第 1 章　随机事件与概率

1. 已知 10 只晶体管中有 2 只次品，在其中取两次，每次随机取 1 只，做不放回抽样，求下列事件的概率：

（1）2 只都是正品（记为事件 A）；

（2）2 只都是次品（记为事件 B）；

（3）1 只是正品，1 只是次品（记为事件 C）。

解：（1）**方法一**：组合法，在 10 只中任意取 2 只来组合，每一个组合看作是一个基本结果，每种取法等可能，则

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_8^2}{\mathrm{C}_{10}^2}=\frac{28}{45}$$

方法二：排列法，在 10 只中任意取 2 只来排列，每一个排列看作是一个基本结果，每个排列等可能，则

$$P(A)=\frac{\mathrm{A}_8^2}{\mathrm{A}_{10}^2}=\frac{28}{45}$$

方法三：用事件的运算和概率计算法则来做，用 A_1，A_2 分别表示第一、二次取得正品，则

$$P(A)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$$

（2）**方法一**：$P(B)=\dfrac{\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{C}_{10}^2}=\dfrac{1}{45}$

方法二：$P(B)=\dfrac{\mathrm{A}_2^2}{\mathrm{A}_{10}^2}=\dfrac{1}{45}$

方法三：$P(B)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)=\dfrac{2}{10}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{45}$

（3）**方法一**：$P(C)=\dfrac{\mathrm{C}_8^1\times\mathrm{C}_2^1}{\mathrm{C}_{10}^2}=\dfrac{16}{45}$

方法二：$P(C)=\dfrac{(\mathrm{C}_8^1\times\mathrm{C}_2^1)\times\mathrm{A}_2^2}{\mathrm{A}_{10}^2}=\dfrac{16}{45}$

2. 某商店销售 10 台电冰箱，其中 7 台为一级品，3 台为二级品。当某人到商店时，电冰箱已被卖出 2 台，求此人买到一级品的概率。

解：这类应用问题的解题关键是分析它的概率模型，一个具体问题有时可以看成多种概率模型，下面用 3 种概率模型求解这个问题。

方法一： 全概率模型。设 A 为此人能买到一级品，B_k 为卖出的 2 台中有 k 台一级品，其中 $k=0,1,2$，$\{B_k\}$ 为完备事件组，A 是其中的一个事件。由全概率公式有

$$P(A)=\sum_{k=0}^{2}P(B_k)P(A\mid B_k)$$

其中

$$P(B_0)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15},\quad P(A\mid B_0)=\frac{7}{8}$$

$$P(B_1)=\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15},\quad P(A\mid B_1)=\frac{6}{8}$$

$$P(B_2)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{7}{15},\quad P(A\mid B_2)=\frac{5}{8}$$

所以

$$P(A)=\frac{1}{15}\times\frac{7}{8}+\frac{7}{15}\times\frac{6}{8}+\frac{7}{15}\times\frac{5}{8}=0.7$$

方法二： 视为抓阄问题。由于此人抽到一级品的概率与第几次抽到一级品无关，即可以将本问题看成是抓阄问题，与顺序无关，即每个人买到一级品的概率相同，所以

$$P(A_3)=P(A_1)=\frac{7}{10}=0.7$$

A_3 表示第 3 次买到一级品，A_1 表示第 1 次买到一级品。

方法三： 此题可以看成是 3 次不放回的随机抽取，则此人买到一级品可看成是第 3 次抽到一级品。设 A_i 为第 i 次抽到一级品（$i=1,2,3$），则

$$A_3=A_1A_2A_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

$$\begin{aligned}P(A_3)&=P(A_1A_2A_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)+P(A_1)P(\overline{A}_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\overline{A}_2)+\\&\quad P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)\\&=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}+\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{8}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}\\&=0.7\end{aligned}$$

3. 50 个铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 个铆钉强度太弱。每个部件用 3 个铆钉，若将 3 个强度太弱的铆钉装在同一个部件上，则这个部件强度就太弱。求发生一个部件强度太弱的概率是多少？

解：方法一： 随机试验是从 50 个铆钉中任取 3 个，共有 C_{50}^3 种取法，而发生“一个部件强度太弱”这一事件只有 C_3^3 种取法，所以发生“某一部件强度太弱”的概率为

$$p_i=\frac{C_3^3}{C_{50}^3}=\frac{1}{19\,600}$$

而 10 个部件发生“强度太弱”这一事件是等可能的，所以所求概率为

$$p=\sum_{i=1}^{10}p_i=\frac{1}{1\,960}$$

方法二： 样本空间的样本点数为 C_{50}^3，而要想发生“一个部件强度太弱”这一事件，则必须将 3 个强度太弱的铆钉同时取来，并放在一个部件上，共有 $C_3^3C_{10}^1$ 种情况，所以发生

“一个部件强度太弱”这一事件的概率为

$$p=\frac{C_3^3C_{10}^1}{C_{50}^3}=\frac{1}{1\,960}$$

4. n 个人随机围一圆桌而坐，求甲、乙二人之间恰好间隔 r 个人的概率。

解：方法一：随机试验，考虑 n 个人的坐法。

由于 n 个人坐法完全任意，可看作 n 个不同元素的全排列，故样本空间 Ω 含有 $n!$ 个样本点。而事件 $A=\{$甲、乙二人之间恰好间隔 r 个人$\}$ 所含的样本点数可以这样考虑：第一步，甲先坐，有 n 种坐法；第二步，乙与甲间隔 r 个人，有顺时针和逆时针 2 种坐法；第三步，考虑剩下的$(n-2)$个人，可任意坐，有$(n-2)!$ 种坐法。根据乘法原理，事件 A 共有 $n\cdot 2\cdot(n-2)!$个样本点。所以所求概率为

$$P(A)=\frac{n\cdot 2\cdot(n-2)!}{n!}=\frac{2}{n-1}$$

方法二：随机试验，只考虑甲、乙二人的坐法。

甲、乙二人坐法完全任意，共有 $n(n-1)$ 种坐法，故样本空间 Ω 含有 $n(n-1)$ 个样本点。而事件 $A=\{$甲、乙二人之间恰好间隔 r 个人$\}$ 所含的样本点数可以这样考虑：第一步，甲先坐，有 n 种坐法；第二步，乙与甲间隔 r 个人，有顺时针和逆时针 2 种坐法。根据乘法原理，事件 A 共有 $2n$ 个样本点。所以所求概率为

$$P(A)=\frac{2n}{n(n-1)}=\frac{2}{n-1}$$

方法三：随机试验，只考虑乙的坐法（假定甲已在某个座位上坐好）。

由于甲已坐好，乙共有$(n-1)$种坐法，故样本空间 Ω 含有$(n-1)$个样本点。乙与甲间隔 r 个人，有顺时针和逆时针 2 种坐法。事件 A 共有 2 个样本点。所以所求概率为

$$P(A)=\frac{2}{n-1}$$

方法四：随机试验，只考虑甲、乙之间间隔的人数（先考虑顺时针）。

甲、乙之间间隔的人数可以是 $0,1,2,\cdots,n-2$，共$(n-1)$种情况，故样本空间 Ω 含有$(n-1)$个样本点。二人之间间隔 r 个人仅是样本空间的一个样本点。

本题须考虑顺时针和逆时针两种情况，所以所求概率为

$$P(A)=\frac{1}{n-1}\cdot 2=\frac{2}{n-1}$$

5. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，求这 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率。

解：记 $\Omega=\{$从 5 双不同的鞋子中任取 4 只$\}$，事件 $A=\{$所取 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双$\}$，则$\overline{A}=\{$所取 4 只鞋子无配对$\}$。

方法一：随机试验，考虑 4 只鞋子是有次序地一只一只被取出的。

有次序地从 10 只鞋子中取 4 只，共有 $10\times9\times8\times7$ 种取法，故样本空间 Ω 含有样本点个数 $N(\Omega)=10\times9\times8\times7$。考虑事件$\overline{A}$，第一只可以任意取，共 10 种取法；第二只只能在剩下的 9 只且除去可与已取的第一只配对的鞋子中取，共 8 种取法；同理，第三、四只各有 6 种、

4 种取法，故事件$\overline{A}$含有样本点个数 $N(\overline{A})=10\times8\times6\times4$。所以所求概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{N(\overline{A})}{N(\Omega)}=1-\frac{10\times8\times6\times4}{10\times9\times8\times7}=\frac{13}{21}$$

方法二：随机试验，考虑 4 只鞋子是没有次序地被取出的。

无次序地从 10 只鞋子中取 4 只，共有 C_{10}^4种取法，故样本空间 Ω 含有样本点个数 $N(\Omega)=C_{10}^4$。考虑事件$\overline{A}$，先从 5 双鞋子中任取 4 双，共有 C_5^4种取法；再从取出的每双鞋子中各取 1 只（从一双鞋子中取 1 只有 2 种取法），共有 2^4 种取法。故事件$\overline{A}$含有样本点个数 $N(\overline{A})=C_5^4\times2^4$。所以所求概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{N(\overline{A})}{N(\Omega)}=1-\frac{C_5^4\times2^4}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

方法三：随机试验，考虑 4 只鞋子是没有次序地被取出的。

无次序地从 10 只鞋子中取 4 只，共有 C_{10}^4种取法，故样本空间 Ω 含有样本点个数 $N(\Omega)=C_{10}^4$。求 $N(\overline{A})$：先从 5 只左脚鞋子中任取 k 只$(k=0,1,2,3,4)$，有 C_5^k种取法；剩下的$(4-k)$只鞋子只能从不能与上述所取的鞋子配对的$(5-k)$只右脚鞋子中选取，即对于每个固定的 k，有 $C_5^kC_{5-k}^{4-k}$种取法。故事件$\overline{A}$含有样本点个数 $N(\overline{A})=\sum\limits_{k=0}^{4}C_5^k\,C_{5-k}^{4-k}=80$。所以有

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{N(\overline{A})}{N(\Omega)}=1-\frac{80}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

方法四：随机试验，考虑 4 只鞋子是没有次序地被取出的。

无次序地从 10 只鞋子中取 4 只，共有 C_{10}^4种取法，故样本空间 Ω 含有样本点个数 $N(\Omega)=C_{10}^4$。记事件$A_i=\{$所取 4 只鞋子恰能配成 i 双$\}$，则 $A=A_1\cup A_2$，$A_1\cap A_2=\varnothing$，$P(A)=P(A_1)+P(A_2)$。

求 $N(A_2)$：可看作从 5 只鞋子中成双地取 2 双，有 C_5^2种取法，即 $N(A_2)=C_5^2=10$。

求 $N(A_1)$：先从 5 只鞋子中成双地取 1 双，有 C_5^1种取法；另外 2 只从其他 8 只中取，有 C_8^2种取法，不过这种取法将成双的也算在内了，应去掉，故 $N(A_1)=C_5^1\times(C_8^2-C_4^1)=120$。所以有

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{N(A_1)+N(A_2)}{N(\Omega)}=\frac{120+10}{210}=\frac{13}{21}$$

6. 袋中有 a 个白球，b 个黑球，从中不放回地任意把球一个个摸出来，求第 $k(1\leqslant k\leqslant a+b)$次摸出白球的概率。

解：方法一：用排列方法求解，把 $a+b$ 个球都摸完。

将这些球看作是彼此不同的，记随机试验：把 $a+b$ 个球逐个摸出后依次排列在一条直线的 $a+b$ 个位置上，故样本空间 Ω 含有样本点个数 $N(\Omega)=(a+b)!$。记事件 $A=\{$第 k 次摸到白球$\}$，则第 k 次摸到白球有 a 种摸法，另外 $a+b-1$ 个球有$(a+b-1)!$ 种摸法，所以所求概率为

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

方法二：用组合方法求解，把 $a+b$ 个球都摸完。

将这些球看作是彼此不同的，记随机试验：把$(a+b)$个球逐个摸出后依次排列在一条直线的$(a+b)$个位置上，因为若把所有白球的位置固定下来，其余位置必放黑球，故样本空间Ω含有样本点个数$N(\Omega)=\mathrm{C}_{a+b}^{a}\mathrm{C}_{b}^{b}=\mathrm{C}_{a+b}^{a}$。记事件$A=\{$第$k$次摸到白球$\}$，则第$k$次摸到白球有1种摸法，另外$(a-1)$个白球可在其余$(a+b-1)$个球中任取，故$N(A)=\mathrm{C}_{a+b-1}^{a-1}$，所以所求概率为

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{\mathrm{C}_{a+b-1}^{a-1}}{\mathrm{C}_{a+b}^{a}}=\frac{a}{a+b}$$

方法三：用排列方法求解，只摸k个球。

将这些球看作是彼此不同的，记随机试验：把k个球逐个摸出后依次排列在一条直线的$(a+b)$个位置上，故样本空间Ω含有样本点个数$N(\Omega)=\mathrm{A}_{a+b}^{k}$。记事件$A=\{$第$k$次摸到白球$\}$，则第$k$次摸到白球有$a$种摸法，另外前$(k-1)$个球有$\mathrm{A}_{a+b-1}^{k-1}$种摸法，所以所求概率为

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{a\mathrm{A}_{a+b-1}^{k-1}}{\mathrm{A}_{a+b}^{k}}=\frac{a}{a+b}$$

方法四：用排列方法求解，只考虑第k次摸球。

将这些球看作是彼此不同的并标号，记随机试验：第k次被摸到的球的号数。显然，任何一个球都等可能地在第k次被摸到，故摸法总数即样本空间样本点个数$N(\Omega)=a+b$，而事件A所包含的摸法有a种，所以所求概率为

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{a}{a+b}$$

方法五：用数学归纳法求解。

记事件$A_i=\{$第i次摸到白球$(i=1,2,\cdots,k)\}$，则

$$P(A_1)=\frac{a}{a+b},\ P(\overline{A}_1)=\frac{b}{a+b}$$

假设$P(A_i)=\dfrac{a}{a+b}$，现证$P(A_{i+1})=\dfrac{a}{a+b}$。由全概率公式有

$$P(A_{i+1})=P(A_1)P(A_{i+1}\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_{i+1}\mid\overline{A}_1)$$

由于$P(A_{i+1}\mid A_1)$表示从有$(a+b-1)$个球的袋中［其中有$(a-1)$个白球］第i次摸到白球的概率，由归纳假设有$P(A_{i+1}\mid A_1)=\dfrac{a-1}{a+b-1}$，同理有$P(A_{i+1}\mid\overline{A}_1)=\dfrac{a}{a+b-1}$。

所以有$P(A_{i+1})=P(A_1)P(A_{i+1}\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_{i+1}\mid\overline{A}_1)=\dfrac{a}{a+b}$，这表示每次摸到白球的概率都是$\dfrac{a}{a+b}$。

7. 甲、乙、丙三人进行比赛，规定每局两个人比赛，双方获胜的概率都是0.5，胜者再与第三人进行比赛，依次循环，直到有一人连胜两局为止，此人即为优胜者。现假定甲、乙两人先比，求各人获得优胜者的概率。

解：方法一：设甲、乙、丙为整场比赛的优胜者分别为事件A，B，C，记甲、乙、丙第i局获胜为事件A_i，B_i，C_i，甲胜第一局为$A_1=D$，则有$A\subset(D\cup\overline{D})$，由全概率公式有

$$P(A)=P(D)P(A\mid D)+P(\overline{D})P(A\mid\overline{D})=\frac{1}{2}[P(A\mid D)+P(A\mid\overline{D})]$$

考虑 $P(A\mid D)$，甲已胜第一局，甲要最终获胜则必须甲胜第二局或者甲输了第二局后再获优胜，后一种情况与甲输了第一局后再获优胜完全一样。

$$P(A\mid D)=P(A_2\cup\overline{A}_2A)=P(A_2)+P(\overline{A}_2A)=P(A_2)+P(\overline{A}_2)P(A\mid\overline{A}_2)$$

$$=P(A_2)+P(\overline{A}_2)P(A\mid\overline{D})=\frac{1}{2}[1+P(A\mid\overline{D})]$$

考虑 $P(A\mid\overline{D})$，甲已输第一局，甲要最终获胜则必须丙胜第二局，甲胜第三局后再获优胜的概率也就是 $P(A\mid D)$，因此 $P(A\mid\overline{D})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot P(A\mid D)$。

解得 $P(A\mid D)=\frac{4}{7}$，$P(A\mid\overline{D})=\frac{1}{7}$，$P(A)=\frac{5}{14}=P(B)$。

丙要成为优胜者必须赢得第二局，然后再争最后优胜，而丙胜第二局后再争优胜的概率也是 $P(A\mid D)$，故 $P(C)=\frac{P(A\mid D)}{2}=\frac{2}{7}$。

方法二：

$$P(C)=P[(A_1C_2C_3\cup A_1C_2B_3A_4C_5C_6\cup\cdots)\cup(B_1C_2C_3\cup B_1C_2A_3B_4C_5C_6\cup\cdots)]$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^9}+\cdots\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-1/8}=\frac{2}{7}$$

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{7}\right)=\frac{5}{14}$$

方法三：

$$P(A)=[P(A_1A_2)+P(A_1C_2B_3A_4A_5)+\cdots]+[P(B_1C_2A_3A_4)+P(B_1C_2A_3B_4C_5A_6A_7)+\cdots]$$

$$=\frac{1}{4}\times\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots\right)+\frac{1}{16}\times\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots\right)=\frac{5}{16}\times\frac{1}{1-1/8}=\frac{5}{14}=P(B)$$

$$P(C)=1-P(A)-P(B)=\frac{2}{7}$$

方法四（类似方法二）：

$$P(C_i)=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{8}\right)^{i-1},\quad i=1,2,\cdots$$

$$P(C)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}C_i=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-1/8}=\frac{2}{7}$$

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{7}\right)=\frac{5}{14}$$

方法五：该比赛从第二局开始相当于以如下的比赛方式循环，直到优胜者产生。不妨定义在某一局比赛前：1 号位为上一场的胜者，2 号位为上一场轮空者，3 号位为上一场的负者。并设该局开始前三个位置上的选手成为比赛优胜者的概率分别为 p_1,p_2,p_3，在该局比赛中，若 1 号位选手获胜，则其赢得整场比赛；若 1 号位选手告负，则其将处于下局的 3 号位上；而本局的 3 号位选手将处于下局的 2 号位上，本局的 2 号位选手将处于下局的 1 号位上。综上所述，可得线性方程组

$$\begin{cases} p_1+p_2+p_3=1 \\ p_1=2p_2 \\ p_2=2p_3 \end{cases}$$

解得 $p_2=\dfrac{2}{7}$。无论第一局比赛结果如何，丙都将处于 2 号位上，故

$$P(C)=\frac{2}{7}$$

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{7}\right)=\frac{5}{14}$$

8. 某同学有 5 本课外书，每天随机取一本阅读，且不同天可能会选择同一本书继续看，求问第四天该同学取来看的书是新书的概率是多少？

解：方法一：排列组合思想。

每天可以选择 5 本书中的任意一本，四天全部的可能情况有 5^4 种。

若前三天只看了同一本书且第四天看的是新书，则可能的情况有 $C_5^1\times4$ 种；若前三天看了两本书且第四天看的是新书，则可能的情况有 $C_3^1A_5^2\times3$ 种；若前三天看了三本不同的书且第四天看的是新书，则可能的情况有 $A_5^3\times2$ 种。

由此，第四天看的是新书的概率为 $P=\dfrac{C_5^1\times4+C_3^1A_5^2\times3+A_5^3\times2}{5^4}=\dfrac{64}{125}$

方法二：用枚举法的思想，可列举出每天抽取新书和旧书的概率，得到以下表格。

第一天		第二天		第三天		第四天	
新	1	新	$\frac{4}{5}$	新	$\frac{3}{5}$	新	2/5
						旧	3/5
				旧	$\frac{2}{5}$	新	3/5
						旧	2/5
		旧	$\frac{1}{5}$	新	$\frac{4}{5}$	新	3/5
						旧	2/5
				旧	$\frac{1}{5}$	新	4/5
						旧	1/5

由此，第四天看的是新书的概率为

$$\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{64}{125}$$

9. 10 个人中有一对夫妇，他们随意围着一张圆桌坐下，求该对夫妇正好坐在一起的概率。

解：设事件 A 为“该对夫妇正好坐在一起”。

方法一：10 个人随机坐在一张圆桌周围，共有 9！种方法，先考虑该对夫妇以“男左女右”顺序坐在一起：把相邻的两个座位看成一个，考虑捆绑法的思路，9 个座位有 8！种排法，同理再考虑“男右女左”的坐法，所以所求概率为

$$P(A)=\frac{2\times 8!}{9!}=\frac{2}{9}$$

方法二：只考虑夫妇两人，夫妇两人随机坐有 A_{10}^2 种坐法，把座位按照 1~10 排号，夫妇相邻而坐且女坐于男右侧，则有 10 种坐法：男坐 1，2，3，…，9，10，女坐 2，3，…，10，1；同理考虑女坐于男左侧，则有 10 种坐法，共 20 种坐法，所以所求概率为

$$P(A)=\frac{20}{A_{10}^2}=\frac{2}{9}$$

方法三：假设夫妇中一人坐定，考虑另一个人（不妨设为女）。此人随机坐，有 9 种坐法。若要夫妇相邻，她只能坐在男方的左右两个位置，所以所求概率为

$$P(A)=\frac{2}{9}$$

10. 一个口袋中有 5 个大小完全相同的球，编号分别为 1，2，3，4，5。从中同时取出 3 个球，试求事件 $A=\{$取出 3 个球的最小号码为 1$\}$ 的概率 β。

解：方法一：随机变量法。

设第 i 次取出的球的编号为 $X_i(i=1,2,3)$，由于是无放回的，所以 X_1,X_2,X_3 不相互独立，但是同分布，且分布均为 $P\{X_i=j\}=0.2(j=1,2,3,4,5;i=1,2,3)$，故

$$\begin{aligned}\beta&=P(\min\{X_1,X_2,X_3\}=1)\\&=P(\{X_1=1\}\cup\{X_2=1\}\cup\{X_3=1\})\\&=P\{X_1=1\}+P\{X_2=1\}+P\{X_3=1\}\\&=0.2+0.2+0.2=0.6\end{aligned}$$

方法二：枚举法。

对于样本空间和事件 A 中的样本点，依题设可以数得 $N=10$，$N_A=6$，而且每个基本事件发生的可能性相同，故

$$\beta=P(A)=\frac{6}{10}=0.6$$

方法三：事件分解法。

令 $A_i=\{$第 i 次取出球的编号为 1$\}(i=1,2,3)$，则

$$\begin{aligned}\beta&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\\&=0.2+0.2+0.2=0.6\end{aligned}$$

方法四：排列组合法。

将取出的 3 个球的编号看成从 5 个元素中无放回地取出 3 个元素的组合，则

$$\beta=\frac{C_1^1C_4^2}{C_5^3}=\frac{1\times 6}{10}=0.6$$

11. 在长为 a 的线段的中点两边随机地选取两点，试求两点间距离小于 $a/3$ 的概率。

解：方法一：以 X_1 表示中点左边所取的随机点到端点 O 的距离，则 X_1 在区间 $\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$ 上服从均匀分布，其概率密度函数为

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{a}, & 0<x<\dfrac{a}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

以 X_2 表示中点右边所取的随机点到端点 O 的距离，则 X_2 在区间$\left(\dfrac{a}{2},a\right)$上服从均匀分布，其概率密度函数为

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{a}, & \dfrac{a}{2}<x<a\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

因为是在线段中点两边随机地选取两点，即 X_1 与 X_2 相互独立，故（X_1,X_2）的联合概率密度函数为

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}, & 0<x_1<\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}<x_2<a\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

事件“两点间距离小于 $a/3$”可表示为：（X_1,X_2）落在图 1-1 中区域 D 内的概率。

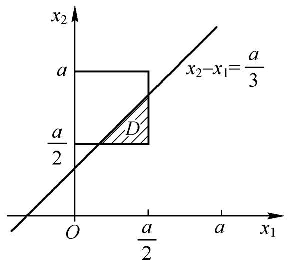

图 1-1

$$P\left(X_2-X_1<\frac{a}{3}\right)=\iint\limits_{x_2-x_1<\frac{a}{3}} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\iint\limits_{D}\frac{4}{a^2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$=\int_{\frac{a}{6}}^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}x_1\int_{\frac{a}{2}}^{x_1+\frac{a}{3}}\frac{4}{a^2}\mathrm{d}x_2=\int_{\frac{a}{6}}^{\frac{a}{2}}\frac{4}{a^2}\left(x_1-\frac{a}{6}\right)\mathrm{d}x_1=\frac{2}{9}$$

方法二：因为（X_1,X_2）在区域 $I=\left\{(x_1,x_2)\,\middle|\,0<x_1<\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}<x_2<a\right\}$上服从均匀分布，可利用几何概型求解。而事件$\{X_2-X_1<a/3\}$即为（$X_1,X_2$）$\in D$，从而所求概率为

$$P\left\{X_2-X_1<\frac{a}{3}\right\}=P\{(X_1,X_2)\in D\}=\frac{D\text{的面积}}{I\text{的面积}}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{a}{3}\times\frac{a}{3}}{\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}}=\frac{2}{9}$$

12. 有 3 个盒子，第一个盒子装有 1 个白球、4 个黑球；第二个盒子装有 2 个白球、3 个黑球；第三个盒子装有 3 个白球、2 个黑球。现在任取 1 个盒子，从中任取 3 个球。以 X 表示所取到的白球数，求取到白球数不少于 2 的概率。

解：方法一：分析题干和问题可知，只有第二个盒子或者第三个盒子才能满足题目要

求。分别计算抽中第二个盒子满足条件的概率及第三个盒子满足条件的概率，由概率加法公式得出答案。

抽第二个盒子：$P_2(X\geqslant 2)=\dfrac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\dfrac{3}{10}$

抽第三个盒子：$P_3(X\geqslant 2)=\dfrac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}+\dfrac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}=\dfrac{7}{10}$

所以 $P(X\geqslant 2)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{1}{3}$

方法二：由排列组合相关知识，可以求出取到白球数的分布律。经分析可知，白球数 X 的取值只能是 0，1，2，3。

$$P(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{C_1^0C_4^3}{C_5^3}+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^0C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{C_1^1C_4^2}{C_5^3}+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}=\frac{1}{30}$$

所以所求概率为

$$P(X\geqslant 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=\frac{1}{3}$$

$$\text{或 } P(X\geqslant 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

13. 假设一个屋子里面有 N 个人，每个人都有一顶帽子。假如所有人把帽子扔到屋子中央，然后每个人都随机选一顶帽子。求没有人捡到自己帽子的概率。

解：方法一：先计算至少有一个人捡到自己帽子的概率。设 $A_i(i=1,2,\cdots,N)$ 表示事件“第 i 个人捡到了他自己的帽子”。现在，根据容斥原理，至少有一个人捡到自己帽子的概率 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{N}A_i\right)$ 就等于：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N}A_i\right)=\sum_{i=1}^{N}P(A_i)-\sum_{i_1<i_2}P(A_{i_1}A_{i_2})+\cdots+$$
$$(-1)^{n+1}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n}P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_n})+\cdots+(-1)^{N+1}P(A_1A_2\cdots A_N)$$

如果将试验结果看作是一个 N 维数组，其中第 i 个元素表示被第 i 个人捡到的帽子的编号，那么有 $N!$ 种可能的结果。例如结果 $(1,2,3,\cdots,N)$ 表示所有人都拿到了自己的帽子。进一步地，$A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_n}$ 表示事件“$i_1,i_2,\cdots,i_n$ 这 n 个人拿到了自己的帽子”，这样的事件可能有 $(N-n)\times(N-n-1)\times\cdots\times 3\times 2\times 1=(N-n)!$ 种，因为剩下的 $N-n$ 个人均随便选帽子。总共的可能结果是 $N!$ 种，因此

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_n})=\frac{(N-n)!}{N!}$$

同时，对于 $\sum\limits_{i_1<i_2<\cdots<i_n} P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_n})$ 总共有 C_N^n 种选法，因此

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_n})=\frac{N!(N-n)!}{(N-n)!\ n!\ N!}=\frac{1}{n!}$$

因此，

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{N+1}\frac{1}{N!}$$

所以，没有人捡到自己帽子的概率为

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^N}{N!}$$

另外，当 N 非常大时，此概率为 $e^{-1}\approx 0.367\,88$。也就是说，当 N 很大时，没有人捡到自己帽子的概率大约是 0.37。

方法二： A 表示事件“没有匹配发生”，此事件显然与 N 有关，记为 $P_N=P(A)$。从第一个人是否选择到了自己的帽子开始，分别记为 M 和 $\overline{M}$。则

$$P_N=P(A)=P(A\mid M)P(M)+P(A\mid \overline{M})P(\overline{M})$$

显然，$P(A\mid M)=0$，因此

$$P_N=P(A\mid \overline{M})\frac{N-1}{N} \tag{1-1}$$

现在，$P(A\mid \overline{M})$ 表示剩下的 $N-1$ 个人都没有捡到自己帽子的概率（且其中一人的帽子不在这些帽子中，因为已经被第一个人捡走了）。此事发生可由两种独立事件组成，即那个人捡到了第一个人的帽子且其他人都没有捡到自己的帽子，以及那个人捡到了除第一个人和他自己的帽子以外的任一顶帽子，且其他人都没有捡到自己的帽子。前者的概率是 $[1/(N-1)]P_{N-2}$，由此可得

$$P(A\mid \overline{M})=P_{N-1}+\frac{1}{N-1}P_{N-2}$$

因此，由式（1-1）可以得到

$$P_N=\frac{N-1}{N}P_{N-1}+\frac{1}{N}P_{N-2}$$

或者，等价地

$$P_N-P_{N-1}=-\frac{1}{N}(P_{N-1}-P_{N-2}) \tag{1-2}$$

再由于 P_N 表示 N 个人中无匹配的概率，因此

$$P_1=0,\qquad P_2=\frac{1}{2}$$

由式（1-2）得

$$P_3-P_2=-\frac{P_2-P_1}{3}=-\frac{1}{3!}\Rightarrow P_3=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}$$

$$P_4-P_3=-\frac{P_3-P_2}{4}=\frac{1}{4!}\Rightarrow P_4=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$$

由此

$$P_N=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^N}{N!}$$

14. 某赌徒有赌资 100 万元，赌庄有 1 个亿。现在赌徒和赌庄每局赌 1 000 元，如果赌徒每局获胜的概率是 0.5，求赌徒破产的概率。

解：方法一：由题目易知，这个赌局会在赌徒和赌庄其中一方破产的情况下结束。既然题目要求赌徒破产的概率，那么可以将该问题等价为求赌庄赢走财产总和即 101 000(1 000+100 000) 个单位的财产的概率（设 1 000 元为一个单位以方便计算，从而输赢为一个单位）。

列出以下递推式（利用全概率公式）

$$P_i=0.5\times P_{i+1}+0.5\times P_{i-1} \tag{1-3}$$

其中 P_i 为赌庄在有 i 个单位财产时赢走所有钱的概率，则式（1-3）右侧的解释方法就是

P(赌庄赢了下一局)×P(赌庄赢了所有的钱｜赌庄赢了下一局)+P(赌庄输了上一局)×P(赌庄赢了所有的钱｜赌庄输了上一局)

$$P_{i+1}=2P_i-P_{i-1}$$

初始条件为 $P_0=0$，$P_N=1$

设 $P_1=a$，则 $P_2=2a$，$P_3=3a$，$P_4=4a$，……

$P_N=Na=1$，$a=\frac{1}{N}$

$$P_i=ia=\frac{i}{N}$$

将 $i=100\,000$，$N=101\,000$ 代入，有结果 P(赌徒破产)$=0.990\,099\,01\approx 0.990\,1$。

方法二：若以 X_n 表示赌庄在时刻 n 的财产，则过程 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个 Markov 链，具有转移概率

$$P_{00}=P_{NN}=1$$
$$P_{i,i+1}=p=1-P_{i,i-1}$$

此 Markov 链有三个类，即 $\{0\}$，$\{1,2,\cdots,N-1\}$，$\{N\}$，第一类和第三类是常返类，第二类为暂态类。由于每个暂态只被访问有限多次，由此推出在某个有限的事件之后，该赌庄达到目标 N 或破产。以 $f_i\equiv f_{iN}$ 表示从 i（$0\leqslant i\leqslant N$）开始，赌庄财富迟早到达 N 的概率，用 p，q 表示输赢概率，可以得到

$$(p+q)f_i=pf_{i+1}+qf_{i-1}$$

由于 $f_0=0$，可以得出

$$f_2-f_1=\frac{q}{p}(f_1-f_0)=\frac{q}{p}f_1$$

$$f_3-f_2=\frac{q}{p}(f_2-f_1)=\left(\frac{q}{p}\right)^2f_1$$

$$\vdots$$

$$f_i - f_{i-1} = \frac{q}{p}(f_{i-1} - f_{i-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} f_1$$

将这 $i-1$ 个方程相加有

$$f_i - f_1 = f_1\left[\left(\frac{q}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right]$$

或

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^i}{1-\dfrac{q}{p}} f_1, & \dfrac{q}{p} \neq 1 \\ i f_1, & \dfrac{q}{p} = 1 \end{cases}$$

取 $f_N = 1$，有

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^N}, & \dfrac{q}{p} \neq 1 \\ \dfrac{i}{N}, & \dfrac{q}{p} = 1 \end{cases}$$

代入 $i = 100\ 000$，$N = 101\ 000$，可得结果为 0.990 1。

15.（Monty Hall 难题）Monty Hall 的问题陈述十分简单，但是它的答案看上去却是有悖常理。Monty Hall 的游戏规则是这样的，如果你来参加这个节目，那么：

（1）Monty Hall 向你示意三个关闭的大门，然后告诉你每个门后面都有一个奖品，其中有一个门后面的奖品是一辆汽车，另外两个门后面则是不值钱的奖品，奖品是随机放在三个门后面的；

（2）该游戏的目的是猜中哪个门后面有汽车，一旦猜中，你就可以拿走汽车；

（3）你先挑选一个门，不妨假设为 A 门，其他两个门分别称为 B 门和 C 门；

（4）在打开你选中的门之前，Monty Hall 会先打开 B 门 或者 C 门中一个没有汽车的门来增加悬念（如果汽车在 A 门后面，那么 Monty Hall 打开 B 门或者 C 门都是安全的，所以他可以随意选择一个；如果汽车在 B 门后面，那么 Monty Hall 只能够选择 C 门）；

（5）然后 Monty Hall 给你一个选择：坚持最初的选择还是换到另外一个没有打开的门？

解：方法一： 运用全概率公式求解。

首先设 A 表示“最初选择的门后面是汽车”，B 表示“最终赢得汽车”，则由已知条件知，实际情况中汽车在 A 门后的概率是 $\frac{1}{3}$，不在 A 门后的概率是 $\frac{2}{3}$，即 $P(A) = \frac{1}{3}$，$P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$。

策略一：若不换选择，即仍然选择 A 门，则能最终赢得汽车的概率为

$$P(B) = P(A)P(B \mid A) + P(\bar{A})P(B \mid \bar{A}) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{1}{3}$$

策略二：若换选择，即换至未开启的 B 门，则能最终赢得汽车的概率为

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})=\frac{1}{3}\times 0+\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$$

显然，采用策略二，即换成未打开的 B 门，能赢得汽车的概率将比不换增加 1 倍。

方法二：运用贝叶斯定理求解。

贝叶斯定理的表达式可以写成 $P(H\mid D)=\dfrac{P(H)P(D\mid H)}{P(D)}$，其中 $P(H)$ 称为先验概率，$P(H\mid D)$ 称为后验概率，$P(D\mid H)$ 称为似然度，$P(D)$ 称为标准化常量。

首先分别用 A，B，C 表示假设汽车在 A 门、B 门或 C 门后面，同时不妨假设 Monty Hall 打开了 B 门，而且没有汽车在后面。在本例中 D 包括两个部分，Monty Hall 打开了 B 门，而且没有汽车在后面。这样，我们采用表格法可以相对清晰地看出每一个假设的后验概率。

	先验概率 $P(H)$	似然度 $P(D\mid H)$	$P(H)P(D\mid H)$	后验概率 $P(H\mid D)$
假设 A	1/3	1/2	1/6	1/3
假设 B	1/3	0	0	0
假设 C	1/3	1	1/3	2/3

所以运用贝叶斯定理，可以得到相同的结论：换门得到汽车的概率是不换门的概率的 2 倍。

16. 甲乙两人约定 14:00 到 15:00 之间在车站见面，并事先约定先到者在那里等待 10 min，若另一个人 10 min 内没有到达，则先到的人自行离去。试求先到者等待时间小于 10 min 的概率。

解：方法一：利用均匀分布的概率密度函数求解。

设甲于下午两点 X 分到达，乙于下午两点 Y 分到达，可知随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从区间 $[0,60]$ 上的均匀分布，X 和 Y 的概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0\leqslant x\leqslant 60\\ 0, & \text{其他}\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0\leqslant y\leqslant 60\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由于 X 和 Y 相互独立，所以 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\,600}, & 0\leqslant x\leqslant 60,0\leqslant y\leqslant 60\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

先到的人等待时间为 10 min 以内，即 $|X-Y|\leqslant 10$，则概率为

$$\begin{aligned}P(|X-Y|\leqslant 10)&=\iint\limits_{|X-Y|\leqslant 10}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{G}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{3\,600}\iint\limits_{G}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{S_G}{3\,600}=\frac{11}{36}\end{aligned}$$

方法二：利用面积法求解。

变量 x 与 y 的取值范围均为 0 到 60，甲先到和乙先到的曲线分别为 $x-y=-10$ 和 $x-y=10$，由此得出相应的图形如图 1-2 所示。

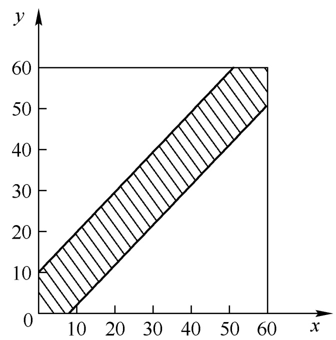

图 1-2

则 $P(\text{等待时间小于 }10\,\text{min})=\dfrac{60\times60-2\times0.5\times50\times50}{60\times60}=\dfrac{3\,600-2\,500}{3\,600}=\dfrac{11}{36}$

17. 甲口袋有 1 个黑球、2 个白球，乙口袋有 3 个白球。每次从两个口袋中各任取一球，交换后放入另一口袋，求交换 n 次后，黑球仍在甲口袋的概率。

解：方法一： 设事件 A_i 为“第 i 次交换后黑球仍在甲口袋中”，记 $p_i=P(A_i),i=0,1,2,\cdots$。则有 $p_0=1$，且

$$P(A_{i+1}\mid A_i)=\frac{2}{3},P(A_{i+1}\mid \overline{A}_i)=\frac{1}{3}$$

所以由全概率公式得

$$p_n=\frac{2}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}(1-p_{n-1})=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3},\quad n\geqslant1$$

故可得递推公式

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(p_{n-1}-\frac{1}{2}\right),\quad n\geqslant1$$

将 $p_0=1$ 代入上式可得

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n,\quad n\geqslant1$$

由此得

$$p_n=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right],\quad n\geqslant1$$

方法二： 设交换 n 次后黑球仍在甲口袋中的概率是 A_n，在乙口袋中的概率是 B_n。因为一开始黑球在甲口袋中，所以 $A_0=1,B_0=0$，并且黑球肯定不在甲口袋中就在乙口袋中，所以有

$$A_n+B_n=1$$

这样，交换 0 到 n 次，黑球在甲、乙口袋的概率分别是

$$A_0,A_1,A_2,\cdots,A_{n-1},A_n;B_0,B_1,B_2,\cdots,B_{n-1},B_n$$

另外，因为甲、乙口袋中各有 3 个球，且黑球只有 1 个，所以每次在甲口袋中摸走黑球的概率是1/3，留下的概率是 2/3，同样对于乙口袋也是这样的，这样就有

$$A_n = \frac{2}{3}A_{n-1} + \frac{1}{3}B_{n-1}$$

$$B_n = \frac{1}{3}A_{n-1} + \frac{2}{3}B_{n-1}$$

上两式相减有

$$A_n - B_n = \frac{1}{3}(A_{n-1} - B_{n-1})$$

这样就有

$$A_n - B_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (A_0 - B_0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

并且通过上面的分析有

$$A_n + B_n = 1$$

所以

$$A_n = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right],\quad n \geqslant 1$$

这就是交换 n 次后，黑球仍在甲口袋中的概率。