第一部分
内容概要与典型例题

第1篇　力　学

力学是研究物体机械运动规律及其应用的一门学科。力学部分主要包括质点运动学、牛顿运动定律(质点动力学)、动量和角动量、功和能、刚体的定轴转动以及狭义相对论。

伽利略开创了科学实验方法,创立了对物理现象进行观察与实验,并把实验方法与理论思维(科学假设,数学推理,逻辑论证和演绎)相结合的科学研究方法。

力学从质点模型出发,采用演绎法,应用基本规律和基本原理解决问题。

17世纪后,以牛顿运动定律为基础,总结并形成了牛顿力学体系或经典力学体系。牛顿力学体系仅适用于运动速度远小于光速的宏观物体的机械运动。力学已成为许多工程技术的重要基础。

第1章　质点运动学

运动学是力学中的一部分。它通过位移、速度、加速度等物理量,用质点模型描述和研究物体位置随时间变化的情况,但不涉及变化的原因(受力)和质量等因素。

【内容概要】

1. 质点与参考系

(1) 质点

质点是指具有一定质量而没有大小和形状的物体,它是物理学中的一个理想化模型。

实际物体都有大小,但当其尺度在所讨论的问题中对整个运动过程影响很小时(例如,研究地球公转时,地球半径比太阳、地球之间的距离小得多),可以不计物体内部各处运动状况的差别,而把它看成只有质量的点,使问题大为简化。

若干相互之间具有一定联系的质点组成的系统称为质点系,也称质点组。在力学中,一个物体可看作由无数质点组成的体系。

刚体是各质点间距离都保持不变的特殊质点系。质点、刚体都是在一定条件下从实际物体抽象出来的理想化模型。

(2) 参考系

为了确定一个物体的位置和描述其运动而选作基准的另一个物体称为参考系,也称参照系、参照物。为了定量描述物体的运动,通常还要在参考系上建立坐标系。

从不同参考系看，同一物体的运动状态各不相同。宇宙间不存在绝对静止的物体，所有的参考系都在运动。但在具体问题中，常常将某个选定的参考系视为静止。如习惯取地球为参考系(定参考系、基本参考系)，在天文学上取太阳或某个恒星为定参考系。

2. 描述质点运动的四个物理量

以下四个物理量具有共同的基本特征：瞬时性、方向性(矢量性)、相对性、叠加性、独立性。

(1) 位置矢量(位矢)

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

质点的运动方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}\quad 或\quad x=x(t),y=y(t),z=z(t)$$

(2) 位移

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

位移是描述质点位置变化的物理量，为矢量。质点在某一时间内的位移，用其在这时间内的初位置指向末位置的有向直线段表示。

路程是质点在某一时间内所经过的路线(轨迹)的总长度，为标量。

(3) 速度与速率

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

速度是描述位置变化的快慢和方向的物理量，为矢量。在日常生活中，有时也把各种量随时间变化的快慢、各种过程进行的快慢称为速度。

位移和所历时间的比值，称为这段时间内的平均速度。如果这一时间极短(趋近于零)，这一比值的极限称为物体在该时刻的速度或瞬时速度。在直线运动中，速度方向沿物体前进的直线方向；在曲线运动中，速度方向沿运动轨道的切线方向。

速度的大小为速率，即

$$v=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

在路径确定的情况下，可用速率描述路径上位置的变化率，因为速度的方向就是各点的切线方向。

(4) 加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

加速度是描述速度变化的快慢和方向的物理量，为矢量。其方向为速度变化的极限方向。

速度的变化与这变化所历时间 Δt 的比值，称为这段时间内的平均加速度。若 Δt 极短($\Delta t\to 0$)，此比值的极限称为物体在该时刻的瞬时加速度，简称加速度。

当质点在 Ox 轴作直线运动，加速度为常矢量时，为匀加速直线运动。若初始条件为 x_0 或 v_0，则

$$v=v_0+at,\quad x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2,\quad v^2-v_0^2=2ax$$

3. 描述质点圆周运动的四个角量

描述质点圆周运动的四个物理量与质点作一般运动的四个物理量(位矢、位移、速度和加速度)相对应。圆周运动具有确定的轨迹,采用角量处理问题较为方便。

(1) 角坐标

角坐标 $\theta=\theta(t)$,用于表示圆周运动的运动方程。

(2) 角位移

角位移是矢量,其大小为 $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$,它是描述物体转动时位置变化的物理量。

(3) 角速度

角速度是描述物体转动或一质点绕某点转动时角度变化快慢和方向的物理量。物体的角位移变化和这一变化所经历时间的比值,称为这段时间的平均角速度。当这一时间极短时($\Delta t\to 0$),此比值的极限称为物体在该时刻的瞬时角速度,简称角速度。角速度$\boldsymbol{\omega}$的大小为$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$,单位为 $\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$或$(^\circ)\cdot \mathrm{s^{-1}}$,它的方向在当时的转动轴线上,其指向由右手螺旋定则决定,为轴矢量。

(4) 角加速度

角加速度是描述转动物体角速度变化的快慢和方向的物理量。物体的角速度和这变化所经历时间 Δt 的比值,称为这段时间的平均角加速度。当 Δt 极短时($\Delta t\to 0$),此比值的极限称为物体在该时刻的瞬时角加速度,简称角加速度。角加速度$\boldsymbol{\alpha}$是轴矢量,大小为 $\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$,单位为 $\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$或$(^\circ)\cdot \mathrm{s^{-2}}$。

如果转动中转动轴保持不变,则角加速度的方向与角速度相同;否则,既要体现转速的改变,也要反映转轴的变化。有的书中用 β 表示角加速度。

(5) 线量与角量的关系

圆周运动的加速度可分解为切向加速度 a_{t} 和法向加速度 a_{n}。切向加速度 a_{t} 为加速度矢量在切线方向上的投影,法向加速度 a_{n} 为加速度矢量在垂直切线方向的投影。

切向加速度 $a_{\mathrm{t}}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\alpha$,沿切线方向;

法向加速度 $a_{\mathrm{n}}=\omega^2R=\dfrac{v^2}{R}$,指向圆心。

总加速度 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$,大小 $a=\sqrt{a_{\mathrm{t}}^2+a_{\mathrm{n}}^2}$,方向与切向的夹角为 $\theta=\arctan\dfrac{a_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{t}}}$。

质点以半径 r 作圆周运动时,质点的线量与角量的关系为

$$v=r\omega\quad(\text{矢量式为}\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}),\quad a_{\mathrm{t}}=r\alpha,\ a_{\mathrm{n}}=r\omega^2$$

匀角加速度运动时的运动学公式(当角加速度$\boldsymbol{\alpha}$为常矢量时)为

$$\omega=\omega_0+\alpha t,\quad \theta=\theta_0+\omega_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2,\quad \omega^2-\omega_0^2=2\alpha(\theta-\theta_0)$$

4. 一般曲线运动(平面曲线运动)

（1）切向加速度

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

其中,v 为 t 时刻切线方向的速度大小。

（2）法向加速度

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{\rho}$$

式中,ρ 为 t 时刻质点位置的曲率半径,v 为 t 时刻切线方向的速度大小。

引入自然坐标系,对一般曲线运动,a_{t} 描述速度大小(快慢)变化,a_{n} 描述速度方向变化。对于作曲线运动的物体,总有 $a_{\mathrm{n}} \neq 0$。

物体作圆周运动时,ρ 就是圆周半径;物体作匀速圆周运动时,$a_{\mathrm{t}}=0$,为一般曲线运动的特例。

（3）抛体运动

在以抛出点为原点、水平方向为 Ox 轴的平面直角坐标系中,将物体以仰角 θ、初速度 v_0 抛出(斜抛),如图 1-1 所示。在抛出后的任意时刻,物体仅受重力作用,有

$$a_x = 0, a = a_y = -g \quad 或 \quad a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{\rho}$$

$$v_x = v_0 \cos\theta, \quad v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t, \quad y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

质点的轨道方程为

$$y = \tan\theta \cdot x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

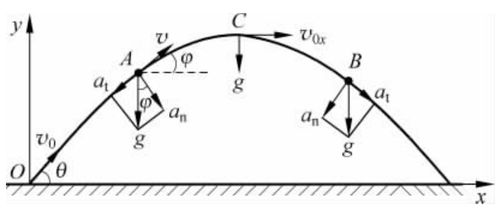

图 1-1 物体斜抛运动示意图

5. 力学相对性原理(伽利略变换)

在不同惯性系中,牛顿运动定律具有相同的形式,即在伽利略变换下保持形式不变。

在相对运动中,通常涉及伽利略坐标变换,以速度变换和加速度变换为主。变换公式为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}_0 \quad (坐标变换式)$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u} \quad (速度变换式)$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0 \quad (加速度变换式)$$

以上各式均为相对运动中对应的位置矢量(位矢)、速度和加速度的矢量叠加。

对 A、B、C 三个运动物体,其速度和加速度的合成关系

$$\boldsymbol{v}_{AC}=\boldsymbol{v}_{AB}+\boldsymbol{v}_{BC} \quad 或 \quad \boldsymbol{v}_{AB}=\boldsymbol{v}_{AC}+\boldsymbol{v}_{CB}$$

$$\boldsymbol{a}_{AC}=\boldsymbol{a}_{AB}+\boldsymbol{a}_{BC} \quad 或 \quad \boldsymbol{a}_{AB}=\boldsymbol{a}_{AC}+\boldsymbol{a}_{CB}$$

为矢量式;可沿某一方向写出分量式,求得该方向分量的合成关系。式中,下标 AB 表示 A 相对于 B,其他形式相似。

力学相对性原理是爱因斯坦相对性原理在低速运动情况下的近似。爱因斯坦相对性原理要求一切反映物理过程规律性的方程在洛伦兹变换下保持相同的形式。

6. 运动学中两类问题的求解

微分与积分的应用是本章难点。相关题型有以下两种情况。

(1) 已知运动方程,求速度、加速度

根据已知的运动方程(函数),通过微分(或求导)方法进行求解。如例1-1。

(2) 已知加速度与其他变量关系,以及初始条件(如初始速度、起始位置),求速度或运动方程

若加速度为时间关系表达式,即 $a=a(t)$,采用积分方法直接求解,可求出任意时刻质点的速度,以及位矢及其相互关系。如例1-2。

若加速度表达式为加速度与其他变量关系,如直线运动 $a=a(x)$ 或 $a=a(v)$,一般需要先通过合理的分离变量或变量代换,再利用积分方法求解。如例1-3。

例如,$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。

【典型例题】

【例1-1】 一质点在 xOy 平面上运动,运动函数为 $x=2t$,$y=4t^2+2$(SI)。求:(1)质点运动的轨道方程;(2)从 $t=1$ s 到 $t=2$ s 质点的位移;(3)$t=2$ s 时,质点的速度和加速度。

【解】 (1) 把运动函数中的变量时间 t 消去,得轨道方程

$$y=x^2+2$$

(2) 位置矢量为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=2t\boldsymbol{i}+(4t^2+2)\boldsymbol{j}$$

$t=1$ s 时,$\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$;$t=2$ s 时,$\boldsymbol{r}_2=4\boldsymbol{i}+18\boldsymbol{j}$。

从 $t=1$ s 到 $t=2$ s 质点的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}=2\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}\,(\mathrm{m})$$

(3) $t=2$ s 时,质点速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}=2\boldsymbol{i}+8t\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{v}_2=2\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}\,(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}=8\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{j}\,(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})$$

【例 1-2】 一质点沿 x 轴作直线运动，加速度为 $a=12t$(SI)；在 $t=0$ 时，质点位于 $x_0=5$ m 处，初速度 $v_0=0$，求质点的运动方程。

【解】 由 $a=\dfrac{dv}{dt}=12t$，可得 $dv=12t\ dt$，积分得

$$\int_0^v dv=\int_0^t 12t dt,\quad v=6t^2$$

由 $v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2$，可得 $dx=6t^2\ dt$，积分得

$$\int_5^x dx=\int_0^t 6t^2 dt$$

质点的运动方程为

$$x=2t^3+5(\text{m})$$

【例 1-3】 一物体在 x 轴上作直线运动，其加速度为 $a=-\omega^2 x$，式中 ω 为常量。设物体在坐标 x_0 处的速度为 v_0，求物体速度 v 与坐标 x 的关系式。

【解】 由 $a=\dfrac{dv}{dt}$，对 $a=-\omega^2 x$ 进行变量转换得

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=-\omega^2 x$$

分离变量，则 $v dv=-\omega^2 x dx$，积分得

$$\int_{v_0}^v v dv=-\int_{x_0}^x \omega^2 x dx,\quad v^2-v_0^2=-\omega^2(x^2-x_0^2)$$

解得

$$v^2=v_0^2-\omega^2(x^2-x_0^2)$$

【例 1-4】 一石子从空中静止下落，由于空气阻力，石子并非作自由落体运动，而是以加速度 $a=A-Bv$ 下落，式中 A、B 均为大于零的常量，求石子下落的速度和运动方程。

【解】 取石子开始下落处为原点，垂直向下为 Oy 轴，$y_0=0$，则

$$a=\frac{dv}{dt}=A-Bv$$

分离变量，并积分，注意到 $v_0=0$，则

$$\int_0^t dt=\int_0^v \frac{dv}{A-Bv}=\frac{1}{B}\ln\left(\frac{A}{A-Bv}\right)$$

石子下落的速度为

$$v=\frac{A}{B}(1-e^{-Bt})$$

运动方程为石子下落的距离，即

$$y=\int_0^t v dt=\int_0^t \frac{A}{B}(1-e^{-Bt})dt=\frac{A}{B^2}(e^{-Bt}+Bt-1)$$

【例 1-5】 一质点在 xOy 平面内的运动方程为 $x=3\sin 5t$，$y=4\cos 5t$(SI)。求质点的切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n 的大小。

【解】 因为 $x^2+y^2=5^2$，即质点作半径 $R=5$ m 的圆周运动。

速度分量为

$$v_x=15\cos 5t,\quad v_y=-20\sin 5t$$

加速度分量为

$$a_x = -75\sin 5t, \quad a_y = -100\cos 5t$$

则

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 125\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$，可见，质点作匀速圆周运动。

由 $a=125\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$，$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}$，得

$$a_n = a = 125\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \quad \text{或} \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{25^2}{5}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 125\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

【例 1-6】 河水以 10 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$的流速向东流，船相对河水以 20 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$的速度向西偏北 30°航行。此时在刮西风，风速为 10 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$。求在船上观察船上烟囱冒出的烟的速度和方向。

【解】 以河岸为参照系，由相对运动公式，船的速度为

$$\boldsymbol{v}_{\text{船对地}} = \boldsymbol{v}_{\text{船对水}} + \boldsymbol{v}_{\text{水对地}}$$

如图 1-2(a)所示，$\theta=30°$，由速度矢量合成公式，可得船对水的速度大小为 $10\sqrt{3}$ km/h，船在水上运动的方向为由南向北。

以船只为参照系，由相对运动公式，风与船的速度关系为

$$\boldsymbol{v}_{\text{风对地}} = \boldsymbol{v}_{\text{风对船}} + \boldsymbol{v}_{\text{船对地}}$$

船上的人观察船上烟囱冒出的烟，相当于风对船的速度，即

$$\boldsymbol{v}_{\text{风对船}} = \boldsymbol{v}_{\text{风对地}} - \boldsymbol{v}_{\text{船对地}}$$

由图 1-2(b)，可求出在船上观察船上烟囱冒出的烟的速度大小为 20 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$，方向为南偏西 30°。

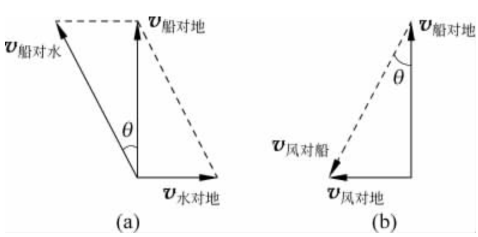

图 1-2　相对运动

(a) 船与河水运动关系；(b) 风与船运动关系

穷则变，变则通，通则久。

——《周易·系辞下》

第 2 章　牛顿运动定律

本章研究质点动力学，即以牛顿运动定律为基础，研究物体受力作用时，质点机械运动状态发生变化的规律。牛顿运动定律建立了力与运动量变化之间的关系，牛顿第一定律表述惯性原理，牛顿第二定律表述动力学基本原理，牛顿第三定律表述作用与反作用原理。

【内容概要】

1. 牛顿第一定律

牛顿第一定律又称惯性定律，指任何物体（通常为质点）在不受外力作用或所受的合外力为零时，都将保持原来的运动状态，即静止的仍然静止，原来运动的继续保持匀速直线运动。

物体这种固有的运动属性称为惯性。质量是惯性的量度。当外力一定时，惯性表现为物体运动状态改变的难易程度。惯性大的物体，运动状态较难改变，在同样的外力作用下获得的加速度较小。

2. 牛顿第二定律

牛顿第二定律表述为：任何物体在外力作用下，其动量随时间的变化率与其所受外力成正比，且与外力的方向相同。牛顿第二定律描述了作用在物体上的力是如何使物体运动状态发生改变的。

在牛顿力学中，把质量看成不变的量，故牛顿第二定律又可表述为：物体所获得的加速度 $\boldsymbol{a}$ 与外力 $\boldsymbol{F}$ 成正比，与物体质量 m 成反比，加速度的方向与外力的方向相同。即

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \quad \left(\text{微分形式，或 } \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \text{ 为动量}\right)$$

在 xOy 平面直角坐标系中，分量式为

$$F_x = \sum_i F_{ix} = ma_x, \quad F_y = \sum_i F_{iy} = ma_y$$

在自然坐标系中，分量式为

$$F_\mathrm{t} = \sum_i F_{i\mathrm{t}} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad F_\mathrm{n} = \sum_i F_{i\mathrm{n}} = m\frac{v^2}{\rho} \quad (\rho \text{ 为曲率半径})$$

3. 牛顿第三定律

牛顿第三定律表述为：若物体 A 以力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用于物体 B，则同时物体 B 必以力 $\boldsymbol{F}_2$ 作用于物体 A；这两个力大小相等、方向相反，而且沿同一直线，即 $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$。牛顿第三定律也称作用与反作用定律。

但是，并不是所有的“相互作用”都一定满足牛顿第三定律，如磁相互作用。

4. 惯性参考系(惯性系)

惯性系是牛顿第一运动定律在其中成立的参考系。在研究地面上物体的运动时，可将