

动态系统的行为和性能是由系统运动过程的形态所决定的。状态空间描述的建立为严格地和定量地分析系统的运动提供了基础。本章以线性系统为对象,包括连续时间系统和离散时间系统,时不变系统和时变系统,较为系统和全面地讨论运动分析的理论和方法。

3.1 引言

对系统运动的分析,归结为从状态空间描述出发研究由输入作用和初始状态的激励所引起的状态或输出响应,以为分析系统的运动形态和性能行为提供基础。本节是对线性系统运动分析的一些共性概念的一个引论性介绍,包括运动分析的数学实质、运动解的存在性和唯一性条件、系统运动的分解等。

3.1.1 运动分析的数学实质

从数学的角度,运动分析的实质就是求解系统状态方程,以解析形式或数值分析形式,建立系统状态随输入和初始状态的演化规律,特别是状态演化形态对系统结构和参数的依赖关系。对连续时间线性系统,运动分析归结为相对于给定初始状态 $\mathbf{x}_0$ 和输入向量 $\mathbf{u}(t)$,求解向量微分方程型状态方程:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.1)$$

或

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

对离散时间线性系统,运动分析归结为相对于给定初始状态 $\mathbf{x}_0$ 和输入向量 $\mathbf{u}(k)$,求解向量差分方程型状态方程:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

或

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad k=0,1,2,\dots \quad (3.4)$$

其中,式(3.2)和式(3.4)对应于时不变系统,式(3.1)和式(3.3)对应于时变系统。

应当指出,尽管运动响应由初始状态 $\mathbf{x}_0$ 和输入向量 $\mathbf{u}(t)$ 所激励,系统的运动形态主要由系统的结构和参数所决定。对连续时间线性系统,由矩阵对 $(\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t))$ 或 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 决定;对离散时间线性系统,由矩阵对 $(\mathbf{G}(k), \mathbf{H}(k))$ 或 $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ 决定。对于线性系统,必可得到解析形式的状态解 $\mathbf{x}(t)$ 或 $\mathbf{x}(k)$,即能以显式形式给出运动过程对系统结构与参数的依赖关系。这一属性为分析线性系统的基本特性如稳定性、能控性和能观测性等提供了简便的途径。

3.1.2 解的存在性和唯一性条件

容易理解,当且仅当状态方程的解为存在和唯一,对系统的运动分析才是有意义的。为此,需要对状态方程的系数矩阵和输入引入附加的限制条件,以保证状态方程解的存在性和唯一性。

考虑连续时间线性时变系统,其状态方程如式(3.1)所示。由微分方程理论可知,如果系数矩阵 $(\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t))$ 的所有元在时间定义区间 $[t_0, t_a]$ 上为时间 t 的连续实函数,输入 $\mathbf{u}(t)$ 的所有元在时间定义区间 $[t_0, t_a]$ 上为时间 t 的连续实函数,那么状态方程(3.1)的解 $\mathbf{x}(t)$ 为存在且唯一。对于大多数实际物理系统,上述条件一般总是能够满足的。但从数学观点,上述条件可能显得过强而可减弱为如下3个条件:

(i) 系统矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 的各个元 $a_{ij}(t)$ 在时间区间 $[t_0, t_a]$ 上为绝对可积,即有

$$\int_{t_0}^{t_a} |a_{ij}(t)| dt < \infty, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

(ii) 输入矩阵 $\mathbf{B}(t)$ 的各个元 $a_{ik}(t)$ 在时间区间 $[t_0, t_a]$ 上为平方可积,即有

$$\int_{t_0}^{t_a} [b_{ik}(t)]^2 dt < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (3.6)$$

(iii) 输入 $\mathbf{u}(t)$ 的各个元 $u_k(t)$ 在时间区间 $[t_0, t_a]$ 上为平方可积,即有

$$\int_{t_0}^{t_a} [u_k(t)]^2 dt < \infty, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (3.7)$$

其中, n 为状态 $\mathbf{x}$ 的维数, p 为输入 $\mathbf{u}$ 的维数。进而,利用施瓦茨(Schwarz)不等式,可以导出:

$$\sum_{k=1}^p \int_{t_0}^{t_a} |b_{ik}(t)u_k(t)| dt \leq \sum_{k=1}^p \left[\int_{t_0}^{t_a} [b_{ik}(t)]^2 dt \cdot \int_{t_0}^{t_a} [u_k(t)]^2 dt \right]^{1/2} \quad (3.8)$$

上式表明,条件(3.6)和(3.7)还可合并为要求 $\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$ 的各元在时间区间 $[t_0, t_a]$ 上绝对可积。对于连续时间线性时不变系统,系数矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为常阵且元为有限值,条件(3.5)和(3.6)自然满足,存在性唯一性条件只归结为条件(3.7)。

本章的讨论中,总是假定系统满足上述存在性唯一性条件,并在这一前提下分析系统状态运动的演化规律。

3.1.3 零输入响应和零初态响应

线性系统的一个基本属性是满足叠加原理。基于叠加原理,如图 3.1 所示,把系统同时在初始状态 $\mathbf{x}_0$ 和输入 $\mathbf{u}$ 作用下的状态运动 $\mathbf{x}(t)$ 分解为由初始状态 $\mathbf{x}_0$ 和输入 $\mathbf{u}$ 分别单独作用所产生的运动 $\mathbf{x}_{0u}(t)$ 和 $\mathbf{x}_{0x}(t)$ 的叠加,即 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{0u}(t) + \mathbf{x}_{0x}(t)$ 。并且,称 $\mathbf{x}_{0u}(t)$ 为系统的零输入响应, $\mathbf{x}_{0x}(t)$ 为系统的零初态响应。线性系统运动的可分解属性为分析系统运动过程的演化规律提供了简便性和直观性。

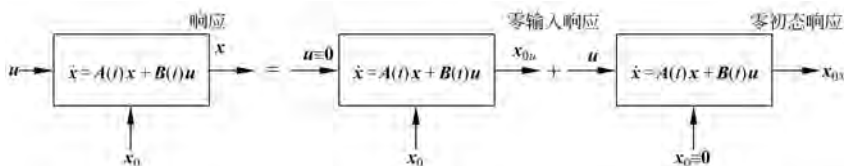


图 3.1 线性系统运动的分解

下面,给出零输入响应和零初态响应的定义。

定义 3.1 [零输入响应] 线性系统的零输入响应 $\mathbf{x}_{0u}(t)$ 定义为只有初始状态作用即 $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ 而无输入作用即 $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$ 时系统的状态响应。

注 数学上,零输入响应 $\mathbf{x}_{0u}(t)$ 就是无输入自治状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.9)$$

的状态解。物理上,零输入响应 $\mathbf{x}_{0u}(t)$ 代表系统状态的自由运动,特点是响应形态只由系统矩阵所决定,不受系统外部输入变量的影响。

定义 3.2 [零初态响应] 线性系统的零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}(t)$ 定义为只有输入作用即 $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$ 而无初始状态作用即 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ 时系统的状态响应。

注 数学上,零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}(t)$ 即为零初始状态强迫状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.10)$$

的状态解。物理上,零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}(t)$ 代表系统状态由输入 $\mathbf{u}$ 所激励的强迫运动,特点是响应稳态时具有和输入相同的函数形态。

3.2 连续时间线性时不变系统的运动分析

连续时间线性时不变系统的运动分析是本章讨论的重点。这不仅在于其在现实世界中存在的普遍性,而且还在于其基本结果和分析方法在运动分析中的基础性。本节以线性时不变系统为对象,先讨论系统零输入响应和作为分析基础的矩阵指数函数,再在此基础上拓展讨论零初态响应,最后基于叠加原理给出系统状态响应的完整表达式。

3.2.1 系统的零输入响应

考虑连续时间线性时不变系统。令系统输入 $u(t) \equiv 0$ 即无外部输入, 导出系统自治状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0 \quad (3.11)$$

其中, $\mathbf{x}$ 为 n 维状态, $\mathbf{A}$ 为 $n \times n$ 常阵。进而, 仿照指数函数:

$$e^{at} \triangleq 1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}a^k t^k \quad (3.12)$$

对系统矩阵 $\mathbf{A}$ 定义矩阵指数函数:

$$e^{\mathbf{A}t} \triangleq \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k \quad (3.13)$$

在此基础上, 可对线性时不变系统的零输入响应导出如下的结论。

结论 3.1 [零输入响应] 连续时间线性时不变系统的零输入响应 $\mathbf{x}_{0u}(t)$, 即系统自治状态方程(3.11)的解, 具有如下的表达式:

$$\mathbf{x}_{0u}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0 \quad (3.14)$$

证 对自治方程(3.11), 表其解 $\mathbf{x}_{0u}(t)$ 是系数为待定向量的一个幂级数, 有

$$\mathbf{x}_{0u}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{b}_k t^k, \quad t \geq 0 \quad (3.15)$$

由使其满足方程(3.11), 可以导出:

$$\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 t + 3\mathbf{b}_3 t^2 + \cdots = \mathbf{A}\mathbf{b}_0 + \mathbf{A}\mathbf{b}_1 t + \mathbf{A}\mathbf{b}_2 t^2 + \cdots \quad (3.16)$$

由等式(3.16)两边 t^k ($k=0, 1, 2, \cdots$) 项的系数向量必为相等, 并顺序地利用所导出的结果, 可以定出各个待定系数向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_3 &= \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3\mathbf{b}_0 \\ &\cdots \\ \mathbf{b}_k &= \frac{1}{k}\mathbf{A}\mathbf{b}_{k-1} = \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0 \\ &\cdots \end{aligned} \quad (3.17)$$

将式(3.17)代入式(3.15), 进而得到

$$\mathbf{x}_{0u}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \cdots \right) \mathbf{b}_0, \quad t \geq 0 \quad (3.18)$$

令上式中 $t=0$, 并使其满足初始条件 $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$, 又可定出

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{x}_0 \quad (3.19)$$

于是, 将式(3.19)代入式(3.18), 并利用矩阵指数函数关系式(3.13), 即证得零输入

响应 $\mathbf{x}_{0u}(t)$ 的表达式(3.14)。证明完成。

下面,对线性时不变系统零输入响应的属性导出如下的几点推论。

1. 零输入响应的几何表征

对线性时不变系统,表达式(3.14)表明, $\mathbf{x}_{0u}(t)$ 取 $t=t_i$ 导出的 $\mathbf{x}_{0u}(t_i)=e^{At_i}\mathbf{x}_0$ 即时刻 t_i 状态点 $\mathbf{x}_{0u}(t_i)$,几何上对应于状态空间中由初始状态点 $\mathbf{x}_0$ 经线性变换 $e^{At_i}\mathbf{x}_0$ 导出的一个变换点。零输入响应 $\mathbf{x}_{0u}(t)$ 随时间 t 演化过程,几何上即为状态空间中由初始状态点 $\mathbf{x}_0$ 出发和由各个时刻变换点构成的一条轨迹。

2. 零输入响应的运动属性

对线性时不变系统,由零输入响应为自治状态方程解属性决定,状态空间中 $\mathbf{x}_{0u}(t)$ 随时间 t 演化轨迹,属于由偏离系统平衡状态的初始状态 $\mathbf{x}_0$ 引起的自由运动。一个典型的例子是,人造卫星在末级火箭脱落后运行轨迹就属于以脱落时刻运行状态为初始状态的自由运动即零输入响应。

3. 零输入响应的形态

对线性时不变系统,由表达式(3.14)看出,零输入响应即自由运动轨迹的形态,由且仅由系统的矩阵指数函数 e^{At} 唯一决定。不同的系统矩阵 $\mathbf{A}$,导致不同形态的矩阵指数函数 e^{At} ,从而导致不同形态的零输入响应即自由运动轨迹。这就表明,矩阵指数函数 e^{At} 即系统矩阵 $\mathbf{A}$ 包含了零输入响应即自由运动形态的全部信息。

4. 零输入响应的计算

对线性时不变系统,由表达式(3.14)看出,计算零输入响应 $\mathbf{x}_{0u}(t)$ 的核心步骤是计算矩阵指数函数 e^{At} 。 e^{At} 的算法和特性将在随后进行讨论。

5. 零输入响应表达式的更一般形式

对线性时不变系统,通常习惯地取初始时间 $t_0=0$ 。由于时不变系统的分析只与相对时间有关,这种处理并不失去讨论的一般性。但若因某种需要,将初始时间取为 $t_0 \neq 0$,对此需将 $\mathbf{x}_{0u}(t)$ 表为更一般形式:

$$\mathbf{x}_{0u}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0 \quad (3.20)$$

3.2.2 矩阵指数函数的性质

矩阵指数函数 e^{At} 在线性时不变系统运动和特性的分析中具有基本的重要性。为此,基于定义式(3.13),下面进一步给出 e^{At} 的基本性质。

1. e^{At} 在 $t=0$ 的值

由 e^{At} 定义式(3.13), 取 $t=0$, 即可导出:

$$\lim_{t \rightarrow 0} e^{At} = \mathbf{I} \quad (3.21)$$

2. e^{At} 相对于时间变量分解的表达式

由 e^{At} 定义式(3.13), 取时间变量为 $t+\tau$, t 和 τ 为两个独立自变量, 即可导出:

$$e^{A(t+\tau)} = e^{At} e^{A\tau} = e^{A\tau} e^{At} \quad (3.22)$$

3. e^{At} 的逆

对任意系统矩阵 $\mathbf{A}$, 矩阵指数函数 e^{At} 必为非奇异。进而, 在式(3.22)中, 取 $\tau = -t$, 即可导出 e^{At} 的逆为

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At} \quad (3.23)$$

4. 矩阵和的指数函数

由定义式(3.13), 对可交换两个同维方阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{F}$, 即成立 $\mathbf{AF} = \mathbf{FA}$, 可以导出矩阵和的指数函数为

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{F})t} = e^{At} e^{Ft} = e^{Ft} e^{At} \quad (3.24)$$

5. e^{At} 对 t 的导数

由 e^{At} 定义式(3.13), 通过对时间变量 t 求导运算, 即可导出:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \mathbf{A} e^{At} = e^{At} \mathbf{A} \quad (3.25)$$

6. e^{At} 逆对 t 的导数

由关系式 $e^{At} (e^{At})^{-1} = e^{At} e^{-At} = \mathbf{I}$, 通过对时间变量 t 求导运算, 即可导出:

$$\frac{d}{dt} e^{-At} = -\mathbf{A} e^{-At} = -e^{-At} \mathbf{A} \quad (3.26)$$

7. e^{At} 积的关系式

由 e^{At} 相对于时间变量分解的表达式(3.22), 即可推导出:

$$(e^{At})^m = e^{A(mt)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

3.2.3 矩阵指数函数的算法

进而, 给出矩阵指数函数 e^{At} 的一些常用计算方法, 并举例说明其计算过程。

1. 定义法

结论 3.2 [e^{At} 算法] 给定 $n \times n$ 矩阵 A , 则计算 e^{At} 的算式为

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \cdots \quad (3.28)$$

注 通常, 基于定义法只能得到 e^{At} 数值结果, 难以获得 e^{At} 解析表达式。

2. 特征值法

结论 3.3 [e^{At} 算法] 给定 $n \times n$ 矩阵 A , 且其 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 两两相异, 表由矩阵 A 的属于各个特征值的右特征向量组成的变换阵为

$$P = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n] \quad (3.29)$$

则计算 e^{At} 的算式为

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1} \quad (3.30)$$

结论 3.4 [e^{At} 算法] 给定 $n \times n$ 矩阵 A , 其特征值属于包含重值情形。为使符号不致过于复杂, 设 $n=5$, 特征值 λ_1 (代数重数 $\sigma_1=3$, 几何重数 $\alpha_1=1$), λ_2 ($\sigma_2=2$, $\alpha_2=1$)。再表由矩阵 A 的属于 λ_1 和 λ_2 的广义特征向量组所构成的变换矩阵为 Q , 且基于约当规范形可把 A 化为如下形式:

$$A = Q \left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array} \right] Q^{-1} \quad (3.31)$$

则计算 e^{At} 的算式为

$$e^{At} = Q \left[\begin{array}{ccc|cc} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2!} t^2 e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & t e^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{array} \right] Q^{-1} \quad (3.32)$$

证 证明思路类同于结论 3.3, 具体证明过程略去。

3. 有限项展开法

结论 3.5 [e^{At} 算法] 给定 $n \times n$ 矩阵 A , 则计算 e^{At} 的算式为

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \cdots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} \quad (3.33)$$

对 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 两两相异情形, 系数 $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ 的计算关系式为

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

对 A 的特征值包含重值如 λ_1 (代数重数 $\sigma_1=3$, 几何重数 $\alpha_1=1$), λ_2 ($\sigma_2=2, \alpha_2=1$), $\lambda_3, \dots, \lambda_{n-3}$ 情形, 系数 $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ 的计算关系式为

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \\ \alpha_4(t) \\ \alpha_5(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\lambda_1^{n-3} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \cdots & \frac{(n-1)}{1!}\lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \hline 0 & 1 & 2\lambda_2 & 3\lambda_2^2 & \cdots & \frac{(n-1)}{1!}\lambda_2^{n-2} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \hline 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_{n-3} & \lambda_{n-3}^2 & \lambda_{n-3}^3 & \cdots & \lambda_{n-3}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2!}t^2 e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{1!}t e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \\ \hline \frac{1}{1!}t e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \hline e^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_{n-3} t} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

4. 预解矩阵法

结论 3.6 [e^{At} 算法] 给定 $n \times n$ 矩阵 A , 定出预解矩阵 $(sI - A)^{-1}$, 则计算 e^{At} 的算式为

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1} \quad (3.36)$$

例 3.1 给定一个连续时间线性时不变系统, 其自治状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

下面, 分别采用上述四种算法计算矩阵指数函数 e^{At} 。

(1) 定义法。由算式(3.28), 即得

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ -2t & -3t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t^2 & -\frac{3}{2}t^2 \\ 3t^2 & \frac{7}{2}t^2 \end{bmatrix} + \cdots \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - t^2 + \cdots & t - \frac{3}{2}t^2 + \cdots \\ -2t + 3t^2 + \cdots & 1 - 3t + \frac{7}{2}t^2 + \cdots \end{bmatrix}$$

(2) 特征值法。首先,定出矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 = -2$ 。进而,定出使矩阵 $\mathbf{A}$ 化为对角线型约当规范形的变换矩阵 $\mathbf{P}$ 及其逆 $\mathbf{P}^{-1}$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

基此并由算式(3.30),即可定出:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\lambda_1 t} & \\ & \mathbf{e}^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{-t} & \\ & \mathbf{e}^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} & \mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} \\ -2\mathbf{e}^{-t} + 2\mathbf{e}^{-2t} & -\mathbf{e}^{-t} + 2\mathbf{e}^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3) 有限项展开法。首先,定出矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 = -2$ 。进而,据此并利用(3.34),定出系数矩阵:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\lambda_1 t} \\ \mathbf{e}^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{-t} \\ \mathbf{e}^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{-t} \\ \mathbf{e}^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} \\ \mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

基此并由算式(3.33),即可定出:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} &= \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} \\ &= (2\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} & \mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} \\ -2\mathbf{e}^{-t} + 2\mathbf{e}^{-2t} & -\mathbf{e}^{-t} + 2\mathbf{e}^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(4) 预解矩阵法。首先,求出系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的预解矩阵为

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2} & \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对上式求拉普拉斯反变换,即可得到

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

3.2.4 系统的零初态响应

考虑连续时间线性时不变系统,令系统初始状态 $\mathbf{x}(0)=\mathbf{0}$,相应状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \quad t \geq 0 \quad (3.37)$$

其中, $\mathbf{x}$ 为 n 维状态向量, $\mathbf{u}$ 为 p 维输入向量, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为 $n \times n$ 和 $n \times p$ 常阵。那么,对系统零初态响应可导出如下的结论。

结论 3.7 [零初态响应] 连续时间线性时不变系统的零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}(t)$,即状态方程(3.37)的解,具有如下表达式:

$$\mathbf{x}_{0x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (3.38)$$

证 考虑如下显等式:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x} &= \left(\frac{d}{dt} e^{-\mathbf{A}t} \right) \mathbf{x} + e^{-\mathbf{A}t} \dot{\mathbf{x}} \\ &= e^{-\mathbf{A}t} [\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x}] = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{B}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.39)$$

对上式从 0 到 t 积分,并注意到 $\mathbf{x}(0)=\mathbf{0}$,得到

$$e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3.40)$$

再将等式(3.40)左乘 $e^{\mathbf{A}t}$,并利用 $e^{\mathbf{A}(t-\tau)} = e^{\mathbf{A}t} e^{-\mathbf{A}\tau}$,即可证得

$$\mathbf{x}_{0x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}t} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3.41)$$

例 3.2 给定一个连续时间线性时不变系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad t \geq 0$$

其中,初始状态 $x_1(0)=x_2(0)=0$,输入 $u(t)=1(t)$ 即为单位阶跃函数。

例 3.1 中已经导出,矩阵 $\mathbf{A}$ 的矩阵指数函数为

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

基此,并利用基本关系式(3.38),即可定出系统零初态响应为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{0x1}(t) \\ x_{0x2}(t) \end{bmatrix} &= \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 d\tau \end{aligned}$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

下面,对零初态响应的特征和属性作如下的几点讨论。

1. 零初态响应关系式的数学特征

由零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}(t)$ 的关系式

$$\mathbf{x}_{0x}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (3.42)$$

可以看出,积分式中矩阵指数函数影响和输入作用函数影响在时序上是对偶的。对时刻 t ,输入作用函数的影响是从 $\tau=0$ 考虑到 $\tau=t$,矩阵指数函数的影响则从 $\tau=t$ 考虑到 $\tau=0$ 。数学上,称这种类型的积分为“卷积”。卷积具有对称性,即可将上述 $\mathbf{x}_{0x}(t)$ 关系式化为如下等价形式:

$$\mathbf{x}_{0x}(t) = \int_0^t e^{A\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(t-\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (3.43)$$

2. 零初态响应的几何特征

对零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}(t)$ 关系式(3.38),可进而表示为

$$\mathbf{x}_u(t) = \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{x}_{0x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_u(t), \quad t \geq 0$$

$\mathbf{x}_u(t)$ 代表时刻 t 输入作用等价状态, $\mathbf{x}_{0x}(t)$ 是输入作用等价状态 $\mathbf{x}_u(t)$ 以 e^{At} 为变换阵导出的变换点, e^{At} 为矩阵指数函数。零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}(t)$ 几何上代表状态空间中由各个时刻 t 输入作用等价状态的变换点构成的一条轨迹。

3. 零初态响应的运动属性

零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}(t)$ 随时间 t 演化的轨迹属于输入驱动下的强迫运动。由 $\mathbf{x}_{0x}(t)$ 的运动属性决定, $\mathbf{x}_{0x}(t)$ 的形态在稳态过程中同于输入函数结构,在过渡过程中则同时依赖于系统特性和输入作用。

4. 零初态响应相对于任意初始时刻的表达式

若更为一般地取初始时刻 $t_0 \neq 0$,则零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}(t)$ 的关系式对应地具有形式:

$$\mathbf{x}_{0u}(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (3.44)$$

3.2.5 系统状态运动规律的基本表达式

考虑同时作用有初始状态和输入的连续时间线性时不变系统,状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0 \quad (3.45)$$

其中, $\mathbf{x}$ 为 n 维状态, $\mathbf{u}$ 为 p 维输入, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为 $n \times n$ 和 $n \times p$ 常阵。基于系统的零输入响应 $\mathbf{x}_{0u}(t)$ 和零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}(t)$, 并利用叠加原理, 可对系统状态运动规律直接导出如下的一个结论。

结论 3.8 [状态运动规律] 连续时间线性时不变系统的状态运动规律, 即同时作用有初始状态和输入的状态方程(3.45)的解, 对初始时刻 $t_0 = 0$ 情形具有表达式:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (3.46)$$

对初始时刻 $t_0 \neq 0$ 情形具有表达式:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (3.47)$$

注 直观上, 式(3.46)或式(3.47)意味着系统状态运动由“初始状态转移项”和“输入作用下受控项”叠加而成。正是受控项的存在, 使得有可能通过选取输入 $\mathbf{u}$ 来改善状态 $\mathbf{x}(t)$ 的运动行为和性能, 以避免有害运动过程如不稳定或使状态轨迹满足期望性能指标。

3.2.6 基于特征结构的状态响应表达式

对特征值两两相异一类连续时间线性时不变系统, 可进一步导出基于特征值和特征向量的状态响应表达式。系统状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0 \quad (3.48)$$

其中, $\mathbf{x}$ 为 n 维状态, $\mathbf{u}$ 为 p 维输入, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为 $n \times n$ 和 $n \times p$ 常阵, 矩阵 $\mathbf{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为两两相异。进而, 表

$n \times 1$ 向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n = \mathbf{A}$ 的属于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 线性无关右特征向量组

$1 \times n$ 向量 $\mathbf{w}_1^T, \mathbf{w}_2^T, \dots, \mathbf{w}_n^T = \mathbf{A}$ 的属于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 线性无关左特征向量组
再引入右特征向量矩阵

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n], \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_1^T \\ \bar{\mathbf{v}}_2^T \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{v}}_n^T \end{bmatrix}$$

和左特征向量矩阵

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^T \\ \mathbf{w}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = [\bar{\mathbf{w}}_1, \bar{\mathbf{w}}_2, \dots, \bar{\mathbf{w}}_n]$$

并且, 成立

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \bar{\mathbf{v}}_i^T = \mathbf{I}_n, \quad \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{w}}_i \mathbf{w}_i^T = \mathbf{I}_n \quad (3.49)$$

在此基础上,作为导出状态响应表达式的准备知识,先来给出关于矩阵指数函数 $e^{\mathbf{A}t}$ 的如下两个结论。

结论 3.9 [矩阵指数函数] 对特征值两两相异一类 n 维连续时间线性时不变系统(3.48),基于特征结构的矩阵指数函数 $e^{\mathbf{A}t}$ 的表达式为

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \bar{\mathbf{v}}_i^T e^{\lambda_i t} \quad (3.50)$$

其中, λ_i 为特征值, $\mathbf{v}_i$ 为 $\mathbf{A}$ 的属于 λ_i 的右特征向量, $i=1, 2, \dots, n$ 。

证 据矩阵指数函数 $e^{\mathbf{A}t}$ 的特征值算法,即可证得

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_1^T \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{v}}_n^T \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_1^T \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{v}}_n^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \bar{\mathbf{v}}_i^T e^{\lambda_i t} \end{aligned} \quad (3.51)$$

结论 3.10 [矩阵指数函数] 对特征值两两相异一类 n 维连续时间线性时不变系统(3.48),基于特征结构的矩阵指数函数 $e^{\mathbf{A}t}$ 的表达式为

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{w}}_i \mathbf{w}_i^T e^{\lambda_i t} \quad (3.52)$$

其中, λ_i 为特征值, $\mathbf{w}_i^T$ 为 $\mathbf{A}$ 的属于 λ_i 的左特征向量, $i=1, 2, \dots, n$ 。

证 证明过程类似结论 3.9。

基于特征结构的矩阵指数函数 $e^{\mathbf{A}t}$ 的表达式(3.50)和(3.52),并运用状态响应的有关关系式,可直接给出基于特征结构的零输入响应 $\mathbf{x}_{0u}(t)$ 、零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}(t)$ 和状态运动规律 $\mathbf{x}(t)$ 的表达式。

结论 3.11 [零输入响应] 对特征值两两相异一类 n 维连续时间线性时不变系统(3.48),基于特征结构的零输入响应 $\mathbf{x}_{0u}(t)$ 的表达式可按两类情形给出。

对 $t_0=0$ 情形,有

$$\mathbf{x}_{0u}(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i \bar{\mathbf{v}}_i^T) \mathbf{x}_0 e^{\lambda_i t}, \quad t \geq 0 \quad (3.53)$$

或

$$\mathbf{x}_{0u}(t) = \sum_{i=1}^n (\bar{\mathbf{w}}_i \mathbf{w}_i^T) \mathbf{x}_0 e^{\lambda_i t}, \quad t \geq 0 \quad (3.54)$$

对 $t_0 \neq 0$ 情形,有

$$\mathbf{x}_{0u}(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i \bar{\mathbf{v}}_i^T) \mathbf{x}_0 e^{\lambda_i (t-t_0)}, \quad t \geq t_0 \quad (3.55)$$

或

$$\mathbf{x}_{0u}(t) = \sum_{i=1}^n (\bar{\mathbf{w}}_i \mathbf{w}_i^T) \mathbf{x}_0 e^{\lambda_i(t-t_0)}, \quad t \geq t_0 \quad (3.56)$$

其中, λ_i 为特征值, $\mathbf{v}_i$ 和 $\mathbf{w}_i^T$ 为 $\mathbf{A}$ 的属于 λ_i 的右和左特征向量, $i=1, 2, \dots, n$, $\mathbf{x}_0$ 为初始状态。

结论 3.12 [零初态响应] 对特征值两两相异一类 n 维连续时间线性时不变系统(3.48), 基于特征结构的零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}(t)$ 的表达式可按两类情形给出。

对 $t_0=0$ 情形, 有

$$\mathbf{x}_{0x}(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i \bar{\mathbf{v}}_i^T) \left\{ \sum_{j=1}^p \mathbf{b}_j \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau \right\}, \quad t \geq 0 \quad (3.57)$$

或

$$\mathbf{x}_{0x}(t) = \sum_{i=1}^n (\bar{\mathbf{w}}_i \mathbf{w}_i^T) \left\{ \sum_{j=1}^p \mathbf{b}_j \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau \right\}, \quad t \geq 0 \quad (3.58)$$

对 $t_0 \neq 0$ 情形, 有

$$\mathbf{x}_{0x}(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i \bar{\mathbf{v}}_i^T) \left\{ \sum_{j=1}^p \mathbf{b}_j \int_{t_0}^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau \right\}, \quad t \geq t_0 \quad (3.59)$$

或

$$\mathbf{x}_{0x}(t) = \sum_{i=1}^n (\bar{\mathbf{w}}_i \mathbf{w}_i^T) \left\{ \sum_{j=1}^p \mathbf{b}_j \int_{t_0}^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau \right\}, \quad t \geq t_0 \quad (3.60)$$

其中, λ_i 为特征值, $\mathbf{v}_i$ 和 $\mathbf{w}_i^T$ 为 $\mathbf{A}$ 的属于 λ_i 的右和左特征向量, $i=1, 2, \dots, n$, $\mathbf{b}_j$ 为 $\mathbf{B}$ 的第 j 个列, u_j 为 $\mathbf{u}$ 的第 j 个分量, $j=1, 2, \dots, p$ 。

结论 3.13 [系统的运动规律] 对特征值两两相异一类 n 维连续时间线性时不变系统(3.48), 基于特征结构的状态运动规律 $\mathbf{x}(t)$ 的表达式可按两类情形给出。

对 $t_0=0$ 情形, 有

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i \bar{\mathbf{v}}_i^T) \left[\mathbf{x}_0 e^{\lambda_i t} + \sum_{j=1}^p \mathbf{b}_j \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau \right], \quad t \geq 0 \quad (3.61)$$

或

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n (\bar{\mathbf{w}}_i \mathbf{w}_i^T) \left[\mathbf{x}_0 e^{\lambda_i t} + \sum_{j=1}^p \mathbf{b}_j \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau \right], \quad t \geq 0 \quad (3.62)$$

对 $t_0 \neq 0$ 情形, 有

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i \bar{\mathbf{v}}_i^T) \left[\mathbf{x}_0 e^{\lambda_i(t-t_0)} + \sum_{j=1}^p \mathbf{b}_j \int_{t_0}^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau \right], \quad t \geq t_0 \quad (3.63)$$

或

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n (\bar{\mathbf{w}}_i \mathbf{w}_i^T) \left[\mathbf{x}_0 e^{\lambda_i(t-t_0)} + \sum_{j=1}^p \mathbf{b}_j \int_{t_0}^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau \right], \quad t \geq t_0 \quad (3.64)$$

其中, λ_i 为特征值, $\mathbf{v}_i$ 和 $\mathbf{w}_i^T$ 为 $\mathbf{A}$ 的属于 λ_i 的右和左特征向量, $i=1, 2, \dots, n$, $\mathbf{x}_0$ 为初始状态, $\mathbf{b}_j$ 为 $\mathbf{B}$ 的第 j 个列, u_j 为 $\mathbf{u}$ 的第 j 个分量, $j=1, 2, \dots, p$ 。

由基于特征结构的状态响应关系式,还可导出如下几点推论。

1. 特征值对状态响应的影响

由基于特征结构状态响应关系式可以看出,状态响应的运动模式即函数结构,主要由特征值所决定。对实数特征值,运动模式为指数函数形式;对共轭复数特征值,运动模式为指数正余弦函数形式。若特征值具有负实部,则运动模式随时间单调地或振荡地衰减至稳态过程;若特征值具有正实部,则运动模式随时间单调地或振荡地扩散至无穷大而不能到达稳态。因此,特征值对系统运动行为具有主导性作用。

2. 特征向量对状态响应的影响

基于特征结构状态响应关系式意味着,状态响应可以看成是各个特征值相应运动模式的一个线性组合,特征向量的影响体现于对不同运动模式的“权重”上。特征向量对状态响应的影响本质上属于“量”而非“质”的范畴,即只能影响各个运动模式在组合中的比重,一般不能影响各个运动模式本身。因此,尽管特征向量也对系统运动进程和行为具有影响,但其属性是属于非主导性的。

3. 特征结构在系统分析和综合中的基础性

基于特征结构的状态响应关系式及其推论表明,系统运动行为性能和特征值特征向量具有直接的相关性。这从一个方面说明特征值特征向量将对系统的分析和综合具有重要作用。随后章节中的讨论表明,系统基本特性如稳定性、能控性、能观测性等都和特征值有着直接关系,特征结构特别是特征值也是系统综合的一类重要指标形式。

3.3 连续时间线性时不变系统的状态转移矩阵

不管是初始状态引起的运动,还是输入作用引起的运动,本质上都属于相应状态的一种转移。引入状态转移矩阵有利于使状态响应表达式更为直观地反映这个基本事实。基于状态转移矩阵,还可使线性时不变系统和线性时变系统的状态响应建立形式上统一的表达式。

3.3.1 状态转移矩阵和基本解阵

考虑连续时间线性时不变系统,状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0 \quad (3.65)$$

其中, $\mathbf{x}$ 为 n 维状态, $\mathbf{u}$ 为 p 维输入, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为 $n \times n$ 和 $n \times p$ 常阵。

定义 3.3 [状态转移矩阵] 连续时间线性时不变系统的状态转移矩阵,定义为基于(3.65)构造的矩阵方程

$$\dot{\Phi}(t - t_0) = \mathbf{A}\Phi(t - t_0), \quad \Phi(0) = \mathbf{I}, \quad t \geq t_0 \quad (3.66)$$

的 $n \times n$ 解阵 $\Phi(t - t_0)$ 。

定义 3.4 [基本解阵] 连续时间线性时不变系统的基本解阵, 定义为基于 (3.65) 构造的矩阵方程

$$\dot{\Psi}(t) = A\Psi(t), \quad \Psi(t_0) = H, \quad t \geq t_0 \quad (3.67)$$

的 $n \times n$ 解阵 $\Psi(t)$ 。其中, H 为任意非奇异实常阵。

下面, 就基本解阵和状态转移矩阵的属性和形式作进一步的讨论。

1. 基本解阵的构成和形式

结论 3.14 [基本解阵不唯一性] 对连续时间线性时不变系统的基本解阵方程 (3.67), 由初始常阵 H 的任意性所决定, 基本解阵即解矩阵 $\Psi(t)$ 为不唯一。

结论 3.15 [基本解阵构成] 对连续时间线性时不变系统的基本解阵方程 (3.67), 其一个基本解阵 $\Psi(t)$ 可由系统自治状态方程

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \quad (3.68)$$

的任意 n 个线性无关解为列来构成。

证 对 n 维系统自治状态方程 (3.68), 有且仅有 n 个线性无关解, 表为

$$X(t) = [x_{(1)}(t) \quad x_{(2)}(t) \quad \cdots \quad x_{(n)}(t)], \quad t \geq t_0 \quad (3.69)$$

进而, 由 $x_{(i)}$ 为 (3.68) 的解, 可以导出:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= [\dot{x}_{(1)}(t) \quad \dot{x}_{(2)}(t) \quad \cdots \quad \dot{x}_{(n)}(t)] \\ &= [Ax_{(1)}(t) \quad Ax_{(2)}(t) \quad \cdots \quad Ax_{(n)}(t)] \\ &= AX(t), \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

和

$$X(t_0) = [x_{(1)}(t_0) \quad x_{(2)}(t_0) \quad \cdots \quad x_{(n)}(t_0)] = H \text{ (非奇异)} \quad (3.71)$$

表明, 式 (3.69) 的 $X(t)$ 为满足基本解阵方程和初始条件的 $n \times n$ 解阵。证明完成。

结论 3.16 [基本解阵形式] 对连续时间线性时不变系统的基本解阵方程 (3.67), 一个基本解阵 $\Psi(t)$ 具有形式:

$$\Psi(t) = e^{At}, \quad t \geq t_0 \quad (3.72)$$

2. 状态转移矩阵和基本解阵的关系

结论 3.17 [状态转移矩阵] 对连续时间线性时不变系统的状态转移矩阵方程 (3.66), 其解阵即状态转移矩阵 $\Phi(t-t_0)$ 可由基本解阵 $\Psi(t)$ 定出:

$$\Phi(t-t_0) = \Psi(t) \Psi^{-1}(t_0), \quad t \geq t_0 \quad (3.73)$$

3. 状态转移矩阵的唯一性

结论 3.18 [状态转移矩阵的唯一性] 对连续时间线性时不变系统的状态转移矩阵方程 (3.66), 其解阵即状态转移矩阵 $\Phi(t-t_0)$ 为唯一。并且, 在运用式 (3.73) 确定 $\Phi(t-t_0)$ 时, 与所选择基本解阵 $\Psi(t)$ 无关。

4. 状态转移矩阵的形式

结论 3.19 [状态转移矩阵形式] 对连续时间线性时不变系统的状态转移矩阵方程(3.66),其解阵即状态转移矩阵 $\Phi(t-t_0)$ 的形式可按两种情形给出:

对 $t_0 \neq 0$ 情形,有

$$\Phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}, \quad t \geq t_0 \quad (3.74)$$

对 $t_0 = 0$ 情形,有

$$\Phi(t) = e^{At}, \quad t \geq 0 \quad (3.75)$$

3.3.2 基于状态转移矩阵的系统响应表达式

本部分讨论系统状态响应基于状态转移矩阵的表达式。

下面,基于状态转移矩阵的形式(3.74)和(3.75),直接给出相应的一些结论。

结论 3.20 [零输入响应] 对连续时间线性时不变系统(3.65),基于状态转移矩阵的零输入响应关系式可按两种情形给出:

对 $t_0 \neq 0$ 情形,有

$$\mathbf{x}_{0u}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0 \quad (3.76)$$

对 $t_0 = 0$ 情形,有

$$\mathbf{x}_{0u}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0, \quad t \geq 0 \quad (3.77)$$

结论 3.21 [零初态响应] 对连续时间线性时不变系统(3.65),基于状态转移矩阵的零初态响应关系式可按两种情形给出:

对 $t_0 \neq 0$ 情形,有

$$\mathbf{x}_{0x}(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (3.78)$$

对 $t_0 = 0$ 情形,有

$$\mathbf{x}_{0x}(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (3.79)$$

结论 3.22 [状态运动规律] 对连续时间线性时不变系统(3.65),基于状态转移矩阵的状态运动规律关系式可按两种情形给出:

对 $t_0 \neq 0$ 情形,有

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (3.80)$$

对 $t_0 = 0$ 情形,有

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (3.81)$$

基于对状态转移矩阵含义的直观理解,零输入响应是状态空间中从初始状态点 $\mathbf{x}_0$ 出发并由 $\mathbf{x}_0$ 经状态转移矩阵在各个时刻转移点构成的一条轨迹,零初态响应是状态空间中从原点 $\mathbf{0}$ 出发并由各个时刻输入作用等价状态经状态转移矩阵在相应时

刻转移点构成的一条轨迹,整个状态运动为状态空间中由零输入响应和零初态响应叠加构成的一条轨迹。并且,轨迹的基本特征由状态转移矩阵所决定。

3.3.3 状态转移矩阵的特性

最后,在行将结束讨论状态转移矩阵之际,基于状态转移矩阵的基本关系式和方程,进一步给出状态转移矩阵 $\Phi(t-t_0)$ 的一些常用基本性质。

(1) 状态转移矩阵的初始阵。由式(3.73)并取 $t=t_0$,即得

$$\Phi(0) = \Phi(t_0 - t_0) = \Psi(t_0) \Psi^{-1}(t_0) = I$$

(2) 状态转移矩阵的逆。由式(3.73),并考虑到基本矩阵的可逆性,即得

$$\Phi^{-1}(t-t_0) = [\Psi(t) \Psi^{-1}(t_0)]^{-1} = \Psi(t_0) \Psi^{-1}(t) = \Phi(t_0-t)$$

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi^{-1}(t-0) = \Phi(0-t) = \Phi(-t)$$

(3) 状态转移矩阵的传递性。由式(3.73),即得

$$\begin{aligned} \Phi(t_2-t_1) \Phi(t_1-t_0) &= \Psi(t_2) \Psi^{-1}(t_1) \cdot \Psi(t_1) \Psi^{-1}(t_0) \\ &= \Psi(t_2) \Psi^{-1}(t_0) = \Phi(t_2-t_0) \end{aligned}$$

(4) 时间变量为独立变量和的状态转移矩阵。由状态转移矩阵的传递性,即得

$$\Phi(t_2+t_1) = \Phi(t_2-(-t_1)) = \Phi(t_2-0) \Phi(0-(-t_1)) = \Phi(t_2) \Phi(t_1)$$

(5) 时间变量数乘的状态转移矩阵。由时间变量为独立变量和的状态转移矩阵属性,即得

$$\Phi(mt) = \Phi\left(\sum_{i=1}^m t\right) = \prod_{i=1}^m \Phi(t) = [\Phi(t)]^m$$

(6) 状态转移矩阵对时间的求导。由状态转移矩阵方程,并考虑到矩阵 A 和状态转移矩阵 $\Phi(t-t_0)=e^{A(t-t_0)}$ 的可交换性,即得

$$\frac{d}{dt} \Phi(t-t_0) = A \Phi(t-t_0) = \Phi(t-t_0) A$$

(7) 状态转移矩阵逆对时间的求导。由式(3.66),并利用 $\Phi^{-1}(t-t_0) = \Phi(t_0-t)$,以及 A 和 $\Phi(t_0-t)=e^{A(t_0-t)}$ 的可交换性,即得

$$\frac{d}{dt} \Phi^{-1}(t-t_0) = \frac{d}{dt} \Phi(t_0-t) = -A \Phi(t_0-t) = -\Phi(t_0-t) A$$

3.4 连续时间线性时不变系统的脉冲响应矩阵

脉冲响应矩阵和传递函数矩阵一样也是线性时不变系统一个基本特性。脉冲响应矩阵是从时间域角度表征系统的输出输入关系。本节首先引入脉冲响应矩阵的概念和特性,在此基础上讨论脉冲响应矩阵和系统的状态空间描述及传递函数矩阵间的关系。

3.4.1 脉冲响应矩阵

先来讨论单输入单输出连续时间线性时不变系统的脉冲响应。下面,给出单位脉冲和脉冲响应的定义。

定义 3.5 [单位脉冲] 表 t 为时间自变量, $\delta(t-\tau)$ 是作用时刻为 τ 的单位脉冲, 则 $\delta(t-\tau)$ 定义为满足如下关系的广义函数:

$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau \\ \infty, & t = \tau \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \delta(t-\tau) dt = 1 \quad (3.82)$$

注 单位脉冲 $\delta(t-\tau)$ 是多种形状现实脉冲的一个极限函数。一个作用于时刻 τ 的“宽度为 ϵ ”和“高度为 $1/\epsilon$ ”的矩形脉冲当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时的极限函数就为单位脉冲 $\delta(t-\tau)$ 。

定义 3.6 [脉冲响应] 对单输入单输出连续时间线性时不变系统

脉冲响应 $\triangleq$ 零初始状态下以单位脉冲为输入的系统输出响应

表对应于单位脉冲 $\delta(t-\tau)$ 的系统脉冲响应为 $h(t-\tau)$ 。其中,由系统满足因果性和假设初始状态为零决定, $h(t-\tau)$ 具有属性:

$$h(t-\tau) = 0, \quad \forall \tau \text{ 和 } \forall t < \tau \quad (3.83)$$

基于脉冲响应可来计算系统在任意输入 u 作用下的输出响应。对此,可以导出如下的一个结论。

结论 3.23 [输出响应] 对单输入单输出连续时间线性时不变系统,假设系统的初始状态为零,则系统在任意输入 u 作用下基于脉冲响应的输出响应 $y(t)$ 的关系式为

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (3.84)$$

或

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(\tau) u(t-\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (3.85)$$

其中,可取初始时间为 $t_0 \neq 0$ 或 $t_0 = 0$ 。

下面,推广讨论多输入多输出连续时间线性时不变系统,输入维数为 p 和输出维数为 q ,且设系统初始状态为零。再表 $h_{ij}(t-\tau)$ 为,第 j 个输入端在时刻 τ 加以单位脉冲 $\delta(t-\tau)$ 而所有其他输入端的输入取为零时,第 i 个输出端在时刻 t 的脉冲响应。那么,基此可以给出脉冲响应矩阵的定义。

定义 3.7 [脉冲响应矩阵] 对 p 维输入 q 维输出连续时间线性时不变系统,脉冲响应矩阵定义为零初始状态条件下以脉冲响应 $h_{ij}(t-\tau) (i=1,2,\dots,q, j=1,2,\dots,p)$ 为元构成的一个 $q \times p$ 输出响应矩阵:

$$\mathbf{H}(t-\tau) = \begin{bmatrix} h_{11}(t-\tau) & h_{12}(t-\tau) & \cdots & h_{1p}(t-\tau) \\ h_{21}(t-\tau) & h_{22}(t-\tau) & \cdots & h_{2p}(t-\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{q1}(t-\tau) & h_{q2}(t-\tau) & \cdots & h_{qp}(t-\tau) \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

其中,由系统满足因果性和假设初始状态为零所决定,脉冲响应矩阵 $\mathbf{H}(t-\tau)$ 具有属性:

$$\mathbf{H}(t-\tau)=\mathbf{0}, \quad \forall \tau \text{ 和 } \forall t < \tau \quad (3.87)$$

进而,基于脉冲响应矩阵可来计算系统在任意输入 $\mathbf{u}$ 作用下的输出响应。相应地,可以直接导出如下的一个结论。

结论 3.24 [输出响应] 对 p 维输入 q 维输出连续时间线性时不变系统,假设初始状态为零,则系统在任意输入 $\mathbf{u}$ 作用下基于脉冲响应矩阵的输出响应 $\mathbf{y}(t)$ 的关系式为

$$\mathbf{y}(t)=\int_{t_0}^t \mathbf{H}(t-\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (3.88)$$

或

$$\mathbf{y}(t)=\int_{t_0}^t \mathbf{H}(\tau) \mathbf{u}(t-\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (3.89)$$

其中,可取初始时间为 $t_0 \neq 0$ 或 $t_0=0$ 。

3.4.2 脉冲响应矩阵和状态空间描述

这一部分讨论脉冲响应矩阵和状态空间描述间的关系。在此基础上,进而导出相关的一些基本属性。考虑连续时间线性时不变系统,状态空间描述为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.90)$$

其中, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 分别为 $n \times n, n \times p, q \times n$ 和 $q \times p$ 的实常阵。

结论 3.25 [脉冲响应矩阵] 对连续时间线性时不变系统(3.90),设初始状态为零即 $\mathbf{x}_0=\mathbf{0}$,则系统脉冲响应矩阵基于状态空间描述的表达式为

$$\mathbf{H}(t-\tau)=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}+\mathbf{D}\delta(t-\tau) \quad (3.91)$$

或

$$\mathbf{H}(t)=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}+\mathbf{D}\delta(t) \quad (3.92)$$

证 对状态空间描述(3.90),基于状态解表达式和输出方程,得到

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau+\mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (3.93)$$

进而,将上式中表 $\mathbf{D}\mathbf{u}(t)=\int_{t_0}^t \mathbf{D}\delta(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$, 并利用假定 $\mathbf{x}_0=\mathbf{0}$, 可以导出

$$\mathbf{y}(t)=\int_{t_0}^t [\mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}+\mathbf{D}\delta(t-\tau)]\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (3.94)$$

从而,比较式(3.94)和基于脉冲响应矩阵输出响应关系式(3.88),即可证得

$$\mathbf{H}(t-\tau)=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}+\mathbf{D}\delta(t-\tau) \quad (3.95)$$

将上式作变量置换 $t=t-\tau$, 又可证得

$$\mathbf{H}(t)=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}+\mathbf{D}\delta(t) \quad (3.96)$$

结论 3.26 [脉冲响应矩阵] 对连续时间线性时不变系统(3.90),设初始状态为

零即 $x_0 = \mathbf{0}$, 表 $\Phi(t - \tau)$ 为系统状态转移矩阵, 则系统脉冲响应矩阵基于状态空间描述的表达式为

$$\mathbf{H}(t - \tau) = \mathbf{C}\Phi(t - \tau)\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t - \tau) \quad (3.97)$$

或

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t) \quad (3.98)$$

证 对线性时不变系统, 有 $\Phi(t - \tau) = e^{\mathbf{A}(t - \tau)}$ 和 $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$ 。基此, 可由式(3.91)和式(3.92)立即导出式(3.97)和式(3.98)。证明完成。

结论 3.27 [代数等价系统的脉冲响应矩阵] 两个代数等价的连续时间线性时不变系统具有相同脉冲响应矩阵。

结论 3.28 [代数等价系统的输出响应] 两个代数等价的连续时间线性时不变系统具有相同的“输出零状态响应”和“输出零输入响应”。

3.4.3 脉冲响应矩阵和传递函数矩阵

这一部分进一步讨论脉冲响应矩阵和传递函数矩阵的关系。对此, 给出如下的两个结论。

结论 3.29 [脉冲响应矩阵和传递函数矩阵] 对连续时间线性时不变系统(3.90), 表 $\mathbf{H}(t)$ 和 $\mathbf{G}(s)$ 为系统的脉冲响应矩阵和传递函数矩阵, 则两者具有如下的关系:

$$\mathbf{G}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{H}(t)], \quad t \geq 0 \quad (3.99)$$

和

$$\mathbf{H}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{G}(s)], \quad t \geq 0 \quad (3.100)$$

证 由脉冲响应矩阵基本关系式:

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t) \quad (3.101)$$

再考虑到

$$\mathcal{L}[e^{\mathbf{A}t}] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}, \quad \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (3.102)$$

其中, 已注意到将拉普拉斯变换积分下限取为 0^- , 以使变换积分包含 $\delta(t)$ 。于是, 对(3.101)取拉普拉斯变换, 即可证得

$$\mathcal{L}[\mathbf{H}(t)] = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{G}(s) \quad (3.103)$$

进而, 对(3.103)取拉普拉斯反变换, 又可证得

$$\mathbf{H}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{G}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}] = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t) \quad (3.104)$$

结论 3.30 [脉冲响应矩阵等同条件] 给定两个连续时间线性时不变系统 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 和 $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{D}})$, 两者具有相同输入维数和输出维数, 但状态维数可不相同。则两个系统具有相同脉冲响应矩阵即相同传递函数矩阵, 当且仅当两者参数矩阵间成立如下关系式:

$$\mathbf{D} = \bar{\mathbf{D}} \quad (3.105)$$

和

$$\mathbf{C}\mathbf{A}^i\mathbf{B} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^i\bar{\mathbf{B}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.106)$$

3.5 连续时间线性时变系统的运动分析

线性时变系统的运动不管是规律形态还是分析方法都要复杂得多。但运动规律表达式形式上十分类似于线性时不变系统。本节主要内容包括状态转移矩阵、状态运动响应、脉冲响应矩阵,以及一类周期性线性时变系统的运动分析等。

3.5.1 状态转移矩阵

考虑连续时间线性时变系统,状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.107)$$

其中, $\mathbf{x}$ 为 n 维状态, $\mathbf{u}$ 为 p 维输入, $\mathbf{A}(t)$ 和 $\mathbf{B}(t)$ 分别为 $n \times n$ 和 $n \times p$ 时变实值矩阵。

下面,首先给出状态转移矩阵和基本解阵的定义。

定义 3.8 [状态转移矩阵] 对连续时间线性时变系统,表 t_0 为初始时刻, t 为观测时刻,则状态转移矩阵定义为基于式(3.107)构造的矩阵方程

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.108)$$

的 $n \times n$ 解矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 。

定义 3.9 [基本解阵] 对连续时间线性时变系统,表 t_0 为初始时刻, t 为观测时刻,则基本解阵定义为基于式(3.107)构造的矩阵方程

$$\dot{\Psi}(t) = \mathbf{A}(t) \Psi(t), \quad \Psi(t_0) = \mathbf{H}, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.109)$$

的 $n \times n$ 解矩阵 $\Psi(t)$ 。其中, $\mathbf{H}$ 为任意非奇异实常值矩阵。

进而,讨论基本解阵和状态转移矩阵的属性和形式,并不加证明地表为相应的一些结论。

1. 基本解阵的构成

结论 3.31 [基本解阵不唯一性] 对连续时间线性时变系统(3.107),由矩阵 $\mathbf{H}$ 为任意非奇异实常阵决定,其基本解阵即矩阵方程(3.109)解阵 $\Psi(t)$ 为不唯一。

结论 3.32 [基本解阵构成] 对连续时间线性时变系统(3.107),其一个基本解阵即矩阵方程(3.109)的一个解阵 $\Psi(t)$,可由系统自治状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.110)$$

的任意 n 个线性无关解为列构成。

结论 3.33 [基本解阵形式] 对连续时间线性时变系统(3.107),其一个基本解阵即矩阵方程(3.109)的一个解阵 $\Psi(t)$ 具有如下形式:

$$\Psi(t) = \Phi(t, t_0) \Psi(t_0), \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.111)$$

2. 状态转移矩阵和基本解阵的关系

结论 3.34 [状态转移矩阵] 对连续时间线性时变系统(3.107),其状态转移矩

阵即矩阵方程(3.108)解阵 $\Phi(t, t_0)$ 基于基本解阵 $\Psi(t)$ 的关系式为

$$\Phi(t, t_0) = \Psi(t) \Psi^{-1}(t_0), \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.112)$$

3. 状态转移矩阵的唯一性

结论 3.35 [状态转移矩阵的唯一性] 对连续时间线性时变系统(3.107), 其状态转移矩阵即矩阵方程(3.108)的解阵 $\Phi(t, t_0)$ 为唯一。并且, 在运用方程(3.112)确定 $\Phi(t, t_0)$ 时, 与选取的基本解阵 $\Psi(t)$ 无关。

4. 状态转移矩阵的形式

结论 3.36 [状态转移矩阵形式] 对连续时间线性时变系统(3.107), 其状态转移矩阵即矩阵方程(3.108)的解阵 $\Phi(t, t_0)$ 具有形式:

$$\Phi(t, t_0) = I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \left[\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 \right] d\tau_1 + \cdots$$

$$t \in [t_0, t_a] \quad (3.113)$$

5. 线性时变系统和线性时不变系统在状态转移矩阵上的区别

对线性时变系统和线性时不变系统, 由比较状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 和 $\Phi(t - t_0)$ 的符号和形式可以看出, 基本区别表现在两个方面。一是, 线性时变系统状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 依赖于“绝对时间”, 随初始时刻 t_0 选择不同具有不同结果; 线性时不变系统状态转移矩阵 $\Phi(t - t_0)$ 依赖于“相对时间”, 随初始时刻 t_0 选择不同具有相同结果。二是, 对线性时不变系统, 可以定出状态转移矩阵 $\Phi(t - t_0)$ 的闭合形式表达式; 对线性时变系统, 除极为特殊类型和简单情形外, 状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 一般难以求得闭合形式表达式。

在基本关系式(3.112)和(3.113)的基础上, 现来给出线性时变系统状态转移矩阵的一些基本性质。

(1) 状态转移矩阵的初始阵。在式(3.112)中令 $t_0 = t, t \in [t_0, t_a]$ 为任意, 即得

$$\Phi(t, t) = \Psi(t) \Psi^{-1}(t) = I \quad (3.114)$$

(2) 状态转移矩阵的逆。由式(3.112), 并利用乘积矩阵求逆公式, 即得

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = [\Psi(t) \Psi^{-1}(t_0)]^{-1} = \Psi^{-1}(t_0) \Psi(t) = \Phi(t_0, t) \quad (3.115)$$

(3) 状态转移矩阵的传递性。由式(3.112), 即得

$$\begin{aligned} \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) &= \Psi(t_2) \Psi^{-1}(t_1) \cdot \Psi(t_1) \Psi^{-1}(t_0) \\ &= \Psi(t_2) \Psi^{-1}(t_0) = \Phi(t_2, t_0) \end{aligned} \quad (3.116)$$

(4) 状态转移矩阵逆求导。由 $\Phi(t, t_0) \Phi^{-1}(t, t_0) = I$ 和 $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$, 得

$$\frac{d}{dt} \Phi^{-1}(t, t_0) = -\frac{d}{dt} \Phi(t_0, t) = -\Phi(t_0, t) A(t) \quad (3.117)$$

3.5.2 系统的状态响应

考虑连续时间线性时变系统,状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.118)$$

其中, $\mathbf{x}$ 为 n 维状态, $\mathbf{u}$ 为 p 维输入, $\mathbf{A}(t)$ 和 $\mathbf{B}(t)$ 为 $n \times n$ 和 $n \times p$ 的时变实值矩阵。

下面,基于系统状态转移矩阵,导出线性时变系统状态运动规律的关系式。

结论 3.37 [状态响应] 对连续时间线性时变系统,状态运动即状态方程(3.118)解基于状态转移矩阵的表达式为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.119)$$

其中, $\Phi(t, \cdot)$ 为系统状态转移矩阵。

证 线性时变系统同样满足叠加原理,类似于线性时不变系统那样,把系统运动表为“初始状态 $\mathbf{x}_0$ 转移项”与“输入作用等价状态 $\xi(t)$ 转移项”之和,有

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t, t_0)\xi(t) = \Phi(t, t_0)[\mathbf{x}_0 + \xi(t)] \quad (3.120)$$

由要求 $\mathbf{x}(t)$ 满足式(3.118)的初始条件,还可导出

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) = \Phi(t_0, t_0)[\mathbf{x}_0 + \xi(t_0)] = \mathbf{x}_0 + \xi(t_0) \quad (3.121)$$

据此,可以定出等价状态 $\xi(t)$ 的初态:

$$\xi(t_0) = \mathbf{0} \quad (3.122)$$

再由要求 $\mathbf{x}(t)$ 满足方程(3.118),又可得到

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} &= \dot{\mathbf{x}} = \dot{\Phi}(t, t_0)[\mathbf{x}_0 + \xi(t)] + \Phi(t, t_0)\dot{\xi}(t) \\ &= \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0)[\mathbf{x}_0 + \xi(t)] + \Phi(t, t_0)\dot{\xi}(t) \\ &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \Phi(t, t_0)\dot{\xi}(t) \end{aligned} \quad (3.123)$$

据此,可以导出

$$\Phi(t, t_0)\dot{\xi}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (3.124)$$

或

$$\dot{\xi}(t) = \Phi(t_0, t)\mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (3.125)$$

上式中将时间符号以 τ 代替 t , 并从 t_0 到 t 取积分,则由 $\xi(t_0) = \mathbf{0}$ 得到等价状态 $\xi(t)$ 为

$$\xi(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (3.126)$$

将式(3.126)代入式(3.120),证得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ &= \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0, t_a] \end{aligned} \quad (3.127)$$

进一步,基于关系式(3.119),还可对连续时间线性时变系统的运动性质导出如

下的几点推论。

1. 零输入响应和零初态响应

由运动关系式(3.119)看出,线性时变系统的状态运动 $\mathbf{x}(t)$ 由零输入响应 $\mathbf{x}_{0u}$ 和零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}$ 叠加组成。 $\mathbf{x}_{0u}$ 和 $\mathbf{x}_{0x}$ 基于状态转移矩阵的表达式,分别为

$$\mathbf{x}_{0u}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.128)$$

和

$$\mathbf{x}_{0x}(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.129)$$

2. 状态运动计算上的困难性

由运动关系式(3.119)看出,一旦定出状态转移矩阵 $\Phi(t, \tau)$, 则线性时变系统状态运动 $\mathbf{x}(t)$ 就可通过计算得到。除极为简单情况外,一般难以确定 $\Phi(t, \tau)$ 的解析表达式,关系式(3.119)的意义主要在于理论分析中的应用。现今,对线性时变系统状态运动通常采用数值方法进行求解,且已有专门的求解程序。

3. 线性系统状态运动表达式在形式上的统一性

前已导出,对线性时不变系统,状态运动的关系式为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (3.130)$$

对线性时变系统,状态运动的关系式为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.131)$$

比较(3.130)和(3.131)可以看出,两者运动规律表达式的形式类同,区别仅在于时不变系统表达式中“ $-$ ”在时变系统表达式中代之以“ $,$ ”。表达形式的这种统一性为理论研究提供了方便性。表达形式的这种区别则反映了一个基本物理事实,即时变系统运动形态对初始时刻 t_0 的选取具有直接依赖关系,时不变系统的运动形态和初始时刻 t_0 没有直接关系。

例 3.3 给定连续时间线性时变系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad t_0 = 1, \quad t \in [1, 10]$$

其中, u 为作用于时刻 $\tau=1$ 的单位阶跃函数 $1(t-1)$ 。

首先,定出系统状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 。为此,求解系统自治状态方程组

$$\dot{x}_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = tx_1$$

得到

$$x_1(t) = x_1(t_0)$$

$$x_2(t) = 0.5x_1(t_0)t^2 - 0.5x_1(t_0)t_0^2 + x_2(t_0)$$

再任取两组线性无关初始状态变量:

$$x_1(t_0) = 0, \quad x_2(t_0) = 1$$

$$x_1(t_0) = 2, \quad x_2(t_0) = 0$$

以导出两个线性无关解:

$$\mathbf{x}_{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ t^2 - t_0^2 \end{bmatrix}$$

基此,得到系统的一个基本解阵:

$$\Psi(t) = [\mathbf{x}_{(1)} \quad \mathbf{x}_{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 - t_0^2 \end{bmatrix}$$

于是,利用关系式(3.112),即可定出状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$:

$$\Phi(t, t_0) = \Psi(t) \Psi^{-1}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 - t_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5t^2 - 0.5t_0^2 & 1 \end{bmatrix}$$

进而,确定系统运动规律。为此,基于状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 结果和系统运动基本关系式(3.119),并利用给定 $t_0=1, \mathbf{x}(1)=\mathbf{x}_0=[1 \quad 2]^T$ 和 $u(t)=1(t-1)$,即可定出:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5t^2 - 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \int_1^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5t^2 - 0.5\tau^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5t^2 + 1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t-1 \\ \frac{1}{3}t^3 - 0.5t^2 + t - \frac{5}{6} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t \\ \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad t \in [1, 10] \end{aligned}$$

3.5.3 脉冲响应矩阵

考虑零初始状态的连续时间线性时变系统,状态空间描述为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}, \quad t \in [t_0, t_a] \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.132)$$

对线性时变系统,如同状态转移矩阵那样,脉冲响应矩阵的符号表示对应地采用 $\mathbf{H}(t, \tau)$ 。通过与时不变系统类同推导,可导出如下的两个结论。

结论 3.38 [脉冲响应矩阵] 对零初始状态即 $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{0}$ 连续时间线性时变系统(3.132),脉冲响应矩阵基于状态空间描述的表达式为

$$\mathbf{H}(t, \tau) = \mathbf{C}(t) \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) + \mathbf{D}(t) \delta(t - \tau) \quad (3.133)$$

其中, $\Phi(t, \tau)$ 为状态转移矩阵, $\delta(t - \tau)$ 是作用点为 τ 的单位脉冲。

结论 3.39 [输出响应] 对零初始状态即 $x(t_0) = 0$ 的连续时间线性时变系统 (3.132), 取 u 为任意输入, 则输出响应 $y(t)$ 基于脉冲响应矩阵的表达式为

$$y(t) = \int_{t_0}^t H(t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.134)$$

3.5.4 $A(t)$ 为周期阵的线性时变系统的状态运动分析

本部分讨论一类特殊形式连续时间线性时变系统。系统状态空间描述为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned} \quad (3.135)$$

其中, x 为 n 维状态, u 为 p 维输入, y 为 q 维输出, $n \times n$ 系统矩阵 $A(t)$ 是以 T 为周期的周期性矩阵, 即满足如下属性:

$$A(t) = A(t + T), \quad \forall t \quad (3.136)$$

下面, 针对这类特殊形式线性时变系统, 分析和讨论系统运动响应的一些有关属性。

1. 基本解阵的属性

结论 3.40 [基本解阵属性] 对 $A(t)$ 为周期性矩阵即满足 $A(t) = A(t + T)$ 的线性时变系统 (3.135), 若 $\Psi(t)$ 为自治状态方程 $\dot{x} = A(t)x$ 的一个基本解阵, 则 $\Psi(t + T)$ 必也为它的一个基本解阵。

结论 3.41 [基本解阵属性] 对 $A(t)$ 为周期性矩阵即满足 $A(t) = A(t + T)$ 的线性时变系统 (3.135), 若 $\Psi(t)$ 和 $\Psi(t + T)$ 均为系统自治状态方程 $\dot{x} = A(t)x$ 的基本解阵, 则必存在一个常值矩阵 $\bar{A}$ 使下式成立:

$$\Psi(t + T) = \Psi(t) e^{\bar{A}T} \quad (3.137)$$

2. 周期性矩阵 $A(t)$ 在李雅普诺夫变换下的属性

定义 3.10 [李雅普诺夫变换] 对 $A(t)$ 为周期性矩阵即满足 $A(t) = A(t + T)$ 的线性时变系统 (3.135), 引入 n 维变换矩阵 $P(t)$, $P(t)$ 和 $\dot{P}(t)$ 在 $[t_0, \infty)$ 上为连续和有界, 并存在有限实常数 η 使下式成立:

$$|\det P(t)| > \eta > 0, \quad \forall \text{ 所有 } t \geq t_0 \quad (3.138)$$

基此, 取变换 $\bar{x} = P(t)x$ 使系统 (3.135) 变换为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}(t)\bar{x} + \bar{B}(t)u \\ y &= \bar{C}(t)\bar{x} + \bar{D}(t)u \end{aligned} \quad (3.139)$$

其中

$$\bar{A}(t) = P(t)A(t)P^{-1}(t) + \dot{P}(t)P^{-1}(t)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{B}}(t) &= \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t) \\
 \bar{\mathbf{C}}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{P}^{-1}(t) \\
 \bar{\mathbf{D}}(t) &= \mathbf{D}(t)
 \end{aligned} \tag{3.140}$$

则称 $\{\bar{\mathbf{A}}(t), \bar{\mathbf{B}}(t), \bar{\mathbf{C}}(t), \bar{\mathbf{D}}(t)\}$ 为 $\{\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)\}$ 的李雅普诺夫变换。

注 对所讨论的 $\mathbf{A}(t)$ 为周期性矩阵的线性时变系统,李雅普诺夫变换不改变系统的稳定性,而一般等价变换不能保证这一点。

结论 3.42 [周期性时变系统属性] 对 $\mathbf{A}(t)$ 为周期性矩阵即满足 $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t+T)$ 的线性时变系统(3.135),必存在一个 n 维常值矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 以构成变换矩阵:

$$\mathbf{P}(t) = e^{\bar{\mathbf{A}}t} \boldsymbol{\Psi}^{-1}(t) \tag{3.141}$$

$\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为系统的一个基本解阵,使系统在李雅普诺夫变换 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ 下的状态空间描述为

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + [\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)]\mathbf{u} \\
 \mathbf{y} &= [\mathbf{C}(t)\mathbf{P}^{-1}(t)]\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{3.142}$$

其中,变换后的系统矩阵为常阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 。

证 据李雅普诺夫变换下的系数矩阵关系式(3.140),并利用 $\mathbf{P}(t) = e^{\bar{\mathbf{A}}t} \boldsymbol{\Psi}^{-1}(t)$ 和基本解阵的性质,即可证得

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{A}}(t) &= [\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \dot{\mathbf{P}}(t)]\mathbf{P}^{-1}(t) \\
 &= [e^{\bar{\mathbf{A}}t} \boldsymbol{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{A}(t) + \bar{\mathbf{A}}e^{\bar{\mathbf{A}}t} \boldsymbol{\Psi}^{-1}(t) + e^{\bar{\mathbf{A}}t} \dot{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}(t)] \boldsymbol{\Psi}(t) e^{-\bar{\mathbf{A}}t} \\
 &= \bar{\mathbf{A}} + [e^{\bar{\mathbf{A}}t} \boldsymbol{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{A}(t) - e^{\bar{\mathbf{A}}t} \boldsymbol{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{A}(t)] \boldsymbol{\Psi}(t) e^{-\bar{\mathbf{A}}t} \\
 &= \bar{\mathbf{A}}
 \end{aligned} \tag{3.143}$$

注 1 对上述结论中由式(3.141)定义的变换矩阵 $\mathbf{P}(t)$,利用线性周期性时变系统基本解阵的属性式(3.137),可以导出

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(t+T) &= e^{\bar{\mathbf{A}}(t+T)} \boldsymbol{\Psi}^{-1}(t+T) = e^{\bar{\mathbf{A}}t} e^{\bar{\mathbf{A}}T} e^{-\bar{\mathbf{A}}T} \boldsymbol{\Psi}^{-1}(t) \\
 &= e^{\bar{\mathbf{A}}t} \boldsymbol{\Psi}^{-1}(t) = \mathbf{P}(t)
 \end{aligned} \tag{3.144}$$

表明 $\mathbf{P}(t)$ 为周期矩阵,从而 $\mathbf{P}(t)$ 满足有界性。再由矩阵 $\mathbf{P}(t)$ 的形式(3.141)知, $\mathbf{P}(t)$ 和 $\dot{\mathbf{P}}(t)$ 满足连续性。因此,上述结论中引入的变换为李雅普诺夫变换。

注 2 上述结论的意义在于,基于李雅普诺夫变换不改变系统稳定性的属性可进而给出一个重要的推论,即线性周期性时变系统(3.135)的稳定性必同于对应线性时不变系统(3.142)。这是这类特殊线性时变系统的一个重要属性。

3.6 连续时间线性系统的时间离散化

本节在系统状态运动关系式基础上讨论连续时间线性系统的时间离散化问题。随着计算机在系统分析和控制中的广泛应用,时间离散化问题已经变得愈来愈突出。这从一个侧面反映了现代线性系统控制理论的时代特征。

3.6.1 问题的提出

无论是采用数字计算机分析连续时间系统运动行为,还是采用离散控制装置控制连续时间受控系统,都会遇到把连续时间系统化为等价离散时间系统的问题。通常,称这类问题为连续时间系统的时间离散化。

连续时间系统时间离散化的一类典型情形如图 3.2 所示。图 3.2(a) 给出时间离散化系统的构成,其在组成上具有如下的一些特点。

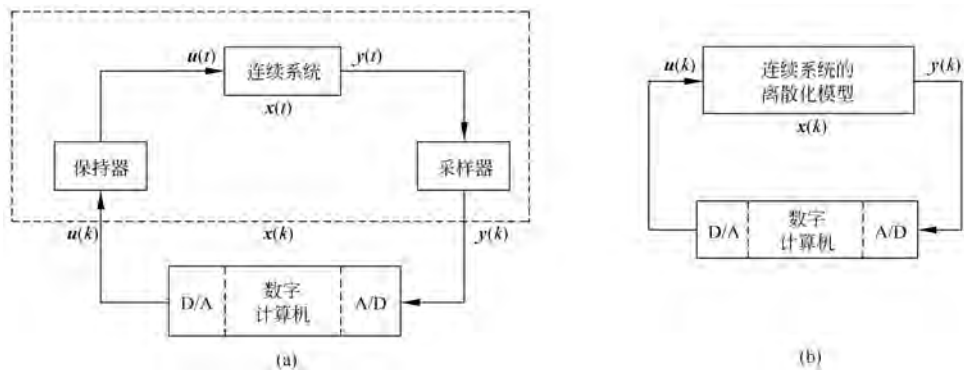


图 3.2 连续时间系统时间离散化的一类典型情形

(i) 受控对象为连续时间系统。受控对象的状态 $x(t)$ 、输入 $u(t)$ 和输出 $y(t)$ 均为连续时间 t 的向量函数。

(ii) 控制装置为离散时间系统。控制装置由“数字量/模拟量转换装置”(D/A)、“数字计算机”和“模拟量/数字量转换装置”(A/D)构成。对控制装置,输入为受控对象输出 $y(t)$ 的时间离散化向量 $y(k)$,输出为受控对象输入 $u(t)$ 的时间离散化向量 $u(k)$,离散时间序列取为 $k=0,1,2,\dots$ 。

(iii) 通过“采样器”和“保持器”以连接连续时间受控对象和离散时间控制装置使系统实现协调运行。采样器的作用是把连续时间变量 $y(t)$ 转换为离散时间变量 $y(k)$ 。典型的采样器为周期性动作的采样开关,开关接通时将变量输入,开关断开时将变量阻断。保持器的作用是把离散时间变量 $u(k)$ 转换为连续时间变量 $u(t)$ 。典型的保持器为由电子元件组成的保持电路,按其保持函数类型可区分为零阶保持器、一阶保持器、二阶保持器等。

(iv) 由“保持器-连续时间系统-采样器”组成连续时间受控对象的时间离散化系统。时间离散化系统在结构上就为图中用虚线框出的一个整体。若表 $x(k)$ 为离散时间状态向量,则时间离散化系统的状态空间描述即为以 $x(k)$ 、 $u(k)$ 和 $y(k)$ 为变量的离散时间系统。实质上,离散控制装置面对的正是时间离散化模型,图 3.2(b) 给出其直观示意图。

由上述讨论可知,所谓连续时间线性系统的时间离散化问题,就是基于一定的

采样方式和保持方式,由系统的连续时间状态空间描述导出相应的离散时间状态空间描述,并对两者的系数矩阵建立对应的关系式。

3.6.2 基本约定

对连续时间线性系统的时间离散化系统,随采样方式和保持方式的不同,通常其状态空间描述也为不同。为使系统的时间离散化状态空间描述具有简单形式,并使离散化变量在原理上是可复原的,进一步需要对采样方式和保持方式引入如下的3个基本约定。

(i) 对采样方式的约定。采样器的采样方式取为以常数 T 为周期的等间隔采样,并表采样瞬时为 $t_k = kT, k=0,1,2,\dots$ 。进而,假定采样时间宽度 Δ 比之采样周期 T 小得多,即有 $\Delta \ll T$,因而分析中可将其视为零处理。由此,若表 $\mathbf{y}(t)$ 和 $\mathbf{y}(k)$ 为采样器的连续输入和离散输出,则在上述约定下两者具有如下关系:

$$\mathbf{y}(k) = \begin{cases} \mathbf{y}(t), & t = kT \\ \mathbf{0}, & t \neq kT \end{cases} \quad (3.145)$$

其中, $k=0,1,2,\dots$ 。图 3.3 给出这种采样方式的示意图,其中 $y_i(t)$ 和 $y_i(k)$ 分别为向量 $\mathbf{y}(t)$ 和 $\mathbf{y}(k)$ 的第 i 个分量, $i=1,2,\dots,q$ 。

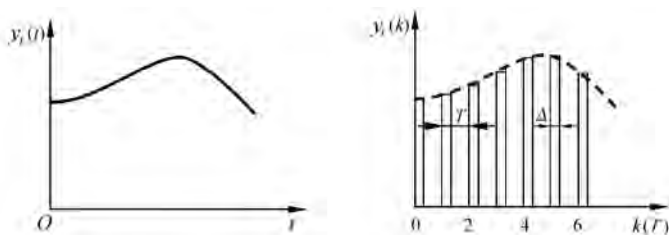


图 3.3 周期为 T 的等间隔采样示意图

(ii) 对采样周期 T 大小的约定。基于保证离散化变量在理论上可复原的要求,在周期 T 大小的选择上需要遵循香农(Shannon)采样定理给出的条件。表 $|Y_i(j\omega)|$ 为连续时间信号 $y_i(t)$ 的幅频谱,其为自变量 ω 的一个偶函数即如图 3.4 所示具有对称于纵轴的形状,并称 ω_c 为上限频率。香农采样定理指出,离散时间信号 $y_i(k)$ 理论上可以完满地复原为原连续时间信号 $y_i(t)$ 的条件为,采样频率 $\omega_s = 2\pi/T$ 必须满足如下关系式:

$$\omega_s > 2\omega_c \quad (3.146)$$

等价地,上述条件也可表为,采样周期 T 必须满足如下关系式:

$$T < \pi/\omega_c \quad (3.147)$$

实际上,为了兼顾其他性能,通常进一步把 T 的值取为理论上限值的几十分之一,如

$$T = \frac{1}{10 \sim 20} \times \frac{\pi}{\omega_c} \quad (3.148)$$

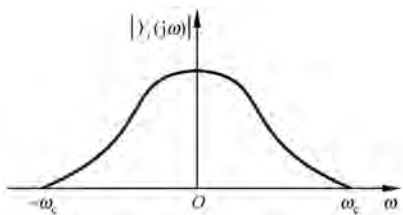


图 3.4 连续信号的幅频谱及其上限频率示例

(iii) 对保持方式的约定。为使离散化描述关系式及其推导过程较为简单,通常把由离散时间信号到连续时间信号的转换形式取为零阶保持方式,即将保持器取为零阶保持器。零阶保持方式的直观含义可由图 3.5 来说明。在采样瞬时,保持器输出 $u(t)$ 的分量 $u_j(t)$ 的值等于对应离散时间分量 $u_j(k)$ 的值;在两个采样瞬时的区间上,分量 $u_j(t)$ 的值保持前一采样瞬时上的值。

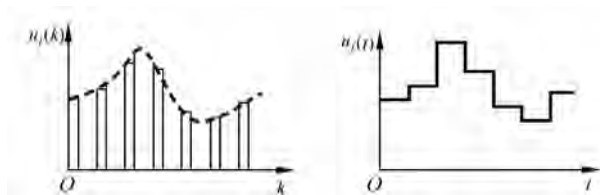


图 3.5 零阶保持方式的直观含义说明

3.6.3 基本结论

在上述基本约定前提下,可以给出连续时间线性系统时间离散化问题的基本关系式和相关属性,并表其为如下的一些结论。

结论 3.43 [时变系统情形] 给定连续时间线性时变系统:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \in [t_0, t_\alpha] \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.149)$$

则其在基本约定下的时间离散化描述为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad k=0,1,\dots,l \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (3.150)$$

两者在变量和系数矩阵上具有如下关系:

$$\mathbf{x}(k) = [\mathbf{x}(t)]_{t=kT}, \quad \mathbf{u}(k) = [\mathbf{u}(t)]_{t=kT}, \quad \mathbf{y}(k) = [\mathbf{y}(t)]_{t=kT} \quad (3.151)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(k) &= \Phi((k+1)T, kT) \triangleq \Phi(k+1, k) \\ \mathbf{H}(k) &= \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1)T, \tau) \mathbf{B}(\tau) d\tau \\ \mathbf{C}(k) &= [\mathbf{C}(t)]_{t=kT} \\ \mathbf{D}(k) &= [\mathbf{D}(t)]_{t=kT} \end{aligned} \quad (3.152)$$

式中, T 为采样周期, $l = (t_a - t_0)/T$ 为取整得到的正整数, $\Phi(\cdot, \cdot)$ 为连续时间线性时变系统(3.149)的状态转移矩阵。

证 先来证明状态方程的时间离散化关系式。对此, 导出线性时变系统(3.149)的状态运动响应表达式为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0, t_a] \quad (3.153)$$

上式中, 令 $t = (k+1)T$, 并表 $k=0$ 对应于 t_0 , 即可证得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \Phi(k+1, 0)\mathbf{x}_0 + \int_0^{(k+1)T} \Phi((k+1)T, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ &= \Phi(k+1, k) \left[\Phi(k, 0)\mathbf{x}_0 + \int_0^{kT} \Phi(kT, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \right] + \\ &\quad \left[\int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1)T, \tau)\mathbf{B}(\tau)d\tau \right] \mathbf{u}(k) \\ &= \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (3.154)$$

其中, 基于零阶保持的约定, 在最后等式前的关系式中将 $\mathbf{u}(k)$ 移出积分式。并且, 进而基于关系式(3.152), 导出最后的关系式。再来证明输出方程的时间离散化关系式。对此, 令 $t = kT$, 即可证得

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \quad (3.155)$$

至此, 证明完成。

结论 3.44 [时不变系统情形] 给定连续时间线性时不变系统:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.156)$$

则其在基本约定下的时间离散化描述为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (3.157)$$

其中, 两者在变量和系数矩阵上具有如下的关系:

$$\mathbf{x}(k) = [\mathbf{x}(t)]_{t=kT}, \quad \mathbf{u}(k) = [\mathbf{u}(t)]_{t=kT}, \quad \mathbf{y}(k) = [\mathbf{y}(t)]_{t=kT} \quad (3.158)$$

$$\mathbf{G} = e^{\mathbf{A}T}, \quad \mathbf{H} = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}t} dt \right) \mathbf{B} \quad (3.159)$$

证 时不变系统为时变系统的一种特殊情形。基于两者运动规律表达式的统一性和差异性, 由式(3.150)即可导出式(3.157), 而由式(3.152)则可导出

$$\mathbf{G} = \Phi((k+1)T - kT) = \Phi(T) = e^{\mathbf{A}T} \quad (3.160)$$

$$\mathbf{H} = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1)T - \tau)\mathbf{B}d\tau \quad (3.161)$$

对式(3.161)作变量置换 $t = (k+1)T - \tau$, 有

$$d\tau = -dt, \quad \int_{kT}^{(k+1)T} \cdot d\tau = - \int_T^0 \cdot dt \quad (3.162)$$

于是, 利用式(3.162), 即可由式(3.161)证得

$$\mathbf{H} = \left(- \int_T^0 \Phi(t) dt \right) \mathbf{B} = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}t} dt \right) \mathbf{B} \quad (3.163)$$

结论 3.45 [时间离散化属性] 上述两个结论表明,时间离散化不改变系统的时变或时不变属性。也即,时变系统在时间离散化后仍为时变系统,时不变系统在时间离散化后仍为时不变系统。

结论 3.46 [离散化系统属性] 对连续时间线性系统,不管为时变或时不变,也不管系统矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 和 $\mathbf{A}$ 为非奇异或奇异,其离散化系统的系统矩阵 $\mathbf{G}(k)$ 和 $\mathbf{G}$ 必为非奇异。

例 3.4 给定连续时间线性时不变系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad t \geq 0 \quad (3.164)$$

取采样周期 $T=0.1\text{s}$,现在来定出其时间离散化模型。

首先,确定连续时间系统的矩阵指数函数 e^{At} 。为此,采用预解矩阵法,先来定出

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

将上式取拉普拉斯反变换,即可得到

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

进而,确定时间离散化系统的系数矩阵。对此,利用关系式(3.159),即可得到

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.091 \\ 0 & 0.819 \end{bmatrix} \\ \mathbf{H} &= \left(\int_0^T e^{At} dt \right) \mathbf{B} = \left(\int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} dt \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T & 0.5T + 0.25e^{-2T} - 0.25 \\ 0 & -0.5e^{-2T} + 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5T + 0.25e^{-2T} - 0.25 \\ -0.5e^{-2T} + 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.091 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

最后,确定时间离散化描述。基于上述计算结果,即可定出给定连续时间线性时不变系统的时间离散化描述为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.091 \\ 0 & 0.819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.091 \end{bmatrix} u(k)$$

3.7 离散时间线性系统的运动分析

离散时间系统不仅代表社会、经济、工程等领域一大批离散动态问题的数学模型,而且代表连续时间系统的时间离散化模型。离散时间线性系统的运动分析数学

上归结为求解时变或时不变线性差分方程。离散时间系统的差分方程型状态方程的求解,既在计算上简单得多也更宜于采用计算机进行计算。

3.7.1 迭代法求解状态响应

考虑离散时间线性系统,对时变情形系统状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad k=0,1,2,\dots \quad (3.165)$$

对时不变情形系统状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad k=0,1,2,\dots \quad (3.166)$$

其中, $\mathbf{x}(k)$ 为 n 维状态, $\mathbf{u}(k)$ 为 p 维输入。

可以看出,不管是时变差分方程(3.165),还是时不变差分方程(3.166),都可采用迭代法容易地求解。迭代法思路是,基于系统状态方程,利用给定的或定出的上一采样时刻状态值,迭代地定出下一个采样时刻的系统状态。

结论 3.47 [迭代法求解状态响应] 对离散时间线性时变系统(3.165),给定系统初始状态 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$,各个采样时刻输入 $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \mathbf{u}(2), \dots$,以及分析过程末时刻正整数 l ,则其系统状态响应可按如下算法来求解。

Step 1: 令 $k=0$ 。

Step 2: 对给定 $\mathbf{G}(k), \mathbf{H}(k)$ 和 $\mathbf{u}(k)$,以及已知 $\mathbf{x}(k)$,计算

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k)$$

Step 3: 令 $k=k+1$ 。

Step 4: 如果 $k=l+1$,进入下一步;如果 $k < l+1$,去到 Step 2。

Step 5: 计算停止。

注 1 上述算法具有递推特点,容易编程并适于采用计算机进行计算。但由于后一步计算依赖于前一步计算结果,导致对计算过程中引入的误差造成积累性误差,这是迭代法的一个共同缺点。

注 2 由时不变系统(3.166)为时变系统(3.165)的一类特殊情况可知,上述算法对时不变系统同样适用,差别只在于计算中取系数矩阵为 $\mathbf{G}(k) = \mathbf{G}$ 和 $\mathbf{H}(k) = \mathbf{H}$ 。

例 3.5 给定离散时间线性时变系统:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \cos k\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin(k\pi/2) \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中

$$u(k) = \begin{cases} 1, & k=0,2,4,\dots \\ -1, & k=1,3,5,\dots \end{cases}$$

现来计算状态变量 $x_1(k)$ 和 $x_2(k)$ 在采样时刻 $k=1,2,3,4$ 的值。

对 $k=0$,由

$$\mathbf{G}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u(0) = 1, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即可定出:

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

对 $k=1$, 由

$$\mathbf{G}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u(1) = -1, \quad \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

即可定出:

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

对 $k=2$, 由

$$\mathbf{G}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u(2) = 1, \quad \begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

即可定出:

$$\begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对 $k=3$, 由

$$\mathbf{G}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u(3) = -1, \quad \begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

即可定出:

$$\begin{bmatrix} x_1(4) \\ x_2(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

3.7.2 状态响应的解析关系式

迭代法对分析具体系统的运动行为和性能无疑是方便的。但在理论研究中,通常更为希望在一般意义上建立状态响应的解析表达式,以更深刻地揭示状态响应和系统结构的关系。这一部分进一步给出有关离散时间线性系统状态响应的一些一般性结论。

1. 状态转移矩阵

定义 3.11 [状态转移矩阵] 对离散时间线性时变系统(3.165), 状态转移矩阵定义为对应矩阵方程

$$\Phi(k+1, m) = \mathbf{G}(k) \Phi(k, m), \quad \Phi(m, m) = \mathbf{I} \quad (3.167)$$

的 $n \times n$ 解阵 $\Phi(k, m)$ 。对离散时间线性时不变系统(3.166), 状态转移矩阵定义为对应矩阵方程

$$\Phi(k+1) = G\Phi(k), \quad \Phi(0) = I \quad (3.168)$$

的 $n \times n$ 解阵 $\Phi(k)$ 。

结论 3.48 [状态转移矩阵] 对离散时间线性时变系统(3.165), 状态转移矩阵即矩阵方程(3.167)解阵 $\Phi(k, m)$, 具有如下关系式:

$$\Phi(k, m) = G(k-1)G(k-2)\cdots G(m) \quad (3.169)$$

对离散时间线性时不变系统(3.166), 状态转移矩阵即矩阵方程(3.168)解阵 $\Phi(k)$, 具有如下关系式:

$$\Phi(k) = GG\cdots G = G^k \quad (3.170)$$

证 对线性时变系统(3.165), 由关系式(3.169)可以直接导出:

$$\Phi(k+1, m) = G(k)[G(k-1)G(k-2)\cdots G(m)] = G(k)\Phi(k, m) \quad (3.171)$$

和

$$\Phi(m, m) = I \quad (3.172)$$

表明方程(3.169)给出的 $\Phi(k, m)$ 同时满足方程(3.167)和初始条件, 从而证得其为系统状态转移矩阵。对线性时不变系统(3.166), 方程(3.169)给出的 $\Phi(k, m)$ 关系式中, 取

$$m=0, \quad G(k-1) = G(k-2) = \cdots = G(1) = G(0) = G, \quad \text{“,” 换为“—”}$$

即可证得式(3.170)。证明完成。

结论 3.49 [状态转移矩阵属性] 不同于连续时间线性系统, 离散时间线性系统的状态转移矩阵不保证必为非奇异。对离散时间线性时变系统(3.165), 有

$$\Phi(k, m) \text{ 非奇异} \Leftrightarrow G(i), i=m, m+1, \cdots, k-2, k-1 \text{ 均为非奇异}$$

对离散时间线性时不变系统(3.166), 有

$$\Phi(k) \text{ 非奇异} \Leftrightarrow G \text{ 非奇异}$$

结论 3.50 [状态转移矩阵属性] 对连续时间线性系统的时间离散化系统, 不管为时不变或时变, 状态转移矩阵必为非奇异。

2. 状态响应表达式

结论 3.51 [状态响应] 对离散时间线性时变系统(3.165), 同时由输入 u 和初始状态 x_0 激励的状态响应 $x(k)$ 具有表达式:

$$x(k) = \Phi(k, 0)x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k, i+1)H(i)u(i) \quad (3.173)$$

或

$$x(k) = \Phi(k, 0)x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k, k-i)H(k-i-1)u(k-i-1) \quad (3.174)$$

证 由系统状态方程(3.165), 分别取 $k=0, 1, 2, \cdots$, 可以得到

$$x(1) = G(0)x(0) + H(0)u(0)$$

$$x(2) = G(1)x(1) + H(1)u(1)$$

$$\begin{aligned} x(3) &= \mathbf{G}(2)x(2) + \mathbf{H}(2)u(2) \\ &\dots\dots \end{aligned} \quad (3.175)$$

$$x(k) = \mathbf{G}(k-1)x(k-1) + \mathbf{H}(k-1)u(k-1)$$

对式(3.175),由上而下依次迭代,可以导出:

$$\begin{aligned} x(1) &= \mathbf{G}(0)x_0 + \mathbf{H}(0)u(0) \\ x(2) &= \mathbf{G}(1)\mathbf{G}(0)x_0 + \{\mathbf{G}(1)\mathbf{H}(0)u(0) + \mathbf{H}(1)u(1)\} \\ x(3) &= \mathbf{G}(2)\mathbf{G}(1)\mathbf{G}(0)x_0 + \{\mathbf{G}(2)\mathbf{G}(1)\mathbf{H}(0)u(0) + \mathbf{G}(2)\mathbf{H}(1)u(1) + \\ &\quad \mathbf{H}(2)u(2)\} \\ &\dots\dots \\ x(k) &= \mathbf{G}(k-1)\cdots\mathbf{G}(0)x_0 + \{\mathbf{G}(k-1)\cdots\mathbf{G}(1)\mathbf{H}(0)u(0) + \\ &\quad \mathbf{G}(k-1)\cdots\mathbf{G}(2)\mathbf{H}(1)u(1) + \cdots + \mathbf{G}(k-1)\mathbf{H}(k-2)u(k-2) + \\ &\quad \mathbf{H}(k-1)u(k-1)\} \end{aligned} \quad (3.176)$$

再利用状态转移矩阵关系式:

$$\Phi(k, m) = \mathbf{G}(k-1)\mathbf{G}(k-2)\cdots\mathbf{G}(m) \quad (3.177)$$

可把式(3.176)中 $x(k)$ 关系式进而表为

$$\begin{aligned} x(k) &= \Phi(k, 0)x_0 + \{\Phi(k, 1)\mathbf{H}(0)u(0) + \Phi(k, 2)\mathbf{H}(1)u(1) + \cdots + \\ &\quad \Phi(k, k-1)\mathbf{H}(k-2)u(k-2) + \mathbf{H}(k-1)u(k-1)\} \end{aligned}$$

于是,将上式中“与输入 u 相关部分”,按由左至右顺序相加可导出式(3.173),按由右至左顺序相加可导出式(3.174)。证明完成。

结论 3.52 [状态响应] 对离散时间线性时不变系统(3.166),同时由输入 u 和初始状态 x_0 激励的状态响应 $x(k)$ 具有表达式:

$$x(k) = \Phi(k)x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k-i-1)\mathbf{H}u(i) \quad (3.178)$$

或

$$x(k) = \Phi(k)x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(i)\mathbf{H}u(k-i-1) \quad (3.179)$$

证 在时变系统状态响应解析表达式(3.173)和(3.174)中,取

$$\begin{aligned} \Phi(k, 0) &= \Phi(k-0) = \Phi(k) \\ \Phi(k, i+1) &= \Phi(k-i-1) \\ \Phi(k, k-i) &= \Phi(k-k+i) = \Phi(i) \\ \mathbf{H}(0) &= \mathbf{H}(1) = \cdots = \mathbf{H}(k-1) = \mathbf{H} \end{aligned}$$

即可导出式(3.178)和式(3.179)。证明完成。

3. 状态运动的分解

结论 3.53 [状态响应的分解] 离散时间线性系统的状态响应可分解为零输入响应 $x_{0u}(k)$ 和零初态响应 $x_{0x}(k)$, 即有

$$x(k) = x_{0u}(k) + x_{0x}(k) \quad (3.180)$$

结论 3.54 [零输入响应] 对离散时间线性时变系统(3.165), 零输入响应 $\mathbf{x}_{0u}(k)$ 具有表达式:

$$\mathbf{x}_{0u}(k) = \Phi(k, 0)\mathbf{x}_0 \quad (3.181)$$

对离散时间线性时不变系统(3.166), 零输入响应 $\mathbf{x}_{0u}(k)$ 具有表达式:

$$\mathbf{x}_{0u}(k) = \Phi(k)\mathbf{x}_0 \quad (3.182)$$

结论 3.55 [零初态响应] 对离散时间线性时变系统(3.165), 零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}(k)$ 具有表达式:

$$\mathbf{x}_{0x}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k, i+1)\mathbf{H}(i)\mathbf{u}(i) = \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k, k-i)\mathbf{H}(k-i-1)\mathbf{u}(k-i-1) \quad (3.183)$$

对离散时间线性时不变系统(3.166), 零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}(k)$ 具有表达式:

$$\mathbf{x}_{0x}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k-i-1)\mathbf{H}\mathbf{u}(i) = \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(i)\mathbf{H}\mathbf{u}(k-i-1) \quad (3.184)$$

4. 零初态响应的因果性

结论 3.56 [零初态响应的因果性] 对离散时间的线性时不变系统(3.166)和线性时变系统(3.165), 基于零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}(k)$ 的关系式(3.184)和(3.183), 导出其零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}(k)$ 的展开式:

$$\mathbf{x}_{0x}(k) = \Phi(k-1)\mathbf{H}\mathbf{u}(0) + \Phi(k-2)\mathbf{H}\mathbf{u}(1) + \cdots + \mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) \quad (3.185)$$

和

$$\mathbf{x}_{0x}(k) = \Phi(k, 1)\mathbf{H}(0)\mathbf{u}(0) + \Phi(k, 2)\mathbf{H}(1)\mathbf{u}(1) + \cdots + \mathbf{H}(k-1)\mathbf{u}(k-1) \quad (3.186)$$

可以看出, 零初态响应 $\mathbf{x}_{0x}(k)$ 必满足因果性。即对采样时刻 k , $\mathbf{x}_{0x}(k)$ 只与此前各个时刻的输入 $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \cdots, \mathbf{u}(k-1)$ 有关, 而与同时刻输入 $\mathbf{u}(k)$ 无关。

3.7.3 脉冲传递函数矩阵

对应于连续时间线性时不变系统的传递函数矩阵, 对离散时间线性时不变系统同样可以采用脉冲传递函数矩阵作为系统的输入输出描述。

考虑离散时间线性时不变系统, 状态空间描述为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.187)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (3.188)$$

其中, $\mathbf{x}(k)$ 为 n 维状态, $\mathbf{u}(k)$ 为 p 维输入, $\mathbf{y}(k)$ 为 q 维输出。

定义 3.12 [脉冲传递函数矩阵] 对离散时间线性时不变系统(3.187)和(3.188), 表 $\hat{\mathbf{u}}(z)$ 和 $\hat{\mathbf{y}}(z)$ 为输入 $\mathbf{u}(k)$ 和输出 $\mathbf{y}(k)$ 的 z 变换, 即有

$$\hat{\mathbf{u}}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{u}(k)] \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}(k)z^{-k} \quad (3.189)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{y}(k)] \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{y}(k) z^{-k} \quad (3.190)$$

则脉冲传递函数矩阵 $\hat{\mathbf{G}}(z)$ 定义为, 零初始状态即 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ 条件下, 满足关系式

$$\hat{\mathbf{y}}(z) = \hat{\mathbf{G}}(z) \hat{\mathbf{u}}(z) \quad (3.191)$$

的一个 $q \times p$ 有理分式矩阵 $\hat{\mathbf{G}}(z)$, 其中 z 为复变量。

结论 3.57 [脉冲传递函数矩阵] 对离散时间线性时不变系统 (3.187) 和 (3.188), 令初始条件为零即 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, 则脉冲传递函数矩阵 $\hat{\mathbf{G}}(z)$ 的基于状态空间描述的表达式为

$$\hat{\mathbf{G}}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{D} \quad (3.192)$$

3.8 小结和评述

(1) 本章的定位。本章分别就连续时间线性系统和离散时间线性系统, 给出系统状态运动相对于初始状态和输入作用的显式关系。本章的内容对于进一步研究系统的基本结构特性, 如能控性、能观测性和稳定性等, 将是不可缺少的基础。

(2) 运动分析的实质。运动分析的数学实质, 归结为相对于输入和初始状态求解系统状态方程, 建立反映因果关系的解析形式解。运动分析的物理含义, 是在状态空间中定出由初始状态点出发的状态运动轨道, 运动轨道由“初始状态经状态转移矩阵在各时刻值阵的变换点构成的轨迹”和“各时刻输入作用等价状态经状态转移矩阵在各时刻值阵的变换点构成的轨迹”的合成。

(3) 连续时间线性系统的状态响应。对线性时不变系统, 状态响应解析表达式为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0$$

对线性时变系统, 状态响应解析表达式为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, t_a]$$

除了参数矩阵随时间为不变和变化的差异外, 两者形式上差别仅在于时不变情形状态转移矩阵 $\Phi(t - \tau)$ 中的“—”在时变情形状态转移矩阵 $\Phi(t, \tau)$ 中表为“,”。

(4) 离散时间线性系统的状态响应。对线性时不变系统, 状态响应解析表达式为

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k) \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k - i - 1) \mathbf{H} \mathbf{u}(i)$$

对线性时变系统, 状态响应解析表达式为

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, 0) \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k, i + 1) \mathbf{H}(i) \mathbf{u}(i)$$

离散时间线性系统的分析结果只反映采样时刻上状态响应的形态。

(5) 连续时间线性系统的时间离散化。时间离散化来自于将离散型计算机应用于分析与控制连续型线性系统的需要。对连续时间线性时不变系统,时间离散化描述具有形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad k=0,1,2,\dots \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{e}^{AT} \\ \mathbf{H} &= \left(\int_0^T \mathbf{e}^{At} dt \right) \mathbf{B} \end{aligned}$$

对连续时间线性时变系统,时间离散化描述具有形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad k=0,1,\dots,l \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(k) &= \Phi((k+1)T, kT) \triangleq \Phi(k+1, k) \\ \mathbf{H}(k) &= \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1)T, \tau) \mathbf{B}(\tau) d\tau \\ \mathbf{C}(k) &= [\mathbf{C}(t)]_{t=kT} \\ \mathbf{D}(k) &= [\mathbf{D}(t)]_{t=kT} \end{aligned}$$

(6) 计算问题。对离散时间线性系统,不管为时变或时不变,状态运动分析在计算上归结为矩阵的代数运算如“乘”和“加”,不存在计算上的困难。对连续时间线性系统,状态运动分析在计算上主要归结为确定状态转移矩阵,这对时变系统将是一件困难的任务。

习题

3.1 分别定出下列常阵 $\mathbf{A}$ 的矩阵指数函数 $\mathbf{e}^{At}$:

(i) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

(ii) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

(iii) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(iv) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

3.2 采用除定义算法外的三种方法,计算下列各个矩阵 $\mathbf{A}$ 的矩阵指数函数 $\mathbf{e}^{At}$:

(i) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$$(ii) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

3.3 试求下列各连续时间线性时不变系统的状态变量解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$:

$$(i) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \geq 0$$

$$(ii) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u(t) = e^{-t}, t \geq 0$$

3.4 给定一个连续时间线性时不变系统, 已知

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

定出系统相对于下列各个 $u(t)$ 的状态响应 $\mathbf{x}(t)$:

(i) $u(t) = \delta(t)$ (单位脉冲函数)

(ii) $u(t) = 1(t)$ (单位阶跃函数)

(iii) $u(t) = t$

(iv) $u(t) = \sin t$

3.5 给定一个连续时间线性时不变系统, 已知状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 为

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{3t}) & \frac{1}{4}(-e^{-t} + e^{3t}) \\ -e^{-t} + e^{3t} & \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{3t}) \end{bmatrix}$$

试据此定出系统矩阵 $\mathbf{A}$ 。

3.6 对连续时间线性时不变系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, 试利用拉普拉斯变换证明系统状态运动的表达式为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau$$

3.7 给定一个时不变矩阵微分方程:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T, \mathbf{X}(0) = \mathbf{P}_0$$

其中, $\mathbf{X}$ 为 $n \times n$ 变量矩阵。证明上述矩阵方程的解阵为

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{P}_0 e^{\mathbf{A}^T t}$$

3.8 给定连续时间时变自治系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ 及其伴随系统 $\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{z}$, 表 $\Phi(t, t_0)$ 和 $\Phi_z(t, t_0)$ 分别为它们的状态转移矩阵, 试证明 $\Phi(t, t_0)\Phi_z^T(t, t_0) = \mathbf{I}$ 。

3.9 给定连续时间线性时变系统为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}(t) & \mathbf{A}_{12}(t) \\ \mathbf{A}_{21}(t) & \mathbf{A}_{22}(t) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(t) \\ \mathbf{B}_2(t) \end{bmatrix} u, \quad t \geq t_0$$

表系统状态转移矩阵为

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, t_0) & \Phi_{12}(t, t_0) \\ \Phi_{21}(t, t_0) & \Phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

试证明: 若 $A_{21}(t) \equiv 0$, 则必有 $\Phi_{21}(t, t_0) \equiv 0$ 。

3.10 给定一个二维连续时间线性时不变自治系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, t \geq 0$ 。现知, 对应于两个不同初态的状态响应为

$$\text{对 } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -4e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\text{对 } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

试据此定出系统矩阵 $\mathbf{A}$ 。

3.11 给定方常阵 $\mathbf{A}$, 设其特征值为两两相异, 表 $\text{tr}\mathbf{A}$ 为 $\mathbf{A}$ 的迹即其对角元素之和, 试证明:

$$\det e^{\mathbf{A}t} = e^{(\text{tr}\mathbf{A})t}$$

3.12 定出下列连续时间线性时不变系统的时间离散化状态方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

其中, 采样周期为 $T=2$ 。

3.13 给定一个人口分布问题的状态方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.01(1-0.04) & 1.01(0.02) \\ 1.01(0.04) & 1.01(1-0.02) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^7 \\ 9 \times 10^7 \end{bmatrix}$$

其中, x_1 表示城市人口, x_2 表示乡村人口, 令 $k=0$ 表示 2001 年。试采用计算机计算 2001—2015 年城市和乡村人口分布的演化过程, 并绘出城市和乡村人口分布的演化曲线。

3.14 给定一个离散时间线性时不变系统为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k), \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

再取控制 $u(k)$ 为

$$u(k) = \begin{cases} 1, & \text{当 } k=0, 2, 4, \dots \\ 0, & \text{当 } k=1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

采用计算机计算 $x_1(k)$ 和 $x_2(k)$ 当 $k=1, 2, \dots, 10$ 时的值。

3.15 对上题给出的离散时间线性时不变系统, 计算系统状态转移矩阵 $\Phi(k)$ 在 $k=10$ 时的结果。