第 1 章　函数的极限与连续

一、填空题

1. 绝对值函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 其定义域是____________，值域是____________.

2. 设 $f\left(x\right)=\csc x^{2}$，$\varphi\left(x\right)=\arcsin x$，则 $f\left[\varphi\left(x\right)\right]=$____________.

3. 设 $f\left(x\right)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \sec x, & x>0,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=$____________.

4. 函数 $y=\dfrac{1}{\left(x-1\right)^{2}}$ 当 $x\to$____________时为无穷大，当 $x\to$____________时为无穷小.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=$____________.

6. $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=$____________.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^{2}-1}\right)=$____________.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{kx}=\mathrm{e}^{-3}$, 则 $k=$____________.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\right)^{\frac{1}{x}}=$____________，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{kx}=$____________.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{x}{n}=$____________.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=$____________，$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=$____________.

12. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax+2\sin x}{x}=2$，则 $a=$____________.

13. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+a)x^{4}+bx^{3}+5}{2x^{3}-x-2}=2$，则常数 $a=$____________，$b=$____________.

14. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$____________.

15. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ 的间断点是____________.

二、选择题

1. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，则 $g(x)=f(x)-f(-x)$ 是 (　　).

(A) 偶函数　(B) $g(x)\equiv 0$　(C) 非奇非偶函数　(D) 奇函数

2. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点有极限是函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的 (　　).

(A) 充分条件　(B) 必要条件　(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 设函数 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ (　　).

(A) $=-1$　(B) $=0$　(C) $=1$　(D) 不存在

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}=$ (　　).

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) ∞

5. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0,$ 其中 a,b 为常数，则 (　　).

(A) $a=1,b=1$　(B) $a=-1,b=1$　(C) $a=1,b=-1$　(D) $a=-1,b=-1$

6. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)}=2,$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=$ (　　).

(A) 0.5　(B) 1　(C) 4　(D) 2

7. 下列各式正确的是 (　　).

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$　(B) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^{-1}$　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$

8. 下列变量中，是无穷小的为 (　　).

(A) $\ln\frac{1}{x}\ (x\to 0^+)$　　(B) $\ln x\ (x\to 1)$

(C) $\cos x\ (x\to 0)$　　(D) $\frac{x-2}{x^2-4}\ (x\to 2)$

9. 当 $x\to 0$ 时，不是 x^2 等价无穷小的是 (　　).

(A) $\tan^2 x$　　(B) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$　　(C) $\ln(1+x^2)$　　(D) x^3

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}$ (　　).

(A) $=0$　　(B) $=+\infty$　　(C) $=\infty$　　(D) 不存在

11. $f(x)=\begin{cases}1+x, & x>0,\\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1, & x<0,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ (　　).

(A) ∞　　(B) 1　　(C) 4　　(D) 不存在

12. 函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1+x\sin\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处 (　　).

(A) 极限不存在　　(B) 极限值为 0　　(C) 极限值为 1　　(D) 连续

13. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 和 $g(x)=x+1$, (　　).

(A) $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同一个函数

(B) 因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在

(C) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不同，但 $x\to 1$ 时它们的极限值相同

(D) $f(x)$ 与 $g(x)$ 都无间断点

14. 设 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-1, & -1\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 则下列结论正确的是 (　　).

(A) 在 $x=0, x=1$ 处间断　　(B) 在 $x=0, x=1$ 处连续

(C) 在 $x=0$ 处间断，在 $x=1$ 处连续　　(D) 在 $x=0$ 处连续，在 $x=1$ 处间断

15. 函数 $y=\dfrac{x^2-1}{(x-1)(x-2)}$ 的间断点为 (　　).

(A) $x=2$　　(B) $x=1$ 或 $x=2$

(C) $x=1$ 和 $x=2$　　(D) $x=-1$， $x=1$ 和 $x=2$

三、计算题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 2x}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2}}{x+\sin x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

四、1. 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ a, & x=0, \end{cases}$ 求常数 a，使得函数在 $x=0$ 处连续.

2. 函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan 2x}{x}, & -\dfrac{\pi}{4}<x<0, \\ k+1, & x=0, \\ 2+x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0. \end{cases}$ 求 k 的值，使得$f(x)$在$x=0$处连续.

第 2 章　导数及其应用

一、填空题

1. 若 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-2h)}{h}=$____________.

2. 设 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$____________.

3. 设 $y=\dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$，则 $y'=$____________.

4. $y=\ln(1+3^{-x})$，则 $y'=$____________.

5. 设 $f'(x_0)=-2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0)}=$____________.

6. 曲线 $y=x-\mathrm{e}^x$ 上点____________处的切线与 x 轴平行.

7. 过点(1,2)作曲线 $y=2+3\sqrt{x-1}$ 的切线，则切线方程为____________.

8. 曲线 $y=\cos x$ 上点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线方程为____________，法线方程为____________.

9. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点(1,1) 处的切线方程是____________.

10. 曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t,\\ y=\mathrm{e}^{2t}\end{cases}$ 在点 $t=0$ 处的切线方程为____________.

11. $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$____________.

12. $f(x)=x\mathrm{e}^x$，则 $f'''(\ln 2)=$____________.

13. 设 $\begin{cases}x=2t-t^2,\\ y=3t-t^3,\end{cases}$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$____________，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$____________.

14. 设 $x+y=\tan y$，则 $\mathrm{d}y=$____________.

15. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y-x-\ln x=0$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$____________.

二、选择题

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 在 $x=1$ 处 (　　).

(A) 左右导数均存在　　(B) 左导数存在，右导数不存在

(C) 左导数不存在，右导数存在　　(D) 左右导数均不存在

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处 (　　).

(A) 连续不可导　　(B) 连续可导

(C) 不连续不可导　　(D) 不连续但可导

3. 设 $y=5^{\ln\tan x}$，则 $\mathrm{d}y=5^{\ln\tan x}$ (　　).

(A) $\dfrac{2\ln 5}{\sin 2x}\mathrm{d}x$　　(B) $\dfrac{5\ln 5}{\sin 2x}\mathrm{d}x$

(C) $\dfrac{2\ln 5}{\cos 2x}\mathrm{d}x$　　(D) $-\dfrac{5\ln 5}{\sin 2x}\mathrm{d}x-2$

4. 函数在点 x_0 处连续是在该点 x_0 处可导的 (　　) 条件.

(A) 充分但不是必要　　(B) 必要但不是充分

(C) 充分必要　　(D) 即非充分也非必要

5. 设 $y=f(-x)$，则 $y'=$ (　　).

(A) $f'(x)$　　(B) $-f'(x)$　　(C) $f'(-x)$　　(D) $-f'(-x)$

6. 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ (　　).

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在　　(B) 有跳跃间断点 $x=0$

(C) 在 $x=0$ 处右极限不存在　　(D) 有可去间断点 $x=0$

7. 设曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=2(t-\sin t),\\ y=2(1-\cos t),\end{cases}$ 则曲线在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程为 (　　).

(A) $x-y=\pi$　　(B) $x+y=\pi-4$

(C) $x+y=\pi$　　(D) $x-y=\pi-4$

8. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，周期为 4，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线的斜率为 (　　).

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -2

9. 设 $y=\tan x+\ln 2$，则 $y'=$ (　　).

(A) $\sec x+\dfrac{1}{2}$　　(B) $\sec^2 x+2$

(C) $\sec^2 x$　　(D) $\cot x$

10. 已知 $\varphi(x)=\begin{cases} x^2-1, & x>2, \\ ax+b, & x\leqslant 2, \end{cases}$ 且 $\varphi'(2)$ 存在，则常数 a,b 的值为 (　　).

(A) $a=2,b=1$　　(B) $a=-1,b=5$

(C) $a=4,b=-5$　　(D) $a=3,b=-3$

11、已知函数 $f(x)$ 具有任何阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)=$ (　　).

(A) $n![f(x)]^{n+1}$　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$

(C) $[f(x)]^{2n}$　　(D) $n![f(x)]^{2n}$

三、计算题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1, \\ ax+b, & x>1, \end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a，b 应取什么值？

2. 设函数 $\phi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，讨论函数 $f(x)=|x-a|\phi(x)$ 在 $x=a$ 处的可导性.

3. 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right), f'(x)=\arctan x^2$，求：$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.