

第3章

常用数学函数运算



常用的数学函数包括三角函数、反三角函数、双曲函数、反双曲函数、指数函数、对数函数、复数函数、截断函数和求余函数等。

3.1 正弦和反正弦函数

求正弦和反正弦函数值。命令格式为：

$Y = \sin(X)$ ——计算 X 中各元素的正弦函数值。正弦函数定义为 $\sin(z) = (e^{iz} - e^{-iz}) / 2i$ 。对于复数 $z = a + bi$, $\sin(a + bi) = \sin(a)\cosh(b) + i\cos(a)\sinh(b)$ 。 X 可以是单个数、数组或矩阵。

$Y = \text{asin}(X)$ ：计算 X 中各元素的反正弦函数值。当 X 中元素为区间 $[-1, 1]$ 内的实元素时， Y 中元素的范围为 $[-\pi/2, \pi/2]$ 。当 X 中元素不为区间 $[-1, 1]$ 内的实元素时， Y 中元素为复数。反正弦函数定义为 $\text{asin}(z) = i\log[iz + (1 - z^2)^{1/2}]$ 。

【例 3.1】 求 60° 角的正弦值，再由正弦值求其反正弦值。

解： 60° 相当于 $\pi/3$ 。

```
X = pi/3
```

```
Z = sin(X)
```

```
X =
```

```
1.0472
```

```
Z =
```

```
0.8660
```

可见， 60° 角的正弦值为 0.8660。

```
X = 0.866
```

```
Z = asin(X)
```

```

X =

    0.8660
Z =

    1.0471

```

可见, 0.8660 的反正弦值为 $1.0471(\pi/3)$ 。

【例 3.2】 求 30° 和 45° 角的正弦值, 再由正弦值求其反正弦值。

解: 30° 相当于 $\pi/6$, 45° 相当于 $\pi/4$ 。

```

X = [pi/6 pi/4]

Z = sin(X)

X =

    0.5236    0.7854

Z =

    0.5000    0.7071

```

可见, 30° 和 45° 角的正弦值分别为 0.5 和 0.7071。

```

X = [0.5 0.7071]

Z = asin(X)

X =

    0.5000    0.7071

Z =

    0.5236    0.7854

```

可见, 0.5 和 0.7071 的反正弦值分别为 $0.5236(\pi/6)$ 和 $0.7854(\pi/4)$ 。

【例 3.3】 求以下二阶方阵 $\mathbf{A}$ 中各元素的正弦值, 再由正弦值求其反正弦值。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \pi/6 & \pi/4 \\ \pi/2 & \pi \end{pmatrix}$$

解:

```

X = [pi/6 pi/4; pi/2 pi]

Z = sin(X)

X =

    0.5236    0.7854
    1.5708    3.1416

Z =

```

```
0.5000    0.7071
1.0000    0.0000
```

可见, **A** 中各元素的正弦值分别为 0.5、0.7071、1.0 和 0。

```
X = [0.5 0.7071; 1.0 0]
Z = asin(X)
X =
```

```
0.5000    0.7071
1.0000    0
Z =
```

```
0.5236    0.7854
1.5708    0
```

可见, 0.5、0.7071、1.0 和 0 的反正弦值分别为 $0.5236(\pi/6)$ 、 $0.7854(\pi/4)$ 、 $1.5708(\pi/2)$ 和 $0(\pi)$ 。

【例 3.4】 求复数 $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}i$ 的正弦值, 再由正弦值求其反正弦值。

解:

```
Z = sin(pi/6 + (pi/4) * i)
```

```
Z =
0.6623 + 0.7523i
```

可见, 求复数的正弦值, 就是分别求复数的实部和虚部正弦值。

```
X = Z
X =
0.6623 + 0.7523i
Z = asin(X)
Z =
```

```
0.5236 + 0.7854i
```

可见, 求复数的反正弦值, 就是复数的实部和虚部分别求反正弦值。

3.2 余弦和反余弦函数

求余弦和反余弦函数值。命令格式为:

$Y = \cos(X)$ ——计算 **X** 中各元素的余弦函数值。余弦函数定义为 $\cos(z) = (e^{iz} + e^{-iz}) / 2i$ 。对于复数 $z = a + bi$, $\cos(a + bi) = \cos(a) \cosh(b) + i \sin(a) \sinh(b)$ 。**X** 可以是单个数、数组或矩阵。

$Y = \text{acos}(X)$: 计算 X 中各元素的反余弦函数值。当 X 中元素为区间 $[-1, 1]$ 内的实元素时, Y 中元素的范围为 $[0, \pi]$ 。当 X 中元素不为区间 $[-1, 1]$ 内的实元素时, Y 中元素为复数。

【例 3.5】 求 60° 角的余弦值, 再由余弦值求其反余弦值。

解:

```
X = pi/3

Z = cos(X)
X =

    1.0472
Z =
    0.5000
```

可见, 60° 角的余弦值为 0.500。

```
X = 0.5000

Z = acos(X)
X =

    0.5000
Z =
    1.0471
```

可见, 0.5000 的反余弦值为 $1.0471(\pi/3)$ 。

【例 3.6】 求 30° 和 45° 角的余弦值, 再由余弦值求其反余弦值。

解:

```
X = [pi/6 pi/4]
Z = cos(X)
X =

    0.5236    0.7854
Z =

    0.8660    0.7071
```

可见, 30° 和 45° 角的余弦值分别为 0.866 和 0.7071。

```
X = [0.866 0.7071]

Z = acos(X)
X =

    0.8660    0.7071
Z =

    0.5236    0.7854
```

可见, 0.866 和 0.7071 的反余弦值分别为 $0.5236(\pi/6)$ 和 $0.7854(\pi/4)$ 。

【例 3.7】 求以下二阶方阵 A 中各元素的余弦值,再由余弦值求其反余弦值。

$$A = \begin{pmatrix} \pi/6 & \pi/4 \\ \pi/2 & \pi \end{pmatrix}$$

解:

```
X = [pi/6 pi/4;pi/2 pi]
```

```
Z = cos(X)
```

```
X =
```

```
0.5236    0.7854
```

```
1.5708    3.1416
```

```
Z =
```

```
0.8660    0.7071
```

```
0.0000   -1.0000
```

可见, A 中各元素的余弦值分别为 0.866、0.7071、0.0 和 -1.0。

```
X = [0.866 0.7071;0.0 -1.0]
```

```
Z = acos(X)
```

```
X =
```

```
0.8660    0.7071
```

```
0         -1.0000
```

```
Z =
```

```
0.5236    0.7854
```

```
1.5708    3.1416
```

可见, 0.866、0.7071、0.0 和 -1.0 的反余弦值分别为 $0.5236(\pi/6)$ 、 $0.7854(\pi/4)$ 、 $1.5708(\pi/2)$ 和 $3.1416(\pi)$ 。

3.3 正切和反正切函数

求正切函数和反正切函数值。命令格式为:

$Y = \tan(X)$ ——计算 X 中各元素的正切函数值。正切函数定义为 $\tan(z) = \sin(z)/\cos(z)$ 。

$Y = \operatorname{atan}(X)$ ——计算 X 中各元素的反正切函数值。当 X 中元素为实元素时, Y 中元素的范围为 $[-\pi/2, \pi/2]$ 。反正切弦函数定义为 $\operatorname{atan}(z) = i/2 * \log[(i+z)/(i-z)]$ 。

【例 3.8】 求 60° 角的正切值,再由正切值求其反正切值。

解:

```
X = pi/3
```

```
Z = tan(X)
```

```
X =
```

```

1.0472
Z =
1.7320

```

可见, 60° 角的正切值为 1.7320。

```

X = 1.7320
Z = atan(X)
X =
1.7320
Z =
1.0471

```

可见, 1.7320 的反正切值为 $1.0471(\pi/3)$ 。

【例 3.9】 求 30° 和 45° 角的正切值, 再由正切值求其反正切值。

解:

```

X = [pi/4 pi/6]

Z = tan(X)
X =

0.7854    0.5236
Z =

1.0000    0.5774

```

可见, 45° 和 30° 角的正切值分别为 1.0 和 0.5774。

```

X = [1 0.5774]

Z = atan(X)
X =

1.0000    0.5774
Z =

0.7854    0.5236

```

可见, 1.0 和 0.5774 的反正切值分别为 $0.7854(\pi/4)$ 和 $0.5236(\pi/6)$ 。

【例 3.10】 求以下二阶方阵 A 中各元素的正切值, 再由正切值求其反正切值。

$$A = \begin{pmatrix} \pi/6 & \pi/4 \\ \pi/3 & \pi \end{pmatrix}$$

解:

```

X = [pi/6 pi/4; pi/3 pi]

Z = tan(X)

```

```

X =
    0.5236    0.7854
    1.0472    3.1416
Z =
    0.5774    1.0000
    1.7321   -0.0000

```

可见, A 中各元素的正切值分别为 0.5774、1.0、1.7321 和 0.0。

```

Z = atan(Z)
Z =
    0.5236    0.7854
    1.0472   -0.0000

```

可见, 0.5774、1.0、1.7321 和 0.0 的反正切值分别为 $0.5236(\pi/6)$ 、 $0.7854(\pi/4)$ 、 $1.0472(\pi/3)$ 和 $0(\pi)$ 。

3.4 四象限的反正切函数

求四象限的反正切函数值。命令格式为:

$Z = \text{atan2}(Y, X)$ ——计算 X 和 Y 中元素的四象限反正切函数值 Z。其中, Z 中元素值的范围为 $[-\pi, \pi]$ 。所有 X 和 Y 中元素的虚部在计算时均被忽略。

请注意: 反正切函数 atan 值的输出范围 $[-\pi/2 \sim \pi/2]$, 四象限反正切函数 atan2 值的输出范围为 $[-\pi \sim \pi]$ 。

【例 3.11】 求已知 X、Y 的四象限反正切函数值。

```

X = [1.2 - 4.9i 2.4 + 5.3i 3.9 - 6.2i]
Y = [3 5 7 + 2.1i]
Z = atan2(Y, X)

X =

    1.2000 - 4.9000i    2.4000 + 5.3000i    3.9000 - 6.2000i
Y =

    3.0000    5.0000    7.0000 + 2.1000i

```

```

Warning: Imaginary part is currently ignored.
Future behavior of ATAN2 with complex inputs may change.
Z =

```

```

    1.1903    1.1233    1.0625

```

【例 3.12】 求已知 X、Y 的四象限反正切函数值。

```

X = [1 2 3]
Y = [4 5 6]

```

```

Z = atan2(Y,X)

X =

     1     2     3

Y =

     4     5     6

Z =

1.3258    1.1903    1.1071

```

【例 3.13】 求已知 X、Y 的四象限反正切函数值。

```

X = [1 2]
Y = [4 5]
Z = atan2(Y,X)

X =

     1     2

Y =

     4     5

Z =

1.3258    1.1903

```

【例 3.14】 求已知 X、Y 的四象限反正切函数值。

```

X = [i 2i]
Y = [4i 5i]
Z = atan2(Y,X)

X =

     0 + 1.0000i     0 + 2.0000i

Y =

     0 + 4.0000i     0 + 5.0000i

Error using atan2
Inputs must be real.

```

可见, X 和 Y 中元素若为虚数, 则给出警告信号, 停止计算。

3.5 余切和反余切函数

求余切函数和反余切函数值。命令格式为:

$Y = \cot(X)$ ——计算 X 中各元素的余切函数值。余切函数定义为 $\cot(z) = 1/\tan(z) = \cos(z)/\sin(z)$ 。

$Y = \text{acot}(X)$ ——计算 X 中各元素的反余切函数值。反余切函数定义为 $\text{acot}(z) = \text{atan}(1/z)$ 。

【例 3.15】 求 30° 和 45° 角的余切值,再由余切值求其反余切值。

解: 30° 相当于 $\pi/6$, 45° 相当于 $\pi/4$ 。

```
X = [pi/6 pi/4]
```

```
Z = cot(X)
```

```
X =
    0.5236    0.7854
```

```
Z =
    1.7321    1.0000
```

可见, 30° 和 45° 角的余切值分别为 1.7321 和 1.0。

```
X = [1.7321 1.0]
```

```
Z = acot(X)
```

```
X =
    1.7321    1.0000
```

```
Z =
    0.5236    0.7854
```

可见, 1.7321 和 1.0 的反余切值分别为 $0.5236(\pi/6)$ 和 $0.7854(\pi/4)$ 。

3.6 正割和反正割函数

求正割函数和反正割函数值。命令格式为:

$Y = \sec(X)$ ——计算 X 中各元素的正割函数值。正割函数定义为 $\sec(z) = 1/\cos(z)$ 。

$Y = \text{asec}(X)$ ——计算 X 中各元素的反正割函数值。反正割函数定义为 $\text{asec}(z) = \text{acos}(1/z)$ 。

【例 3.16】 求 30° 和 45° 角的正割值,再由正割值求其反正割值。

解:

```
X = [pi/6 pi/4]
```

```
Z = sec(X)
```

```
X =
    0.5236    0.7854
```

```
Z =
    1.1547    1.4142
```

可见, 30° 和 45° 角的正割值分别为 1.1547 和 1.4142。

```
X = [1.1547 1.4142]
```

```
Z = asec (X)
```

```
X =
    1.1547    1.4142
```

```

Z =
    0.5236    0.7854

```

可见, 1.1547 和 1.4142 的反正割值分别为 $0.5236(\pi/6)$ 和 $0.7854(\pi/4)$ 。

3.7 余割和反余割函数

求余割函数和反余割函数值。命令格式为:

$Y = \csc(X)$ ——计算 X 中各元素的余割函数值。余割函数定义为 $\csc(z) = 1/\sin(z)$ 。

$Y = \operatorname{acsc}(X)$ ——计算 X 中各元素的反余割函数值。反余割函数定义为 $\operatorname{acsc}(z) = \operatorname{asin}(1/z)$ 。

【例 3.17】 求 30° 和 45° 角的余割值, 再由余割值求其反余割值。

解:

```

X = [pi/6 pi/4]
Z = csc(X)
X =
    0.5236    0.7854
Z =
    2.0000    1.4142

```

可见, 30° 和 45° 角的余割值分别为 2.0 和 1.4142。

```

X = [2.0 1.4142]
Z = acsc(X)
X =
    2.0000    1.4142
Z =
    0.5236    0.7854

```

可见, 2.0 和 1.4142 的反余割值分别为 $0.5236(\pi/6)$ 和 $0.7854(\pi/4)$ 。

3.8 双曲正弦和反双曲正弦函数

求双曲正弦和反双曲正弦函数值。命令格式为:

$Y = \sinh(X)$ ——计算 X 中各元素的双曲正弦函数值。双曲正弦函数定义为 $\sinh(z) = (e^z - e^{-z})/2$ 。

$Y = \operatorname{asinh}(X)$ ——计算 X 中各元素的反双曲正弦函数值。反双曲正弦函数定义为 $\operatorname{asinh}(z) = \log[z + (1 + z^2)^{1/2}]$ 。

【例 3.18】 求 2 和 5 的双曲正弦值, 再由双曲正弦值求其反双曲正弦值。

解:

```

X = [2 5]
Z = sinh(X)

```

```

X =
    2     5
Z =
    3.6269    74.2032

Z = asinh(Z)
Z =
    2     5

```

可见,2和5的双曲正弦值分别为3.6269和74.2032,3.6269和74.2032的反双曲正弦值分别为2和5。

3.9 双曲余弦和反双曲余弦函数

求双曲余弦和反双曲余弦函数值。命令格式为:

$Y = \cosh(X)$ ——计算X中各元素的双曲余弦函数值。双曲余弦函数定义为 $\cosh(z) = (e^z + e^{-z})/2$ 。

$Y = \operatorname{acosh}(X)$ ——计算X中各元素的反双曲余弦函数值。反双曲余弦函数定义为 $\operatorname{acosh}(z) = \log[z + (z^2 - 1)^{1/2}]$ 。

【例 3.19】 求2和5的双曲余弦值,再由双曲余弦值求其反双曲余弦值。

解:

```

X = [2 5]
Z = cosh(X)

X =
    2     5
Z =
    3.7622    74.2099
Z = asinh(Z)

Z =
    2.0354    5.0001

```

可见,2和5的双曲余弦值分别为3.7622和74.2099,3.7622和74.2099的反双曲余弦值分别为2.0354和5.0001。它们与2和5还有点出入。

3.10 双曲正切和反双曲正切函数

求双曲正切和反双曲正切函数值。命令格式为:

$Y = \tanh(X)$ ——计算X中各元素的双曲正切函数值。双曲正切函数定义为 $\tanh(z) = \sinh(z)/\cosh(z)$ 。

$Y = \operatorname{atanh}(X)$ ——计算X中各元素的反双曲正切函数值。反双曲正切函数定义为 $\operatorname{atanh}(z) = 1/2 * \log[(1+z)/(1-z)]$ 。

【例 3.20】 求 2 和 5 的双曲正切值,再由双曲正切值求其反双曲正切值。

解:

```
X = [ 2 5]
Z = tanh(X)
X =

    2    5

Z =

    0.9640    0.9999

Z = atanh(Z)
Z =

    2.0000    5.0000
```

可见,2 和 5 的双曲正切值分别为 0.9640 和 0.9999,0.9640 和 0.9999 的反双曲正切值分别为 2.0 和 5.0。

3.11 双曲余切和反双曲余切函数

求双曲余切和反双曲余切函数值。命令格式为:

$Y = \coth(X)$ ——计算 X 中各元素的双曲余切函数值。双曲余切函数定义为 $\coth(z) = 1/\tanh(z) = \cosh(z)/\sinh(z)$ 。

$Y = \operatorname{acoth}(X)$ ——计算 X 中各元素的反双曲余切函数值。反双曲余切函数定义为 $\operatorname{acoth}(z) = \operatorname{atanh}(1/z)$ 。

【例 3.21】 求 2 和 5 的双曲余切值,再由双曲余切值求其反双曲余切值。

解:

```
X = [ 2 5]
Z = coth(X)
X =

    2    5

Z =

    1.0373    1.0001

Z = acoth(Z)
Z =

    2.0000    5.0000
```

可见,2 和 5 的双曲余切值分别为 1.0373 和 1.0001,1.0373 和 1.0001 的反双曲余切值分

别为 2.0 和 5.0。

3.12 双曲正割和反双曲正割函数

求双曲正割和反双曲正割函数值。命令格式为：

$Y = \operatorname{sech}(X)$ ——计算 X 中各元素的双曲正割函数值。双曲正割函数定义为 $\operatorname{sech}(z) = 1/\cosh(z)$ 。

$Y = \operatorname{asech}(X)$ ——计算 X 中各元素的反双曲正割函数值。反双曲正割函数定义为 $\operatorname{asech}(z) = \operatorname{acosh}(1/z)$ 。

【例 3.22】 求 2 和 5 的双曲正割值,再由双曲正割值求其反双曲正割值。

解：

```
X = [2 5]
Z = sech(X)
X =

    2    5

Z =

    0.2658    0.0135
Z = asech(Z)
Z =

    2    5
```

可见,2 和 5 的双曲正割值分别为 0.2658 和 0.0135,0.2658 和 0.0135 的反双曲正割值分别为 2 和 5。

3.13 双曲余割和反双曲余割函数

求双曲余割和反双曲余割函数值。命令格式为：

$Y = \operatorname{csch}(X)$ ——计算 X 中各元素的双曲余割函数值。双曲余割函数定义为 $\operatorname{csch}(z) = 1/\sinh(z)$ 。

$Y = \operatorname{acsch}(X)$ ——计算 X 中各元素的反双曲余割函数值。反双曲余割函数定义为 $\operatorname{acsch}(z) = \operatorname{asinh}(1/z)$ 。

【例 3.23】 求 2 和 5 的双曲余割值,再由双曲余割值求其反双曲余割值。

解：

```
X = [2 5]
Z = csch(X)
X =
```

```

      2      5
Z =
    0.2757    0.0135
Z = acsch(Z)
Z =
      2      5

```

可见, 2 和 5 的双曲余割值分别为 0.2757 和 0.0135, 0.2757 和 0.0135 的反双曲余割值分别为 2 和 5。

3.14 数值的绝对值和复数的幅值

求数值的绝对值与复数的幅值。命令格式为:

$Y = \text{abs}(X)$ ——计算数组 X 中元素的绝对值或复数的幅值。 X 中的元素可以是复数。

对于复数 $Z = a + b * i$, 有 $\text{abs}(Z) = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。

【例 3.24】 求一组复数的幅值。

解:

```

X = [1 + 2i 3 + 4i 5 + 12i];
Y = abs(X)

Y =
    2.2361    5.0000   13.0000

```

以上 3 个数就是所求 3 个复数的幅值。

【例 3.25】 求一组复数的幅值。

```

X = [-4.9 2.4 -6.2];
Y = abs(X)
Y =
    4.9000    2.4000    6.2000

```

可见, 对于实数, 求得结果是原数的绝对值。

3.15 求复数的相位角

求复数的相位角。命令格式为:

$P = \text{angle}(Z)$ ——计算数组 X 中每个元素的相位角 P , 返回与 Z 同维的实数数组 P 。 P 中每个元素的单位为弧度, 其值均在 $[-\pi, +\pi]$ 之间。

【例 3.26】 计算一组复数的相角。

```

X = [1.2 - 4.9i 2.4 + 5.3i 3.9 - 6.2i];

```

```
Y = angle(X)
```

```
Y =
```

```
- 1.3306    1.1456    - 1.0093
```

【例 3.27】 计算一组复数的相角。

```
X = [1 + 2i 3 + 4i 5 + 12i];
```

```
Y = angle(X)
```

```
Y =
```

```
1.1071    0.9273    1.1760
```

3.16 求复数的共轭值

求复数的共轭值。命令格式为：

$Z = \text{conj}(X)$ ——计算数组 X 中每个元素的共轭值,返回与 X 同维的数组 Z 。

【例 3.28】 计算一组复数的共轭值。

```
X = [1.2 - 4.9i 2.4 + 5.3i 3.9 - 6.2i];
```

```
Y = conj(X)
```

```
Y =
```

```
1.2000 + 4.9000i    2.4000 - 5.3000i    3.9000 + 6.2000i
```

【例 3.29】 计算一组复数的共轭值。

```
X = [1 + 2i 3 + 4i 5 + 12i];
```

```
Y = conj(X)
```

```
Y =
```

```
1.0000 - 2.0000i    3.0000 - 4.0000i    5.0000 - 12.0000i
```

3.17 创建复数

创建复数。命令格式为：

$c = \text{complex}(a, b)$ ——创建复数 c 。其中 a, b, c 为同维向量、矩阵或数组。 $c = a + bi$ 。

$c = \text{complex}(a)$ ——返回实部 a 。

【例 3.30】 分别生成 3 组复数。

```
c = complex(1:3, 4:6)
```

```
c =
```

```

1.0000 + 4.0000i    2.0000 + 5.0000i    3.0000 + 6.0000i
c = complex(1:3)
c =
1.0000 + 0.0000i    2.0000 + 0.0000i    3.0000 + 0.0000i

```

【例 3.31】 分别生成 4 组复数。

```

a = [ 2 3 5 7]
b = [ 1 2 4 6]
c = complex(a,b)
a =
2    3    5    7
b =
1    2    4    6
c =

2.0000 + 1.0000i    3.0000 + 2.0000i    5.0000 + 4.0000i    7.0000 + 6.0000i

```

3.18 求复数的实数部分

求复数的实数部分。命令格式为：

$P = \text{real}(Z)$ ——计算数组 Z 中每个元素的实数部分,返回与 Z 同维的实数数组 P 。

【例 3.32】 计算一组复数的实部。

```

X = [1 + 4i 2 + 5i 3 + 6i]
Z = real(X)
X =
1.0000 + 4.0000i    2.0000 + 5.0000i    3.0000 + 6.0000i
Z =
1    2    3

```

以上 $Z = [1 \ 2 \ 3]$ 正是复数组 X 的实部。

3.19 求复数的虚数部分

求复数的虚数部分。命令格式为：

$P = \text{imag}(Z)$ ——计算数组 Z 中每个元素的虚数部分,返回与 Z 同维的实数数组 P 。

【例 3.33】 计算一组复数的虚部。

```

X = [1 + 4i 2 + 5i 3 + 6i]
Z = imag(X)
X =
1.0000 + 4.0000i    2.0000 + 5.0000i    3.0000 + 6.0000i

```

$Z =$
4 5 6

以上 $Z=[4\ 5\ 6]$ 正是复数组 X 的虚部。

3.20 小结

本章共讨论了 19 种常用数学函数的计算方法。