

第3章 三角函数

鲲哥小课堂

1. 常见考法：(1) 1个小题；(2) 2个小题。综上，5/10分。

当然，三角函数显然也是解三角大题的必备基础，两者“你中有我、我中有你”。这里我们把那个大题的分数算到解三角头上，不计入三角函数。

2. 小题难度通常在 $\text{J} \sim \text{JJJ}$ ，也有一定概率出现 JJJJ 压轴题，这类题收录在《决胜800》。

3. 总体而言，高考对三角函数的要求其实非常基础，基础题的套路非常固定，我都给大家总结在本书了。所以，三角函数的分我对学生的要求从来都是三个字：“不能丢”。

既然是必拿分，为什么很多同学觉得三角函数难呢？

因为学习数学的方法不对。

很多同学对数学的努力停留在“抄笔记、错题本”的伪努力层面，从高一开始就抄了无数遍“奇变偶不变，符号看象限”，但始终没理解。总是眼高手低地刷各种看了答案也不懂的模拟题，却不能静下心来把课本上那么实用的计算题一个一个刷过去。

这样能学好数学，那倒反而怪了。

PS：不懂错题本为什么是“伪努力”的同学，去听“鲲哥问必答”电台。

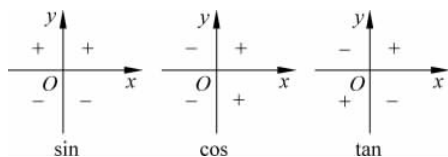
4. 如果大家能练到把本书“化A型”那一节轻松写完，说明基础计算已经入门。接下来就是图形和性质，搞定计算、图形、性质，你会发现其实三角函数就这么些东西。

5. 当然这不是说三角就没有难题，压轴的时候也有，想考“985/211”的同学还是不得不注意，《决胜800》拿好慢慢啃吧。数学考高分难，难就难在你要为10%概率的事情，付出100%的努力。

3.1 象限

核心笔记

鲲哥小课堂



【218】(2007·北京·1·J)

已知 $\cos\theta \cdot \tan\theta < 0$, 那么角 θ 是()。

- A. 第一或第二象限
B. 第二或第三象限
C. 第三或第四象限
D. 第一或第四象限

【219】(2001·全国旧课程·1·J)

若 $\sin\theta\cos\theta > 0$, 则 θ 在()。

- A. 第一、二象限 B. 第一、三象限
C. 第一、四象限 D. 第二、四象限

【220】(2014·新课标全国一·2·J)

若 $\tan\alpha > 0$, 则()。

- A. $\sin\alpha > 0$ B. $\cos\alpha > 0$
C. $\sin 2\alpha > 0$ D. $\cos 2\alpha > 0$

【221】(2004·辽宁·1·J)

若 $\cos\theta > 0$, 且 $\sin 2\theta < 0$, 则角 θ 的终边所在象限是()。

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

【222】(2005·全国三·1·J)

已知 α 为第三象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是()。

- A. 第一或第二象限
B. 第二或第三象限
C. 第一或第三象限
D. 第二或第四象限

3.2 诱导

核心笔记

鲲哥小课堂

诱导公式:

$$\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos\alpha,$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha,$$

$$\tan(\alpha + k \cdot \pi) = \tan\alpha, \quad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha,$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha,$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha, \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha,$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha, \quad \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha.$$

这些公式不能死记,有句话叫“奇变偶不变,符号看象限”。如果这句话你从高一听到现在还不明白,那赶紧去看“鲲哥带你学数学”解说视频吧。

【223】(2010·全国一·1·J)

$\cos 300^\circ = ()$ 。

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【224】(2007·全国二·1·J)

$\cos 330^\circ = ()$ 。

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【225】(2009·全国一·1·J)

$\sin 585^\circ$ 的值为()。

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

那些声称被应试教育毁了的人,不应试也会自毁;那些抱怨婚姻磨灭理想的人,不结婚也成不了居里夫人;那些天天唠叨在这个体制下无法创作出伟大作品的人,去了瑞士也一样找不到灵魂的自由。大家身处同一个时代,却找出不同的借口。(推荐:河北读者@赵阳佳紫)

【226】(2005·湖南·2·J)
 $\tan 600^\circ$ 的值是()。

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $-\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

【227】(2007·湖北·1·J)
 $\tan 690^\circ$ 的值为()。

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$

【228】(2004·湖北·13·J)
 $\tan 2010^\circ$ 的值为_____。

【229】(2009·重庆·6·JJ)

下列关系式中正确的是()。

- A. $\sin 11^\circ < \cos 10^\circ < \sin 168^\circ$
 B. $\sin 168^\circ < \sin 11^\circ < \cos 10^\circ$
 C. $\sin 11^\circ < \sin 168^\circ < \cos 10^\circ$
 D. $\sin 168^\circ < \cos 10^\circ < \sin 11^\circ$

【230】(2014·全国·3·JJ)

 设 $a = \sin 33^\circ$, $b = \cos 55^\circ$, $c = \tan 35^\circ$, 则()。

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$
 C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

3.3 恒等(1): $\sin, \cos, \tan$ 转化

核心笔记

鲲哥小课堂

对 $\sin, \cos, \tan$ 的转化,最常用的方法就是“画三角形,先定值后定号”,“鲲哥带你学数学”有详细解说,赶紧去看吧。

【231】(2007·全国一·2·J)
 α 是第四象限角, $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, 则 $\sin \alpha =$ ()。

- A. $\frac{5}{13}$ B. $-\frac{5}{13}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $-\frac{5}{12}$

【232】(2010·全国二·13·J)

 已知 α 是第二象限的角, $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$, 则 $\cos \alpha =$

_____。

【233】(2011·重庆·12·J)

 若 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, 且 $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 则 $\tan \alpha =$ _____。

【234】(2006·上海·6·J)

 如果 $\cos \alpha = \frac{1}{5}$, 且 α 是第四象限的角, 那么 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) =$ _____。

【235】(2009·北京·9·J)

 若 $\sin \theta = -\frac{4}{5}$, $\tan \theta > 0$, 则 $\cos \theta =$ _____。

【236】(2007·陕西·4·J)

 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ 的值为()。

- A. $-\frac{3}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$
 C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

【237】(2010·全国一·2·JJ)

 记 $\cos(-80^\circ) = k$, 那么 $\tan 100^\circ =$ ()。

- A. $\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ B. $-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$
 C. $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ D. $-\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$

【238】(2016·新课标全国一·14·JJJ)

 已知 θ 是第四象限角, 且 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) =$ _____。

3.4 恒等(2): 和差

核心笔记

鲲哥小课堂

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

注意： $\cos$ 公式的加反而是减，减反而是加。很多涉世未深的少年在此处容易出错。

$$\begin{cases} \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}, \\ \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}. \end{cases}$$

这些公式必须熟练到不假思索。人教版课本上有不少小练习，真心想逆袭的少年，你值得拥有。

【239】(2018 · 新课标全国二 · 15 ·)

已知 $\tan\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{5}$ ，则 $\tan\alpha =$ _____。

【240】(2017 · 江苏 · 5 ·)

若 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{6}$ ，则 $\tan\alpha =$ _____。

【241】(2007 · 福建 · 3 ·)

$\sin 15^\circ \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \sin 105^\circ$ 等于()。

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

【242】(2006 · 陕西 · 13 ·)

$\cos 43^\circ \cos 77^\circ + \sin 43^\circ \cos 167^\circ$ 的值为 _____。

【243】(1978 · 全国 · 4 ·)

不查表，求 $\cos 80^\circ \cos 35^\circ + \cos 10^\circ \cos 55^\circ$ 的值。

【244】(2004 · 重庆 · 5 ·)

$\sin 163^\circ \sin 223^\circ + \sin 253^\circ \sin 313^\circ =$ ()。

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$
C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【245】(2004 · 全国一 · 6 ·)

设 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，若 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ，则 $\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()。

- A. $\frac{7}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{7}{2}$ D. 4

【246】(2008 · 江西 · 17.1 ·)

已知 $\tan\alpha = -\frac{1}{3}$ ， $\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ 。求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值。

【247】(2013 · 新课标全国二 · 15 ·)

设 θ 为第二象限角，若 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ ，则 $\sin\theta + \cos\theta =$ _____。

【248】(2017 · 新课标全国一 · 15 ·)

已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $\tan\alpha = 2$ ，则 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) =$ _____。

【249】(2008 · 山东 · 10 ·)

已知 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\alpha = \frac{4}{5}\sqrt{3}$ ，则 $\sin\left(\alpha + \frac{7\pi}{6}\right)$ 的值是()。

- A. $-\frac{2\sqrt{3}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$
C. $-\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【250】(2010 · 全国一 · 14 ·)

已知 α 为第三象限的角， $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ ，则 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) =$ _____。

【251】(2007·四川·18.2·))

已知 $\cos\alpha = \frac{1}{7}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{13}{14}$, 且 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$. 求 β .

【252】(2006·重庆·13·))

已知 $\alpha, \beta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$, $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$, $\sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{12}{13}$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

【253】(2011·浙江·6·))

若 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{3}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) =$ ().
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ D. $-\frac{\sqrt{6}}{9}$

【254】(2018·浙江·18·))

已知角 α 的顶点与原点 O 重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 它的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

(1) 求 $\sin(\alpha + \pi)$ 的值;

(2) 若角 β 满足 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$, 求 $\cos\beta$ 的值.

【255】(2018·江苏·16·))

已知 α, β 为锐角, $\tan\alpha = \frac{4}{3}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\cos 2\alpha$ 的值;

(2) 求 $\tan(\alpha - \beta)$ 的值.

3.5 恒等(3): 二倍

核心笔记

鲲哥小课堂

① $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

② $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

看到 $1 + \cos 2\alpha$, 优先考虑用 $2\cos^2 \alpha - 1$ 展开;

看到 $1 - \cos 2\alpha$, 优先考虑用 $1 - 2\sin^2 \alpha$ 展开.

③ $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.

【256】(2005·重庆·2·))

$\left(\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}\right) \cdot \left(\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}\right) =$ ().

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【257】(2007·重庆·6·))

下列各式中, 值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的是 ().

A. $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$ B. $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$

C. $2\sin^2 15^\circ - 1$ D. $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ$

【258】(2005·北京·10·))

已知 $\tan \frac{\alpha}{2} = 2$, 则 $\tan \alpha$ 的值为 _____,

$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值为 _____.

【259】(2008·浙江·12·))

若 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos 2\theta =$ _____.

【260】(2013·四川·14·))

设 $\sin 2\alpha = -\sin \alpha$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\tan 2\alpha$ 的值是 _____.

【261】(2010·全国一·14·))

已知 α 为第二象限的角, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\tan 2\alpha =$ _____.

【262】(2011·江苏·7·))

已知 $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2$, 则 $\frac{\tan x}{\tan 2x}$ 的值为_____。

【263】(2011·新课标全国·7·))

已知角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边在直线 $y=2x$ 上, 则 $\cos 2\theta=$ ()。

A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【264】(2013·新课标全国二·6·))

已知 $\sin 2\alpha=\frac{2}{3}$, 则 $\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$ ()。

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【265】(2016·新课标全国二·9·))

若 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha=$ ()。

A. $\frac{7}{25}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $-\frac{1}{5}$ D. $-\frac{7}{25}$

【266】(2012·江苏·11·))

设 α 为锐角, 若 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$, 则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{12}\right)$ 的值为_____。

3.6 恒等(4): 构造 $\tan$

核心笔记

鲲哥小课堂

本节的关键在于构造出 $\tan x$, 例如:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} & \frac{\sin x + 2\cos x}{3\sin x + 4\cos x} \xrightarrow{\text{上下同除以 } \cos x} \frac{\tan x + 2}{3\tan x + 4}; \\ \textcircled{2} & \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} \xrightarrow{\text{上下同除以 } \cos^2 x} \frac{\tan^2 x + 2}{3\tan^2 x + 4}; \\ \textcircled{3} & \sin^2 x + 2\cos^2 x \xrightarrow{\text{补“1”}} \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{1} \\ & = \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} \xrightarrow{\text{上下同除以 } \cos^2 x} \frac{\tan^2 x + 2}{\tan^2 x + 1}. \end{aligned}$$

【267】(2009·陕西·2·))

若 $\tan \alpha=2$, 则 $\frac{2\sin \alpha-\cos \alpha}{\sin \alpha+2 \cos \alpha}$ 的值为()。

A. 0 B. $\frac{3}{4}$ C. 1 D. $\frac{5}{4}$

【268】(2009·辽宁·8·))

已知 $\tan \theta=2$, 则 $\sin^2 \theta+\sin \theta \cos \theta-2 \cos^2 \theta=$ ()。

A. $-\frac{4}{3}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

【269】(2016·新课标全国三·5·))

若 $\tan \alpha=\frac{3}{4}$, 则 $\cos^2 \alpha+2 \sin 2 \alpha=$ ()。

A. $\frac{64}{25}$ B. $\frac{48}{25}$ C. 1 D. $\frac{16}{25}$

【270】(2005·北京·15.2·))

已知 $\tan \frac{\alpha}{2}=2$. 求 $\frac{6 \sin \alpha+\cos \alpha}{3 \sin \alpha-2 \cos \alpha}$ 的值。

【271】(2004·天津·17·))

已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{2}$ 。

(1) 求 $\tan \alpha$ 的值;

(2) 求 $\frac{\sin 2 \alpha-\cos^2 \alpha}{1+\cos 2 \alpha}$ 的值。

【272】(2009·陕西·5·))

若 $3 \sin \alpha+\cos \alpha=0$, 则 $\frac{1}{\cos^2 \alpha+\sin 2 \alpha}$ 的值为()。

A. $\frac{10}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. -2

【273】(2004·湖南·17·))

已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=2$, 求 $\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$ 的值。

3.7 化A型
核心笔记
鲲哥小课堂

口诀：一拆二降三辅助。

$$\text{降次公式: } \begin{cases} \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \\ \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x. \end{cases}$$

辅助角公式: $a\sin\omega x + b\cos\omega x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x + \varphi)$ 。

$$\begin{aligned} \text{例子: } 2\sin 2x + 2\sqrt{3}\cos 2x &= 4\left(\sin 2x \cdot \frac{1}{2} + \cos 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= 4\left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{3}\right) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

备注：本节题目有改动，仅要求化成 $y=A\sin(\omega x + \varphi) + b$ 或 $y=A\cos(\omega x + \varphi) + b$ 的类型。关于图像性质的部分后面会有专门的章节进行练习，不必担心。

【274】(2001·广东·河南·17·))

化简: $y = (\sin x + \cos x)^2 + 2\cos^2 x$ 。

【275】(2016·浙江·10·))

已知 $2\cos^2 x + \sin 2x = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ ($A > 0$), 则 $A = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【276】(2013·北京·15·))

化简: 函数 $f(x) = (2\cos^2 x - 1)\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 4x$ 。

【277】(2006·陕西·18·))

化简: 函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$)。

【278】(2008·陕西·17·))

化简: 函数 $f(x) = 2\sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} + \sqrt{3} \cos \frac{x}{2}$ 。

【279】(2010·山东·17·))

化简: 函数 $f(x) = \sin(\pi - \omega x)\cos \omega x + \cos^2 \omega x$ ($\omega > 0$)。

【280】(2011·重庆·18·))

化简: 函数 $f(x) = \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos(\pi + x) \cdot \cos x$ ($x \in \mathbf{R}$)。

【281】(2012·北京·15·))

化简：函数 $f(x) = \frac{(\sin x - \cos x) \sin 2x}{\sin x}$ 。

【282】(2006·上海·17·))

化简：函数 $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}\sin 2x$ 。

【283】(2010·湖北·16·))

化简：函数 $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ 。

【284】(2005·广东·15·))

化简： $f(x) = \cos\left(\frac{6k+1}{3}\pi + 2x\right) + \cos\left(\frac{6k-1}{3}\pi - 2x\right) + 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)$ ($x \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}$)。

【285】(2005·江西·18·))

求函数 $f(x) = 2\cos \frac{x}{2} \cdot \sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ 并化简。

3.8 图像(1)：基础

核心笔记

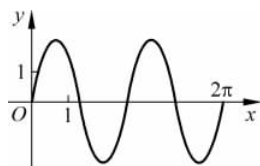
鲲哥小课堂

“一看周期二代点”，即：先看周期确定 ω ，再代点确定 φ 。

值得一提的是：对 $\sin/\cos$ 的题，代入零点可能会出错(因为零点其实并不完全一样)，所以保险的方法就是代入极值点，甚至主动作出极值点；对 $\tan$ 的题，代入零点或非零点均可。

【286】(2008·宁夏 海南·1·))

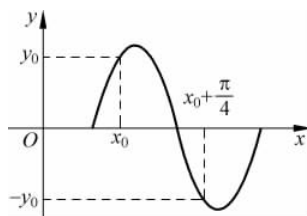
已知函数 $y = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 在区间 $[0, 2\pi]$ 的图像如图，那么 $\omega =$ ()。



A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

【287】(2013·全国·9·))

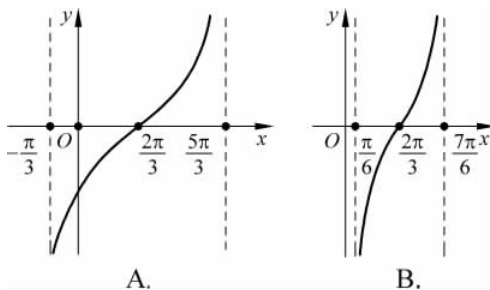
若函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 的部分图像如图，则 $\omega =$ ()。

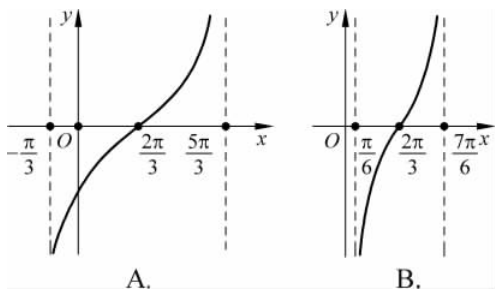


A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

【288】(1997·全国·3·))

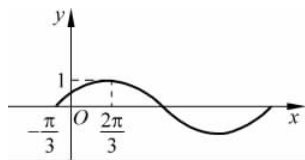
函数 $y = \tan\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi\right)$ 在一个周期内的图像是()。





【289】(2004 · 辽宁 · 11 · ㊞)

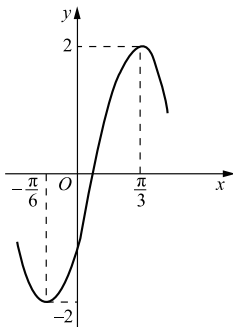
若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像(部分)如图所示, 则 ω 和 φ 的取值是()。



- A. $\omega = 1, \varphi = \frac{\pi}{3}$ B. $\omega = 1, \varphi = -\frac{\pi}{3}$
C. $\omega = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{\pi}{6}$ D. $\omega = \frac{1}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{6}$

【290】(2016 · 新课标全国二 · 3 · ㊞)

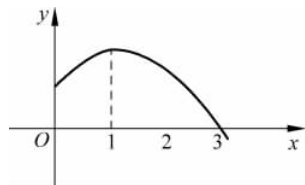
函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图像如图所示, 则()。



- A. $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
B. $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
C. $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
D. $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

【291】(2005 · 福建 · 6 · ㊞)

函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbf{R}, \omega > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$) 的部分图像如图所示, 则()。

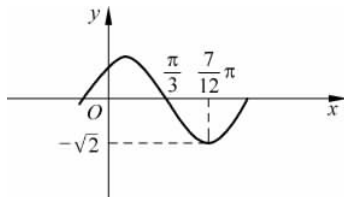


- A. $\omega = \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$ B. $\omega = \frac{\pi}{3}, \varphi = \frac{\pi}{6}$

- C. $\omega = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{4}$ D. $\omega = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{5\pi}{4}$

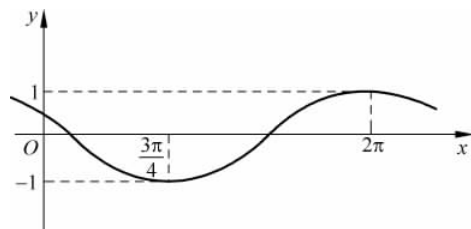
【292】(2011 · 江苏 · 9 · ㊞)

函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 是常数, $A > 0, \omega > 0$) 的部分图像如图所示, 则 $f(0) =$ _____。



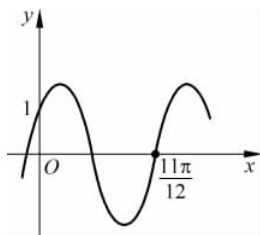
【293】(2009 · 宁夏 海南 · 14 · ㊞)

已知函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\pi \leq \varphi < \pi$) 的图像如图所示, 则 $\varphi =$ _____。



【294】(1990 · 全国 · 6 · ㊞)

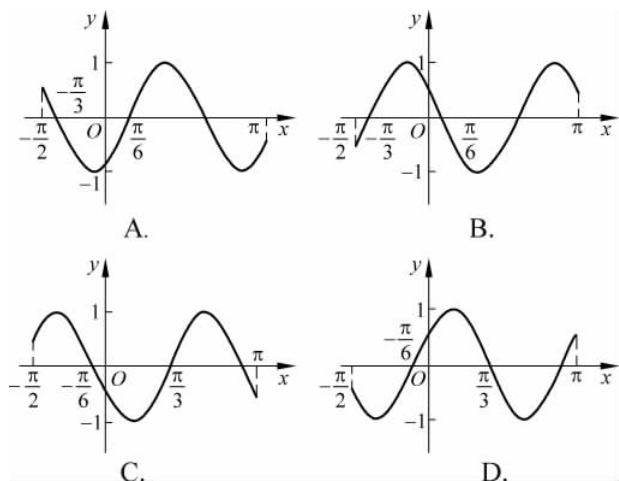
已知下图是函数 $y = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图像, 那么()。



- A. $\omega = \frac{10}{11}, \varphi = \frac{\pi}{6}$ B. $\omega = \frac{10}{11}, \varphi = -\frac{\pi}{6}$
C. $\omega = 2, \varphi = \frac{\pi}{6}$ D. $\omega = 2, \varphi = -\frac{\pi}{6}$

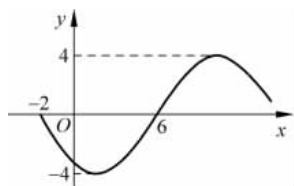
【295】(2007 · 宁夏 海南 · 3 · ㊞)

函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上的简图是()。



【296】(2005·天津·8·J)

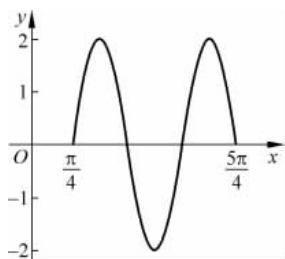
函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}, x \in \mathbf{R}$) 的部分图像如图所示, 则函数表达式为()。



- A. $y = -4 \sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4}\right)$
 B. $y = 4 \sin\left(\frac{\pi}{8}x - \frac{\pi}{4}\right)$
 C. $y = -4 \sin\left(\frac{\pi}{8}x - \frac{\pi}{4}\right)$
 D. $y = 4 \sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4}\right)$

【297】(2009·宁夏 海南·16·J)

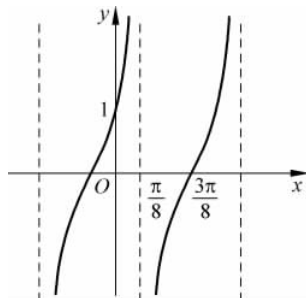
已知函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像如图所示, 则 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right) =$ _____。



【298】(2011·辽宁·12·J)

已知函数 $f(x) = A \tan(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$),

$y = f(x)$ 的部分图像如图所示, 则 $f\left(\frac{\pi}{24}\right) =$ ()。



- A. $2 + \sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $2 - \sqrt{3}$

3.9 图像(2): 平移与伸缩

核心笔记

鲲哥小课堂

① 平移与之前 1.11 节讲的一样, 现在谈谈伸缩:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = f(x) \xrightarrow[\substack{x \text{ 替换为 } (\frac{1}{2}x)}]{\substack{\text{横坐标变为 2 倍}}} y = f\left(\frac{1}{2}x\right), \\ \text{(注意: 是倒数)} \\ y = f(x) \xrightarrow[\substack{x \text{ 替换为 } (3x)}]{\substack{\text{横坐标变为 } \frac{1}{3} \text{ 倍}}} y = f(3x), \\ y = f(x) \xrightarrow[\substack{\text{整体乘以 4}}]{\substack{\text{纵坐标变为 4 倍}}} y = 4f(x), \\ y = f(x) \xrightarrow[\substack{\text{整体乘以 } \frac{1}{5}}]{\substack{\text{纵坐标变为 } \frac{1}{5} \text{ 倍}}} y = \frac{1}{5}f(x). \end{array} \right.$$

② 变型可用两个诱导公式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin t \xrightarrow{\text{诱导}} \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \\ \cos t \xrightarrow{\text{诱导}} \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right). \end{array} \right.$$

③ 条件中有时会出现向量平移的描述, 这时候可以改成我们更习惯的描述。比如按向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$ 平移相当于“右移 1 上移 2”; 又比如按向量 $\mathbf{b} = (-3, -4)$ 平移相当于“左移 3 下移 4”。

【基础】

【299】(2016·四川·3·J)

为了得到函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像, 只需