

第3章

大跨度索并联机构的静力学特性分析

索并联机构中的绳索只能承受拉力,不能承受压力,索的单向承力特性将对索机构的运动与稳定性产生影响。因此必须对索并联机构的索拉力进行分析,静力学特性是大跨度索并联机构优化设计中的一个重要方面。本书第2章完成了基于索自重及弹性变形的大跨度索并联机构的完整静力学建模及求解。在此基础上,本章将基于精确静力学模型求解结果,对大跨度索并联机构进行静力学特性分析。

为了保证大跨度索并联机构具有好的可控性,要求索拉力满足一定条件,但是仍然需要对描述索拉力特性的指标进行探讨。本章提出局部及全局索拉力特性指标,描述大跨度索并联机构在工作空间内的索拉力特性。

大跨度索并联机构本身尺度巨大,建造与控制难度高,机构末端误差难以避免。本章将在第2章的基础上进一步分析大跨度索并联机构的终端误差对索拉力的影响,并建立相应指标,用于量化终端许可误差对大跨度索并联机构的索拉力特性影响。

本章首先介绍大跨度索并联机构的静力学特性和索拉力指标研究;随后,3.2节建立大跨度索并联机构的误差模型,并完成大跨度索并联机构终端误差空间内的索拉力特性分析,提出许可误差空间内的索拉力特性指标;3.3节以FAST馈源一级支撑系统中6索并联机构为例,研究其全局索拉力特性及许可误差空间内的索拉力特性,验证本章所述力特性指标的可行性,为大跨度索并联机构的力控制提供理论基础。

本章主要内容:

- (1) 大跨度索并联机构的索拉力特性指标;
- (2) 终端误差与索拉力特性;
- (3) FAST馈源一级支撑系统相似模型的力特性分析。

3.1 大跨度索并联机构的索拉力特性指标

索并联机构中某根索拉力接近零或者相比其他索拉力的差值较大时,索并联机构将出现可控性不佳或运动不稳定的情况,被称作大跨度索并联机构的不稳定或虚牵现象。为了防止大跨度索并联机构在运动过程中出现不稳定现象,在对机构进行设计时会定义一个拉

力条件,建立有效的索拉力特性指标,通过工作空间内的姿态分析,避免不稳定或虚牵。因此索拉力特性是衡量索并联机构性能的一个重要指标。

在索拉力指标方面,早期的研究主要关注在索拉力的最小值、索拉力的最大最小值比值等方面,主要是为了体现索拉力的均衡性,而这类索拉力指标主要用于索并联机器人的设计。^[1-3]比如,Takeda 等^[4]利用简化的等价伸缩杆对 n 自由度索机构的力特性进行分析,引入力传递系数 TI_w , TI_w 由机构雅可比矩阵得到,取决于机构的几何条件,该指标一般用于衡量索到动平台的力传递性能; Takeda 还和 Funabashi^[5]提出了一种由 7 根索牵引的 6 自由度索并联机构,并首次对该类对拉式索并联机构进行力传递性能分析和优化设计。郑亚青^[6]在 Takeda 提出的力传递性能系数的基础上,详细分析了该指标的求解过程,并利用该指标对一种新型 6 自由度索并联机构的工作空间进行了分析。

在对大跨度索并联机构进行运动控制时,为了保证运动过程中每根索保持张紧,使得机构稳定运行,在工作空间内的某一姿态下,采用索的最大最小拉力之间的关系来衡量和评价机构的力特性。通常采用两种指标来表示大跨度索并联机构的索拉力特性:最大与最小索拉力差值;最大与最小索拉力比值。并分别建立局部力特性及全局力特性指标表达式,量化机构的力学性能。

3.1.1 大跨度索并联机构的局部索拉力性能指标

当大跨度索并联机构末端位于工作空间某一姿态下,定义最大与最小索拉力差值、最大与最小索拉力比值两个索拉力特性指标 TCI 来衡量机构索拉力特性。

最大与最小索拉力差值 TCI_{max} :

$$TCI_{max} = \max(\sigma_i - \sigma_j) \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, m; i \neq j) \quad (3-1)$$

为了使机构稳定运行, TCI_{max} 越小,说明机构的索拉力变化越小,机构越趋于平稳运动。因此,对于同一机构下的某一姿态, TCI_{max} 越小越好。

在某些姿态,各索拉力本身都不大,但是有可能出现索拉力相差倍数的情况,因此需要另一个索拉力衡量指标——最大与最小索拉力比值 TCI_{rmax} :

$$TCI_{rmax} = \max\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_j}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, m; i \neq j) \quad (3-2)$$

$TCI_{rmax} \geq 1$,该指标越小越好。

拉力约束条件:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \geq [\sigma_{min}, \dots, \sigma_{min}]^T \\ \boldsymbol{\sigma} \leq [\sigma_{max}, \dots, \sigma_{max}]^T \end{cases} \quad (3-3)$$

其中, σ_{min} 和 σ_{max} 分别表示索并联机构中索拉力的许可最小值与最大值。

以上两个索拉力指标旨在衡量同一机构在某一特定姿态下的拉力特性,也可以认为是评价机构在该姿态下避免虚牵的能力。

3.1.2 大跨度索并联机构的工作空间内全局索拉力性能指标

下面基于 3.1.1 节提出的两个力特性指标建立全局指标。采用均方根的形式描述全局力特性 GTCI。

全局最大与最小索拉力差值 GTCI_{\max} :

$$\text{GTCI}_{\max} = \sqrt{\frac{\sum_{t=0}^{t_0} (\max(\sigma_i(t) - \sigma_j(t)))^2}{t_0}} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, m; i \neq j) \quad (3-4)$$

全局最大与最小索拉力比值 $\text{GTCI}_{r\max}$:

$$\text{GTCI}_{r\max} = \sqrt{\frac{\sum_{t=0}^{t_0} \left(\max\left(\frac{\sigma_i(t)}{\sigma_j(t)}\right) \right)^2}{t_0}} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, m; i \neq j) \quad (3-5)$$

其中, t 为大跨度索并联机构工作空间内的样本点; t_0 为样本点总和。

以上指标在机构存在特别差的拉力位置的时候不适用,因此给出拉力约束条件:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \geq [\sigma_{\min}, \dots, \sigma_{\min}]^T \\ \boldsymbol{\sigma} \leq [\sigma_{\max}, \dots, \sigma_{\max}]^T \end{cases}$$

本节中的两个全局拉力性能指标旨在对同一类大跨度索并联机构的力特性进行分析,得到全工作空间的全局力学性能,也可以认为是评价索机构在全工作空间内避免虚牵和保证可靠运动的能力。

3.2 终端误差与力特性分析

大跨度索并联机构的结构尺寸大,索为柔性体,相对于刚性机构,索并联机构的末端误差较大。在之前对大跨度索并联机构的静力学或是动力学研究中,一般只对索并联机构工作空间内的索拉力特性进行分析,往往忽略了终端误差对索拉力特性的影响。

当机构的需求工作空间处于可控工作空间边界时,虽然该姿态下索拉力特性可以满足设计要求,但是由于机构不可避免地存在控制误差,难以保证机构在其许可终端误差空间内的力学特性。当机构末端处于许可误差空间内索拉力特性较差的姿态点上时,机构的力学性能将变差,这将不利于机构的精度与稳定控制。因此,如何评价和保证索并联机构在某一姿态的许可终端误差空间内也满足力特性设计要求,是一个很重要的命题。

在本节中,将基于建模误差补偿方法建立大跨度索并联机构的误差模型,并提出机构许可终端误差空间内索拉力特性的评价指标。

3.2.1 大跨度索并联机构的误差分析

大跨度索并联机构的精度是重要的性能指标,且机构的力学性能相互影响。索并联机构的终端控制误差受到许多因素影响,如驱动单元误差、安装误差、制造公差和间隙、结构设计等。对于并联机构,误差源的数量超过 100 个,为了简化计算,一般文献中只考虑铰链点和支链长度的误差作为误差源,对终端误差进行估计。

针对一个完全约束的大跨度索并联机构,机构的单支链误差示意图如图 3-1 所示。使用向量封闭环来描述误差模型,坐标系 \mathcal{R} : $O-XYZ$ 为静平台上的坐标系,坐标系 \mathcal{R}' : $O'-X'Y'Z'$

为动平台上末端执行器的坐标系。机构中 B_i ($i=1,2,\dots,m$) 为索与静平台的连接点, A_i ($i=1,2,\dots,m$) 为索与动平台的连接点。

索并联机构误差包括索支链长度误差 δl_{ci} ($i=1,2,\dots,m$) 和上下平台的索连接点位置误差 $\delta\mathbf{O}'\mathbf{A}_i$ 和 $\delta\mathbf{OB}_i$, 索并联机构的输出误差, 即索并联机构动平台末端误差为 $\delta\mathbf{X} = [\delta\mathbf{OO}'^T, \delta\boldsymbol{\Omega}^T]^T$, 其中 $\delta\mathbf{OO}' = [\delta x, \delta y, \delta z]^T$ 为位置误差, $\delta\boldsymbol{\Omega} = [\delta\omega_x, \delta\omega_y, \delta\omega_z]^T$ 为姿态误差。

根据图 3-1 所示的大跨度索并联机构单支链误差模型, 由第 2 章可知该支链的运动学方程为

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{R}\mathbf{O}'\mathbf{A}_i + \mathbf{OO}' - \mathbf{OB}_i \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (3-6)$$

上式可以表述为

$$l_i \mathbf{I}_i = \mathbf{R}\mathbf{O}'\mathbf{A}_i + \mathbf{OO}' - \mathbf{OB}_i \quad (3-7)$$

上式为索直线模型下的运动学逆解方程。为了得到精确建模下的索并联机构单支链模型, 可以根据第 2 章提出的误差建模补偿方法进行运动学建模, 将上式写成

$$(l_{ci} - \epsilon_{linei}) \mathbf{I}_i = \mathbf{R}\mathbf{O}'\mathbf{A}_i + \mathbf{OO}' - \mathbf{OB}_i \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (3-8)$$

其中, l_{ci} 为基于精确悬链线建模的大跨度索并联机构第 i 根索的索长; ϵ_{linei} 为基于直线建模的大跨度索并联机构的第 i 根索的索长误差补偿项; \mathbf{R} 为坐标旋转矩阵。

对式(3-8)进行微分得到

$$\delta(l_{ci} - \epsilon_{linei}) \mathbf{I}_i + (l_{ci} - \epsilon_{linei}) \delta\mathbf{I}_i = \delta\mathbf{R}\mathbf{O}'\mathbf{A}_i + \mathbf{R}\delta\mathbf{O}'\mathbf{A}_i + \delta\mathbf{OO}' - \delta\mathbf{OB}_i \quad (3-9)$$

其中,

$$\delta\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\Omega}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\omega_z & \delta\omega_y \\ \delta\omega_z & 0 & -\delta\omega_x \\ -\delta\omega_y & \delta\omega_x & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R} \quad (3-10)$$

将式(3-10)代入式(3-9)中, 得到

$$\begin{aligned} \delta(l_{ci} - \epsilon_{linei}) \mathbf{I}_i + (l_{ci} - \epsilon_{linei}) \delta\mathbf{I}_i &= \delta\mathbf{OO}' + \delta\mathbf{R}\mathbf{O}'\mathbf{A}_i + \mathbf{R}\delta\mathbf{O}'\mathbf{A}_i - \delta\mathbf{OB}_i \\ &= \delta\mathbf{OO}' + \mathbf{R}_{\Omega}\mathbf{R}\mathbf{O}'\mathbf{A}_i + \mathbf{R}\delta\mathbf{O}'\mathbf{A}_i - \delta\mathbf{OB}_i \\ &= \delta\mathbf{OO}' + \delta\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{R}\mathbf{O}'\mathbf{A}_i) + \mathbf{R}\delta\mathbf{O}'\mathbf{A}_i - \delta\mathbf{OB}_i \end{aligned} \quad (3-11)$$

其中, $\delta\boldsymbol{\Omega} = [\delta\omega_x, \delta\omega_y, \delta\omega_z]^T$ 。

由于 \mathbf{I}_i^T 是支链的单位向量, 由 $\mathbf{I}_i^T \mathbf{I}_i = 1, \mathbf{I}_i^T \delta\mathbf{I}_i = 0$ 可知, 式(3-11)中包含了支链向量方向随时间的变化。

方程两边同时点乘支链单位向量 \mathbf{I}_i^T , 可从中将支链长度的变化分离出来:

$$\delta(l_{ci} - \epsilon_{linei}) = \mathbf{I}_i^T \delta\mathbf{OO}' + \mathbf{I}_i^T \delta\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{R}\mathbf{O}'\mathbf{A}_i) + \mathbf{I}_i^T \mathbf{R}\delta\mathbf{O}'\mathbf{A}_i - \mathbf{I}_i^T \delta\mathbf{OB}_i \quad (3-12)$$

经过对上述单支链误差模型进行分析, 大跨度索并联机构的机构运动学误差模型可以表示成

$$\mathbf{J} \delta\mathbf{X} = \delta\mathbf{L} + \delta\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{D}_1 \delta\mathbf{O}'\mathbf{A}_i + \mathbf{D}_2 \delta\mathbf{OB}_i \quad (3-13)$$

其中,

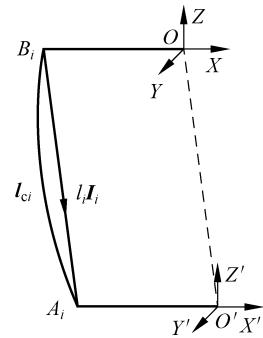


图 3-1 大跨度索并联机构
单支链误差模型

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{X} &= [\delta \mathbf{O} \mathbf{O}'^T, \delta \boldsymbol{\Omega}^T]^T, \quad \delta \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \delta l_{c1} \\ \vdots \\ \delta l_{cm} \end{bmatrix}, \quad \delta \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} -\delta \boldsymbol{\epsilon}_{line1} \\ \vdots \\ -\delta \boldsymbol{\epsilon}_{linem} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^T & \mathbf{I}_1^T \times (\mathbf{R} \cdot \mathbf{O}' \mathbf{A}_1) \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{I}_m^T & \mathbf{I}_m^T \times (\mathbf{R} \cdot \mathbf{O}' \mathbf{A}_m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_1^T \cdot \mathbf{R} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\mathbf{I}_m^T \cdot \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{I}_m^T \end{bmatrix}\end{aligned}$$

式中, $\delta \mathbf{X}$ 为索并联机构末端的位置误差与姿态误差; $\delta \mathbf{L}$ 为索长度误差; $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ 为采用直线模型及其建模误差补偿后的索长建模误差; $\delta \mathbf{O}' \mathbf{A}_i$ 为动平台的索连接点误差向量; $\delta \mathbf{OB}_i$ 为静平台的索连接点误差向量。

如果雅可比矩阵 \mathbf{J} 是可逆的, 即 \mathbf{J}^{-1} 存在, 则式(3-13)可以表示为

$$\delta \mathbf{X} = \mathbf{J}^{-1} \delta \mathbf{L} + \mathbf{J}^{-1} \delta \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{J}^{-1} \mathbf{D}_1 \delta \mathbf{O}' \mathbf{A}_i + \mathbf{J}^{-1} \mathbf{D}_2 \delta \mathbf{OB}_i \quad (3-14)$$

最终, 大跨度索并联机构的运动学误差方程可以表示为

$$\delta \mathbf{X} = \mathbf{E} \delta \boldsymbol{\eta} \quad (3-15)$$

其中,

$$\mathbf{E} = [\mathbf{J}^{-1}, \mathbf{J}^{-1}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{D}_1, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{D}_2]$$

$$\delta \boldsymbol{\eta} = [\delta \mathbf{L}^T, \delta \boldsymbol{\epsilon}^T, \delta \mathbf{O}' \mathbf{A}_i^T, \delta \mathbf{OB}_i^T]^T$$

\mathbf{E} 称为大跨度索并联机构的误差传递矩阵, 其中考虑了索并联机构的几个主要几何构型因素, 这样通过矩阵 \mathbf{E} , 所有误差源均可传递至索并联机构的末端。

3.2.2 误差空间内的力学特性研究

为了保证索并联机构的稳定性, 一般要求在工作空间内索的拉力满足一定条件。但是, 由于加工、安装、控制等影响, 机构实际工作中都存在误差, 当索并联机构运动至工作空间边界处时, 机构的终端误差可能使得机构的力学性能急剧下降。

在之前的索并联机构设计中, 往往只考虑工作空间内机构具有较好力特性即可, 忽略了机构终端许可误差对索拉力性能的影响, 在实际应用中机构可能出现虚牵现象, 影响机构稳定性。因此, 为了衡量大跨度索并联机构在某一姿态下的误差空间内力特性好坏, 定义一个可控体积指标 TCGVI 量化表示机构在该姿态下的力特性。

假定大跨度索并联机构的终端姿态为 $[x_0, y_0, z_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0]^T$, 设定其在该姿态下的许可误差为 $[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma]^T$:

$$\varepsilon_x \in (-x_r, x_r), \quad \varepsilon_y \in (-y_r, y_r), \quad \varepsilon_z \in (-z_r, z_r)$$

$$\varepsilon_\alpha \in (-\alpha_r, \alpha_r), \quad \varepsilon_\beta \in (-\beta_r, \beta_r), \quad \varepsilon_\gamma \in (-\gamma_r, \gamma_r)$$

则在该姿态下的许可误差空间为 \mathbb{V}_{err} :

$$\mathbb{V}_{err} = \left\{ x, y, z, \alpha, \beta, \gamma \middle| \begin{array}{l} x \in (-x_r + x_0, x_r + x_0) \\ y \in (-y_r + y_0, y_r + y_0) \\ z \in (-z_r + z_0, z_r + z_0) \\ \alpha \in (-\alpha_r + \alpha_0, \alpha_r + \alpha_0) \\ \beta \in (-\beta_r + \beta_0, \beta_r + \beta_0) \\ \gamma \in (-\gamma_r + \gamma_0, \gamma_r + \gamma_0) \end{array} \right\} \quad (3-16)$$

误差空间 \mathbb{V}_{err} 的广义体积 $V_{\mathbb{V}_{\text{err}}}$ 可以表示为

$$V_{\mathbb{V}_{\text{err}}} = \iiint_{\mathbb{V}_{\text{err}}} dx dy dz d\alpha d\beta d\gamma \quad (3-17)$$

为了保证索并联机构的稳定性,需要索拉力满足一定的条件,一般要求索拉力 $\sigma_{\max} \geq \sigma_i \geq \sigma_{\min}$,其中 σ_{\min} 为索许可最小拉力值, σ_{\max} 为索许可最大拉力值。为了描述大跨度索并联机构某一姿态的许可误差空间内的力特性,定义可控空间 $\mathbb{V}_{\text{control}}$ 为机构在某一姿态的许可误差空间内满足拉力条件的姿态的集合,即

$$\mathbb{V}_{\text{control}} = \{x_c, y_c, z_c, \alpha_c, \beta_c, \gamma_c \mid \sigma_{\max} \geq \sigma_i \geq \sigma_{\min}, i = 1, 2, \dots, m\} \quad (3-18)$$

$$\mathbb{V}_{\text{control}} \in \mathbb{V}_{\text{err}}$$

因此,可以得到大跨度索并联机构某一特定姿态下误差空间内的可控空间广义体积 $V_{\mathbb{V}_{\text{control}}}$ 为

$$V_{\mathbb{V}_{\text{control}}} = \iiint_{\mathbb{V}_{\text{control}}} dx dy dz d\alpha d\beta d\gamma \quad (3-19)$$

大跨度索并联机构某一姿态下的许可误差空间与可控空间的关系可用图 3-2 表示。

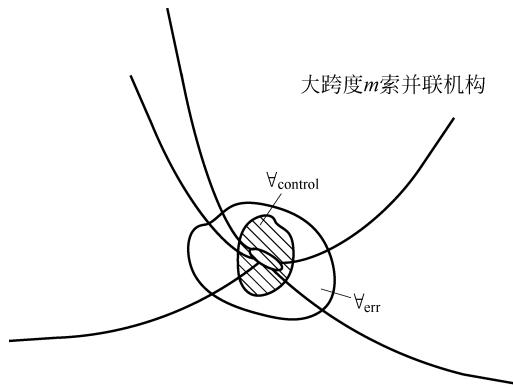


图 3-2 大跨度索并联机构某一姿态下的许可误差空间与可控空间

为了量化分析大跨度索并联机构在某一姿态误差空间内的力特性,采用一个索拉力可控广义体积 $\Theta_{\mathbb{V}}$ (tension controllability generalized volume index, TCGVI) 来表示:

$$\Theta_{\mathbb{V}} = \frac{V_{\mathbb{V}_{\text{control}}}}{V_{\mathbb{V}_{\text{err}}}} \quad (\Theta_{\mathbb{V}} \in (0, 1]) \quad (3-20)$$

$\Theta_{\mathbb{V}}$ 为误差空间内的可控空间 $\mathbb{V}_{\text{control}}$ 的广义体积 $V_{\mathbb{V}_{\text{control}}}$ 与许可误差空间 \mathbb{V}_{err} 的广义体积 $V_{\mathbb{V}_{\text{err}}}$ 之比。

$\Theta_{\mathbb{V}}$ 可以量化表示机构在该姿态下的可控性。当 $\Theta_{\mathbb{V}}$ 趋近 1 时,表示机构在该姿态下力特性较好,出现虚牵现象的几率很小。同理,当 $\Theta_{\mathbb{V}}$ 趋近 0 时,表示机构在该姿态下力特性较差,极可能出现虚牵现象。在对机构进行基于力特性的优化设计中应尽量使 $\Theta_{\mathbb{V}}$ 为 1。

为了分析全工作空间内各个姿态的误差空间内的索拉力特性,同样提出采用均方根的形式表示全局力特性 GTCGVI,定义为

$$\text{GTCGVI} = \sqrt{\frac{\sum_{t=0}^{t_0} (\Theta_{\mathbb{V}}(t))^2}{t_0}} \quad (t = 1, 2, \dots, t_0) \quad (3-21)$$

其中, t 为大跨度索并联机构工作空间内的样本点; t_0 为样本点总和。

本节讨论了大跨度索并联机构特定姿态下误差空间内的力特性指标与全工作空间内的全局力特性指标,旨在分析机构各个姿态点许可误差空间在全工作空间内的力学性能,也可以认为是评价机构在全工作空间内避免虚牵的能力。

3.3 FAST 馈源一级支撑系统相似模型的力特性分析

第 2 章中已经对 FAST 中 6 索并联机构及其相似模型基本建模方法进行了研究,本节将采用第 2 章相似模型给定的两条运行轨迹进行力特性研究,包括力特性及姿态关系分析、误差分析及其在许可误差空间内的力特性分析。

3.3.1 两条特定轨迹下的力特性及姿态研究

图 3-3 为 40m 模型 6 索并联机构的工作空间示意图。其动平台的工作空间为一个半径为 9.6m 的球冠面,最大观测角度为 $\pm 40^\circ$ 。

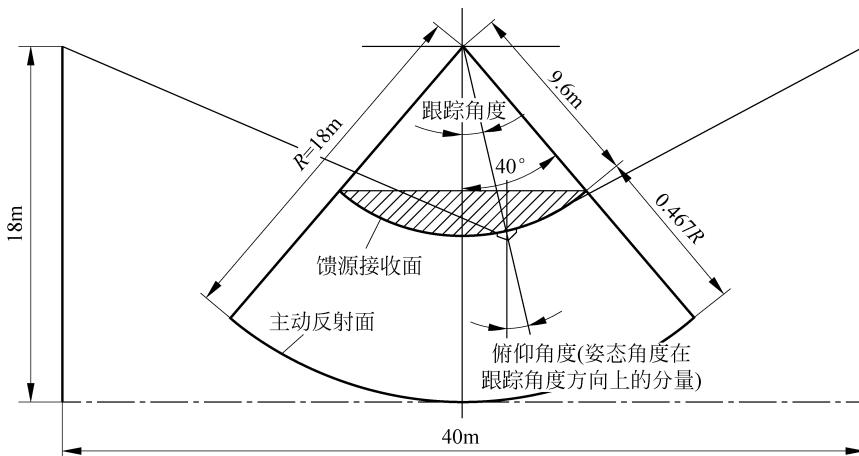


图 3-3 40m 模型 6 索并联机构的工作空间示意图

选取工作空间的两条边界轨迹作为研究对象,两条轨迹如图 3-4 所示。图 3-4(a)为轨迹 1,该轨迹为 6 索并联机构工作空间最高处形成的一个圆,其半径为 6.17m,离地面高度为 10.6m,要求索并联机构的姿态角度为 40° 倾仰角;图 3-4(b)所示为轨迹 2,该轨迹为 6 索并联机构工作空间表面上的一条轮廓线。

为防止控制中出现绳索虚牵并导致机构不可控的现象,给定索并联机构的最小预紧力 σ_{\min} 和最大拉力 σ_{\max} 。设馈源在某位置下要求轨迹跟踪倾仰角度为 α ,而绳索并联机构可达到轨迹倾仰角度为 β 。基于拉力约束的索并联机构的轨迹姿态角度解算可以表达为

目标函数:

$$\text{尽量逼近跟踪角度 } \min |\alpha - \beta|$$

约束函数:

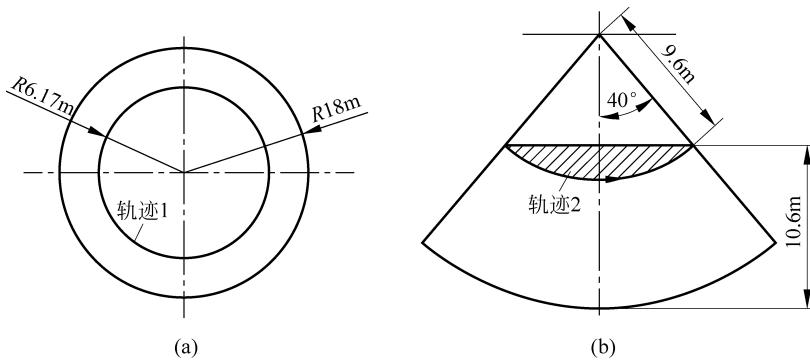


图 3-4 6 索并联机构工作空间中两条运动轨迹

(a) 轨迹 1; (b) 轨迹 2

$$\begin{cases} \sigma \geq [\sigma_{\min}, \dots, \sigma_{\min}]^T \\ \sigma \leq [\sigma_{\max}, \dots, \sigma_{\max}]^T \end{cases}$$

$$\sigma_{\min} = 500\text{N}, \quad \sigma_{\max} = 3000\text{N}$$

在某一位置下最逼近跟踪角度的索并联机构的轨迹俯仰角度记为 β_{\rightarrow_a} , 同时可以得到一组基于 β_{\rightarrow_a} 的绳索并联机构索拉力变化曲线, 用于研究该索并联机构的力特性。

下面对两条运动轨迹上的索拉力与姿态角度关系进行分析。

图 3-5(a)所示为轨迹 1 的轨迹俯仰角度 β_{\rightarrow_a} 值。轨迹 1 的 β_{\rightarrow_a} 值分布对称但有角度跳动, 均无法满足最大观测角度要求。轨迹 1 的索拉力变化曲线如图 3-5(b)所示, 通过拉力约束函数使其满足索拉力要求, 但是由于姿态角度出现跳动, 索拉力曲线变化也不平稳。

为了保证索拉力的连续性, 需要取 β^{opt} 的变化曲线为一条连续曲线, 轨迹 1 为工作空间边界处, 要求姿态角度较大, 因此取 β^{opt} 为 β_{\rightarrow_a} 的内切线, 如图 3-5(c)所示, 得到 6 绳索并联机构在该处的最大俯仰角度为 16.9° , 并得到优化索拉力优化曲线如图 3-5(d)所示。

同理, 也可以得到轨迹 2 的 β_{\rightarrow_a} 变化曲线与要求俯仰角度对比图。如图 3-6(a)所示, 6 索并联机构的俯仰角度在 $x = [-6.17\text{m}, -1.85\text{m}] \cup [1.85\text{m}, 6.17\text{m}]$ 处, 不能满足要求。

轨迹 2 的索拉力变化曲线如图 3-6(b)所示, 通过拉力约束函数可以满足索拉力要求, 但是索拉力曲线连续性并不理想, 在一些运动时刻出现索拉力接近索拉力条件边界。为使索拉力变化均匀, 变化率变小, 对轨迹 2 的索拉力进行优化。

由于索拉力随时间的变化情况会直接影响控制系统的实时性能, 为使机构在达到较大姿态角度的同时可以有较好的力学特性, 采用全局最大与最小索拉力差值 GTCI_{\max} 作为姿态优化指标。

$$\text{GTCI}_{\max} = \sqrt{\frac{\sum_{t=0}^{t_0} (\max(\sigma_i(t) - \sigma_j(t)))^2}{t_0}} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, m; i \neq j)$$

如图 3-7 所示, 给出 7 条二次曲线逼近 β_{\rightarrow_a} , 得到一组俯仰角度 β 优化曲线函数:

$$\beta_k^{\text{opt}} = \begin{cases} a_k x + b_k & x = [-6.17, 0] \\ a_k x - b_k & x = [0, 6.17] \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, 7)$$

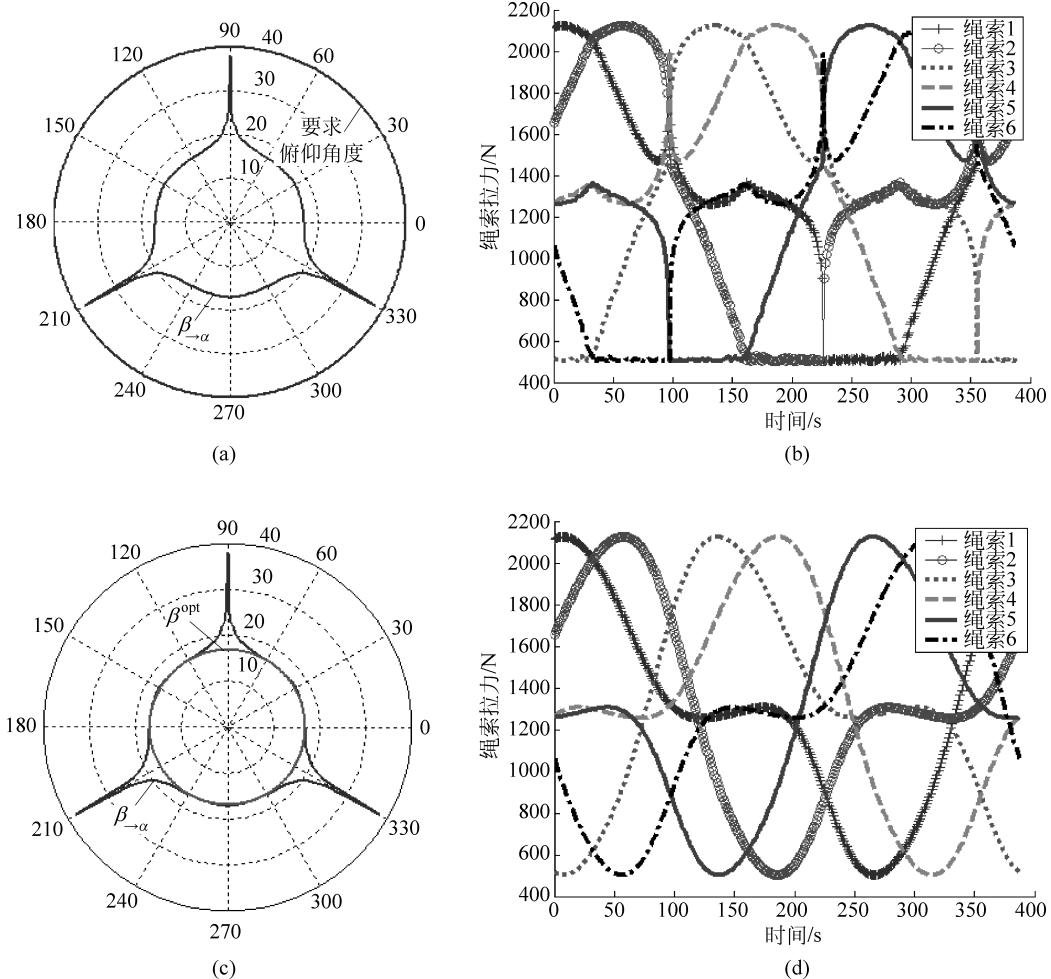


图 3-5 轨迹 1 的索拉力特性研究及优化

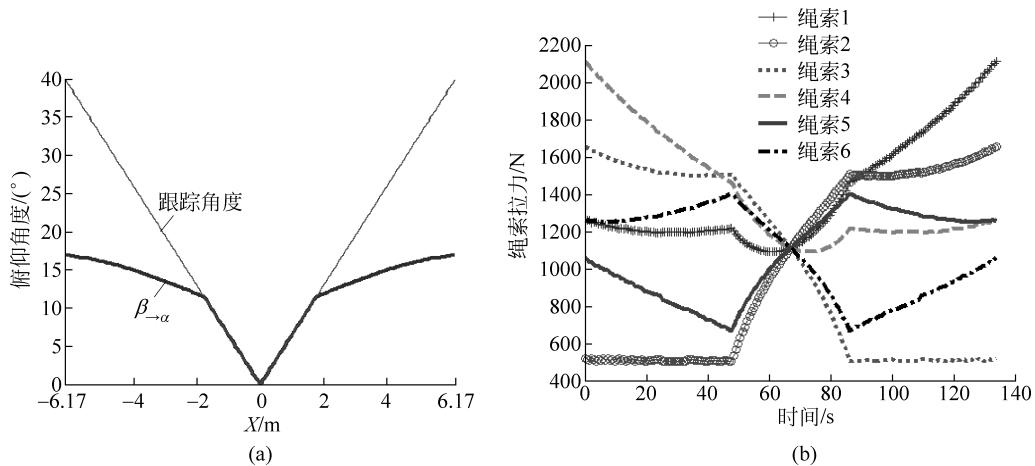
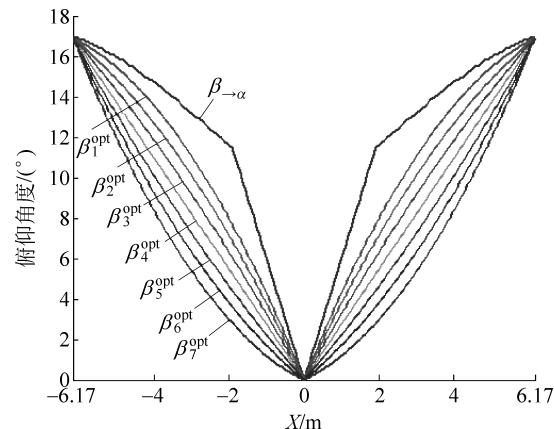
(a) 轨迹 1 的 β_{α} 值; (b) 轨迹 1 的索拉力变化曲线; (c) 轨迹 1 的 β^{opt} 值; (d) 轨迹 1 的索拉力优化曲线

图 3-6 轨迹 2 的索拉力特性研究

(a) 6 绳索并联机构的需求跟踪角度和 β_{α} 角度; (b) 轨迹 2 的索拉力变化曲线

图 3-7 7 条 $\beta_{\rightarrow \alpha}$ 二次逼近曲线

俯仰角度 β 优化曲线函数系数如表 3-1 所示。

表 3-1 俯仰角度 β 优化曲线函数系数

系数	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
a_k	-0.3	-0.2	-0.1	-2.74	0.1	0.2	0.3
b_k	-4.59	-3.97	-3.36	0	-2.12	-1.51	-0.89

通过对上述 7 条俯仰角度优化曲线的全局最大与最小索拉力差值进行分析, 得到 $GTCI_{max}$ 随俯仰角度曲线变化时的变化值, 如图 3-8 所示。

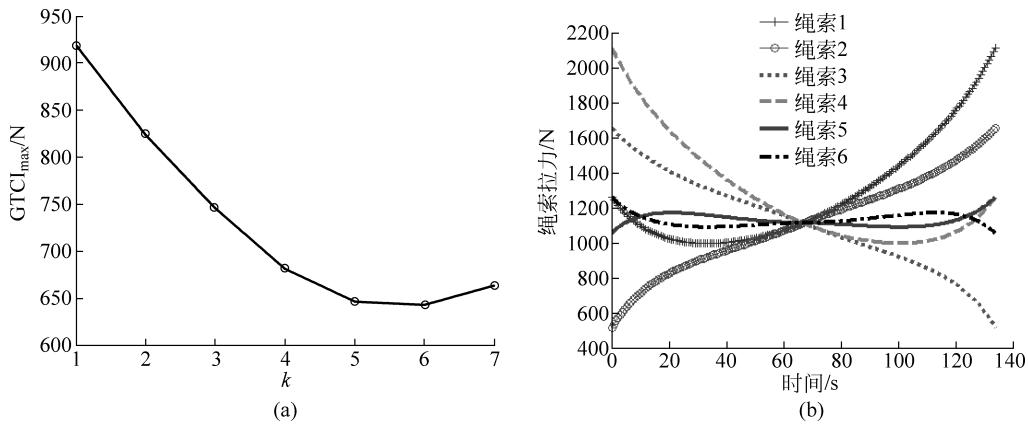


图 3-8 轨迹 2 的优化曲线

(a) $GTCI_{max}$ 曲线; (b) 轨迹 2 的索拉力优化变化曲线

通过上述分析可以知道, 随着姿态角度优化曲线与 $\beta_{\rightarrow \alpha}$ 越来越远, $GTCI_{max}$ 曲线呈现先降后增的趋势。可以看出, β_k^{opt} ($k=4, 5, 6$) 俯仰角度优化曲线可以具有较好的力学特性, 保证索并联机构拉力均匀变化。为了得到较大的轨迹姿态角度, 这里选择 β_5^{opt} 作为该轨迹上的俯仰角度变化曲线, 用于进一步研究。图 3-8(b) 给出了在该轨迹上基于 β_5^{opt} 的俯仰角度曲线上的索拉力变化图, 与图 3-6(b) 相比, 机构的索拉力分布明显更均匀, 索拉力特性