tomonaga (Princeton University Press, Princeton, 1994).

更多阅读的建议

在更多专业方向上，以下这些已有的量子光学书比我们这本书更为深入。

- L. Allen and J. H. Eberly, Optical Resonance and Two Level Atoms (New York: Wiley, 1975 and Mineola: Dover, 1987).
- H. Bachor, A Guide to Experiments in Quantum Optics (Berlin and Weinheim: Wiley-VCH, 1998).
- S. M. Barnett and P. M. Radmore, Methods in Theoretical Quantum Optics (Oxford: Oxford University Press, 1997).
- C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, Photons and Atoms (New York: Wiley-Interscience, 1989).
- C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, Atom–Photon Interactions (New York: Wiley-Interscience, 1992).
- V. V. Dodonov and V. I. Man'ko (editors), Theory of Nonclassical States of Light (London: Taylor and Francis, 2003).
- P. Ghosh, Testing Quantum Mechanics on New Ground (Cambridge: Cambridge University Press, 1999).
- H. Haken, Light, Volume I: Waves, Photons, and Atoms (Amsterdam: North Holland, 1981).
- J. R. Klauder and E. C. G. Sudarshan, Fundamentals of Quantum Optics (New York: W. A. Benjamin, 1968).
- U. Leonhardt, Measuring the Quantum State of Light (Cambridge: Cambridge University Press, 1997).

- W. H. Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation (New York: Wiley, 1973).
- R. Loudon, The Quantum Theory of Light, 3rd edition (Oxford: Oxford University Press, 2000).
- L. Mandel and E. Wolf, Optical Coherence and Quantum Optics (Cambridge: Cambridge University Press, 1995).
- P. Meystre and M. Sargent III, Elements of Quantum Optics, 2nd edition (Berlin: Springer-Verlag, 1991).
- G. J. Milburn and D. F. Walls, Quantum Optics (Berlin: Springer-Verlag, 1994).
- H. M. Nussenzveig, Introduction to Quantum Optics (London: Gordon and Breach, 1973).
- M. Orszag, Quantum Optics: Including Noise, Trapped Ions, Quantum Trajectories, and Decoherence (Berlin: Springer, 2000).
- J. Peřina, Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena, 2nd edition (Dordrecht: Kluwer, 1991).
- V. Peřinová, A. Lukš, and J. Peřrina, Phase in Optics (Singapore: World Scientific, 1998).
- R. R. Puri, Mathematical Methods of Quantum Optics (Berlin: Springer, 2001).
- M. Sargent, III, M. O. Scully and W. E. Lamb, Jr., Laser Physics (Reading: Addison-Wesley, 1974).
- M. O. Scully and M. S. Zubairy, Quantum Optics (Cambridge: Cambridge University Press, 1997).
- W. P. Schleich, Quantum Optics in Phase Space (Berlin: Wiley-VCH, 2001).
- B. W. Shore, The Theory of Coherent Atomic Excitation (New York: Wiley-Interscience, 1990).
- W. Vogel and D.-G. Welsch, Lectures in Quantum Optics (Berlin: Akademie Verlag, 1994).
- M. Weissbluth, Photon–Atom Interactions (New York: Academic Press, 1989).
- Y. Yamamoto and A. İImamoğlu, Mesoscopic Quantum Optics (New York:Wiley-Interscience, 1999).

下面这部论文集再版了许多关于相干态的有用文章，包括格劳伯（Glauber）、克劳德（Klauder）以及早期其他人的工作。

- J. R. Klauder and B.-S. Skagerstam (editors), Coherent States (Singapore: World Scientific, 1985).

在许多地方都可以找到量子光学以及量子力学基本原理检验的发展史。我们发现以下文献弥足珍贵：

- R. Baeierlin, Newton to Einstein (Cambridge: Cambridge University Press, 1992).
- M. Born and E. Wolf, Principles of Optics (Cambridge: Cambridge University Press, 1998).
- A. Whitaker, Einstein, Bohr and the Quantum Dilemma (Cambridge: Cambridge University Press, 1996).

第 2 章　场 量 子 化

本章讨论电磁场的量子化及其性质，特别是有关光子作为场正则模式的基本激发的诠释。我们从一维腔内由导体壁限制的单模场例子出发，随后推广到自由空间中的多模场。我们引入光子数态并讨论场观测量关于这类态的涨落。最后讨论量子化电磁场相位的量子力学描述问题。

2.1　单模场的量子化

我们从一个相当简单但非常重要的辐射场例子出发讨论。这个场被限制在沿着 z 轴的一维腔内，如图 2.1 所示，两个完美导体壁分别在 $z=0$ 和 $z=L$ 处。

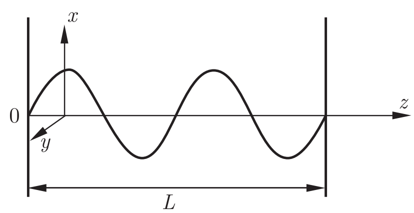

图 2.1　以位置在 $z=0$ 和 $z=L$ 处的两个完美导体腔壁构成的谐振腔，其中电场的偏振方向沿 x 方向

电场必然在边界处消失而采取驻波的形式。假设没有辐射源，也就是说腔内没有电流或电荷也没有任何电介质。假设电场的偏振方向沿着 x 轴，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_x E_x(z,t)$，其中 $\boldsymbol{e}_x$ 是单位偏振算符。无源的麦克斯韦方程组是（国际单位制）：

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0\tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=0\tag{2.4}$$

满足麦克斯韦方程和边界条件的单模场由（2.5）式给出

$$E_x(z,t)=\left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0}\right)^{1/2}q(t)\sin(kz)\tag{2.5}$$

式中，ω 是模式频率，k 是波数，二者关系是 $k=\omega/c$。$z=L$ 处的边界条件给出允许的频率 $\omega_m=c(m\pi/L), m=1,2,\cdots$。假设（2.5）式中的 ω 是其中某个本征频率，并且暂时忽略其他本征频率的影响。（2.5）式中的 V 是腔的有效体积，$q(t)$ 是长度量纲的时间因子。正如我们将看到的，$q(t)$ 起到正则位置的作用。从（2.5）式和（2.2）式可知腔中的磁场是 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_yB_y(z,t)$，其中

$$B_y(z,t)=\left(\frac{\mu_0\epsilon_0}{k}\right)\left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0}\right)^{1/2}\dot{q}(t)\cos(kz) \tag{2.6}$$

这里 $\dot{q}(t)$ 将扮演单位质量“粒子”的正则动量的角色，即 $p(t)=\dot{q}(t)$。

单模场的经典场能或者哈密顿量 H 由下式给出

$$H=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\left[\epsilon_0\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{r},t)\right]=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\left[\epsilon_0E_x^2(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{\mu_0}B_y^2(\boldsymbol{r},t)\right] \tag{2.7}$$

从（2.5）式和（2.6）式可直接推导（留作习题）而得到

$$H=\frac{1}{2}(p^2+\omega^2q^2) \tag{2.8}$$

从中可以看到单模场显然在形式上等价于单位质量的谐振子。如不计某些标度因子，其中电场和磁场分别扮演正则位置和正则动量的角色。

每一本量子力学基础教科书都会讨论一维谐振子的量子化。我们这里的方案是先确认经典系统中的正则变量 q 和 p，利用简单对应规则把它们分别替换为算符 $\hat{q}$ 和 $\hat{p}$（注意本书中算符与常数的标记区别）。这些算符必须满足正则对易关系

$$[\hat{q},\hat{p}]=\mathrm{i}\hbar\hat{I} \tag{2.9}$$

以后我们按惯例舍掉单位算符 $\hat{I}$，写做 $[\hat{q},\hat{p}]=\mathrm{i}\hbar$。接下来单模电场与磁场变成算符形式，它们分别是

$$\hat{E}_x(z,t)=\left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0}\right)^{1/2}\hat{q}(t)\sin(kz) \tag{2.10}$$

和

$$\hat{B}_y(z,t)=\left(\frac{\mu_0\epsilon_0}{k}\right)\left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0}\right)^{1/2}\hat{p}(t)\cos(kz) \tag{2.11}$$

哈密顿量则变成

$$\hat{H}=\frac{1}{2}(\hat{p}^2+\omega^2\hat{q}^2) \tag{2.12}$$

算符 $\hat{q}$ 和 $\hat{p}$ 都是厄米的，因而对应可观测量。不过习惯上依靠下面的组合引入非厄米（因而也是非观测量）的湮灭算符 $\hat{a}$ 和产生算符 $\hat{a}^\dagger$ 较为方便：

$$\hat{a}=(2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\hat{q}+\mathrm{i}\hat{p}) \tag{2.13}$$

$$\hat{a}^\dagger = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\hat{q} - \mathrm{i}\hat{p}) \tag{2.14}$$

电场和磁场算符则分别变为

$$\hat{E}_x(z,t) = \mathcal{E}_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\sin(kz) \tag{2.15}$$

$$\hat{B}_y(z,t) = \mathcal{B}_0\frac{1}{\mathrm{i}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)\cos(kz) \tag{2.16}$$

其中 $\mathcal{E}_0 = (\hbar\omega/\epsilon_0 V)^{1/2}$ 和 $\mathcal{B}_0 = (\mu_0/k)(\epsilon_0\hbar\omega^3/V)^{1/2}$ 分别代表“每个光子”的电场和磁场。这里的引号表示这句话并不完全正确，因为正如我们将看到的，光子数目确定的电磁场的期望值是零。尽管如此，它们对度量量子场的涨落是有用的。算符 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^\dagger$ 满足对易关系

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{2.17}$$

且其结果导致哈密顿量算符取如下形式：

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{2.18}$$

到目前为止，我们还没有考虑算符 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^\dagger$ 的时间依赖性。对任意一个不显含时间的算符 $\hat{O}$，它满足的海森伯方程是

$$\frac{\mathrm{d}\hat{O}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}, \hat{O}] \tag{2.19}$$

对于湮灭算符 $\hat{a}$ 来说，

$$\frac{\mathrm{d}\hat{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}, \hat{a}] = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right), \hat{a}\right] = \mathrm{i}\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}) = \mathrm{i}\omega[\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\hat{a} = -\mathrm{i}\omega\hat{a} \tag{2.20}$$

它的解是

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{2.21}$$

用同样的办法或者直接对（2.21）式取厄米共轭，有

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2.22}$$

另一种获得这些解的方法是写出（2.19）式的形式解：

$$\hat{O}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht/\hbar}\hat{O}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar} \tag{2.23}$$

然后使用贝克-豪斯多夫（Baker-Hausdorf）引理[1] 得到

$$\begin{aligned}\hat{O}(t) = \hat{O}(0) + \frac{\mathrm{i}t}{\hbar}[\hat{H}, \hat{O}(0)] + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{i}t}{\hbar}\right)^2[\hat{H}, [\hat{H}, \hat{O}(0)]] + \cdots \\ \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{i}t}{\hbar}\right)^n[\hat{H}, [\hat{H}, [\hat{H}, \cdots[\hat{H}, \hat{O}(0)]]]] + \cdots\end{aligned} \tag{2.24}$$