第1章 行列式

对于含有 n 个方程的 n 元线性方程组，有时需要直接从线性方程组的系数及常数项判别该方程组解的情形，这需要有 n 阶行列式的概念.

1.1 二阶、三阶行列式

设以 x_1，x_2 为未知元的二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 为第 i 个方程第 j 个未知元的系数，$b_i(i=1,2)$ 为第 i 个方程的常数项，利用消元法可求得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2, \qquad (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

如何简化上述解的表达式，以更便于记忆？

1. 内容要点与评注

为了便于记忆表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，引进记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，令 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，这个表达式称为**二阶行列式**，它由二元一次方程组(1.1)的未知元系数组成(同一方程的系数依次放在同一行上，同一未知元的系数依次放在同一列上)，故也称为该线性方程组的**系数行列式**，显然依照二阶行列式的概念可知

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

于是对于二元一次方程组(1.1)，上述结论可以叙述如下.

命题 1 当方程组(1.1)的系数行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，则方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

上述表达式的分母是共同的,均为方程组的系数行列式,分子的区别在于分别是用方程组的常数项替换系数行列式的第 1 列和第 2 列而得的二阶行列式.

对于以 x_1,x_2,x_3 为未知元的三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$为第 i 个方程中 x_j 的系数,$b_i(i=1,2,3)$为第 i 个方程的常数项.

利用消元法同理可得

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32},$$
$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_2$$
$$=a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{12}b_3,$$
$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_3$$
$$=a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32},$$

当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq 0$ 时,方程组有唯一解:

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}},$$
$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}},$$
$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}.$$

为了便于记忆表达式

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

引进记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

这个表达式称为**三阶行列式**,它由三元一次方程组未知元的系数组成(同一方程的系数依次放在同一行上,同一未知元的系数依次放在同一列上),故也称为该方程组的**系数行列式**,从左上角至右下角的连线称为行列式的**主对角线**,从左下角至右上角的连线称为行列式的**副对角线**,带正号的 3 项分别为位于主对角线上以及与之平行的线上的 3 个元素之积,带负号的 3 项分别为位于副对角线上以及与之平行的线上的 3 个元素之积.

利用三阶行列式的记法易知

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32}.$$

对于三元一次方程组(1.2),上述结论可以叙述如下.

命题 2 当方程组(1.2)的系数行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 时,则方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

上述表达式的分母是共同的,均为方程组的系数行列式,分子的区别在于分别是用方程组的常数项替换系数行列式的第 1 列、第 2 列和第 3 列而得的三阶行列式.

三阶(二阶)行列式的每一项是来自不同行、列的 3 个(2 个)元素的乘积.

对于含 2 个方程 2 个未知元的二元一次方程组,当系数行列式不等于 0 时,方程组有唯一解,该唯一解可利用二阶行列式求得.

对于含 3 个方程 3 个未知元的三元一次方程组,当系数行列式不等于 0 时,方程组有唯一解,该唯一解可利用三阶行列式求得.

对于上述方程组的系数行列式等于 0,或者所含方程个数与未知元个数不相等的情形,将在第 2 章作系统讨论.

2. 典型例题

例 1.1.1 利用二阶行列式,判断二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -5, \\ x_1 + 7x_2 = 6 \end{cases}$$

是否有唯一解? 如果有唯一解,求出其解.

解 该方程组的系数行列式为 $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 2\times7-(-3)\times1=17\neq0$,依命题 1,方程组

有唯一解，且唯一解为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}-5 & -3\\ 6 & 7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 7\end{vmatrix}}=\frac{-17}{17}=-1,\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}2 & -5\\ 1 & 6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 7\end{vmatrix}}=\frac{17}{17}=1.$$

例 1.1.2　利用三阶行列式，判断三元一次方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3=3,\\ 6x_1+5x_2+x_3=0,\\ 3x_1\qquad -x_3=1\end{cases}$$

是否有唯一解. 如果有唯一解，求出其解.

解　该方程组的系数行列式为

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 6 & 5 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{vmatrix}&=2\times 5\times(-1)+(-1)\times 1\times 3+4\times 6\times 0-4\times 5\times 3\\ &\quad-(-1)\times 6\times(-1)-2\times 1\times 0\\ &=-79\neq 0,\end{aligned}$$

依命题 2，方程组有唯一解，且唯一解为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\ 0 & 5 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 6 & 5 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-36}{-79}=\frac{36}{79},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 6 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 6 & 5 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{vmatrix}}=\frac{49}{-79}=-\frac{49}{79},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 6 & 5 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 6 & 5 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-29}{-79}=\frac{29}{79},$$

其中

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\ 0 & 5 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}&=3\times 5\times(-1)+(-1)\times 1\times 1+4\times 0\times 0-4\times 5\times 1\\ &\quad-(-1)\times 0\times(-1)-3\times 0\times 1\\ &=-36,\end{aligned}$$

类似还可得 $\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 6 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=49$，$\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 6 & 5 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=-29$.

习题 1-1

1. 利用二阶行列式，判断二元一次方程组
$$\begin{cases} x_1-2x_2=-4, \\ 3x_1+5x_2=1 \end{cases}$$
是否有唯一解.如果有唯一解，求出其解.

2. 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

3. 利用三阶行列式，判断三元一次方程组
$$\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad =1, \\ \qquad 8x_2+4x_3=-2, \\ -3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$
是否有唯一解？如果有唯一解，求出其解.

1.2 n 元排列

从二阶行列式的表达式可知，它由两项组成：$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，前一项带正号，后一项带负号，各项符号缘何而定？观察这两项的区别仅在于列的标号的排列不同，它们分别是：12，21，恰好对应于 1，2 两个数字的全部排列.

从三阶行列式的表达式可知，它由 6 项组成：
$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$
前三项带正号，后三项带负号，各项符号缘何而定？观察这 6 项的区别仅在于列的标号的排列不同，它们分别是：123，231，312，321，213，132，恰好对应于 1，2，3 三个数字的全部排列.

由此可知，为了给出 n 阶行列式的定义，需要首先讨论 n 个正整数组成的全排列及其相关性质.

1. 内容要点与评注

n 个不同的正整数的一个全排列称为一个 n 元排列. n 元排列的总数为 $n!$.

注 一般地，我们考虑由 $1,2,\cdots,n$ 组成的 n 元排列，并讨论其性质，这些性质对于由任意 n 个不同的正整数组成的 n 元排列也成立，比如 $2,3,\cdots,n,n+1$.

定义 1 在一 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，任取一对数 $i_k,i_l(k<l)$，如果 $i_k<i_l$，那么称这一数对组成一个**顺序**，如果 $i_k>i_l$，那么称这一数对组成一个**逆序**，一个 n 元排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

逆序数为偶数(奇数)的排列称为**偶排列**(**奇排列**).

n 元排列 $12\cdots n$ 称为**自然排列**，也称**标准排列**.

将一排列中任意两个数字位置对调，称为一次**对换**.

定理 1　经一次对换，排列改变奇偶性.

定理 2　任一 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 与自然排列 $12\cdots n$ 之间可以经一系列对换互变，且所作对换的次数与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 具有相同的奇偶性.

事实上，可经 1 次或 0 次对换将元素"1"换到第 1 个位置，再依次将元素 $2,3,\cdots,n$ 换到第 $2,3,\cdots,n$ 个位置，假设经过 s 次对换变为自然排列，因为自然排列为偶排列，则 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 经过 s 次奇偶性的改变成为偶数，故 s 与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 奇偶性相同，即

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^s.$$

◆

2. 典型例题

例 1.2.1　求 7 元排列 5236714 的逆序数，并且指出它的奇偶性.

分析 1　对于 n 元排列，从 1 开始，考查 1 的前(左)面有几个数，即构成几个逆序，再考查 2 前面有几个比 2 大的数，即构成几个逆序，依次类推，直至考查 $n-1$ 的逆序(n 与其前面的数都不构成逆序)，所有数对逆序的总和为该 n 元排列的逆序数.

解法 1　从 1 开始，考查它前面有几个数，再考查 2 前面有几个比它大的数，以此下去，……，直至考查 6 前面有几个比它大的数，构成逆序的数对是

$$51,21,31,61,71,52,53,54,64,74,$$

因此 $\tau(5236714)=10$，从而排列 5236714 为偶排列.

分析 2　对于 n 元排列，从 n 开始，考查 n 后(右)面有几个数，即构成几个逆序，再考查 $n-1$ 后面有几个比 $n-1$ 小的数，即构成几个逆序，依次类推，直至 2 的逆序(1 与其后面的数都不构成逆序)，所有数对逆序的总和为该 n 元排列的逆序数.

解法 2　从 7 开始，考查它后面有几个数，再考查 6 后面有几个比它小的数……，直至考查 2 后面有几个比它小的数，构成逆序的数对是

$$71,74,61,64,52,53,51,54,31,21,$$

因此 $\tau(5236714)=10$，从而 7 元排列 5236714 为偶排列.

计算逆序数时，无论选择上述哪一种方法，都要求统一朝一个指定方向，由左向右看或者由右向左看，依次考查每个数与其他数构成的逆序.

评　计算 n 元排列逆序数就是以自然排列为标准，针对任一数对，考查是否为逆序，确定所有数对逆序的总数.

例 1.2.2　求 n 元排列 $(n-1)(n-2)\cdots321n$ 的逆序数，并且讨论它的奇偶性.

分析　可以考虑从 n 开始考查逆序，再考查 $n-1$ 的逆序，依次类推.

解　由于 n 处在末位，与其前面每一数字都不构成逆序，考查 $n-1$，$n-1$ 与后面 $n-2$，$n-3,n-4,\cdots,3,2,1$ 构成 $n-2$ 个逆序，$n-2$ 与后面 $n-3,n-4,\cdots,3,2,1$ 构成 $n-3$ 个逆序……2 与后面的 1 有 1 个逆序，因此

$$\tau((n-1)(n-2)\cdots321n)=n-2+n-3+\cdots+2+1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

当 $n=4k$ 时，$\frac{(n-1)(n-2)}{2}=(2k-1)(4k-1)$；当 $n=4k+1$ 时，$\frac{(n-1)(n-2)}{2}=2k(4k-1)$；当 $n=4k+2$ 时，$\frac{(n-1)(n-2)}{2}=2k(4k+1)$；当 $n=4k+3$ 时，$\frac{(n-1)(n-2)}{2}=$

$(2k+1)(4k+1)$.

因此,当 $n=4k$ 或 $n=4k+3$ 时,$(n-1)(n-2)\cdots 321n$ 为奇排列;当 $n=4k+1$ 或 $n=4k+2$ 时,$(n-1)(n-2)\cdots 321n$ 为偶排列.

注 也可先从 1 开始考查,1 与其前面数字构成 $n-2$ 个逆序,2 与其前面数字构成 $n-3$ 个逆序,……,直至 $n-1$ 与其前面的数字都不构成逆序.

例 1.2.3 已知 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n$ 的逆序数为 k,求 n 元排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$ 的逆序数.

分析 因为自然排列 $12\cdots(n-1)n$ 的逆序数为 0,其顺序的总数为$\frac{n(n-1)}{2}$,任一 n 元排列都可由自然排列经有限次对换而得,而每一次对换,其顺序数减少的个数恰好等于其逆序数增加的个数,所以该排列的顺序数与逆序数总和为$\frac{n(n-1)}{2}$.

解 依题设,$\tau(i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n)=k$,即 n 元排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$ 的顺序数为 k,所以

$$\tau(i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1)=\frac{n(n-1)}{2}-k.$$

评 $\tau(i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n)=\frac{n(n-1)}{2}-\tau(i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1)$.

例 1.2.4 证明在由 $1,2,\cdots,n$ 构成的全部 $n(n>1)$元排列中,奇排列与偶排列各占一半.

分析 依定理 1,偶排列经对换第 1,2 位数字后成为奇排列.

证 设在全部 $n(n>1)$元排列中,偶排列有 i 个,奇排列有 j 个,则 $i+j=n!$,对换所有 i 个偶排列中排在第 1,2 位的数字,得 i 个奇排列,因为在 n 元排列中,所有奇排列共计为 j 个,所以 $i\leqslant j$.同理对换所有 j 个奇排列中排在第 1,2 位的数字,得 j 个偶排列,同理 $j\leqslant i$,故$i=j=\frac{n!}{2}$.

注 对换 i 个偶排列第 1,2 位的数字,所得的 i 个奇排列必是所有 j 个奇排列中某 i 个,故 $i\leqslant j$.强调对换 1,2 位数字是避免重复.

例 1.2.5 设由 $1,2,\cdots,n$ 组成的n 元排列 $i_1i_2\cdots i_kj_1j_2\cdots j_{n-k}$ 中,

$$i_1<i_2<\cdots<i_k,j_1<j_2<\cdots<j_{n-k},$$

求排列 $i_1i_2\cdots i_kj_1j_2\cdots j_{n-k}$ 的逆序数.

分析 从该排列的首位数 i_1 开始考查,其后面必有 i_1-1 个数小于它.由左至右,依次类推.

解 在 i_1 后面,比 i_1 小的数有 i_1-1 个(在数 $j_1,j_2,\cdots,j_{n-k}$ 中),即有 i_1-1 个逆序,在 i_2 后面,比 i_2 小的数有 i_2-1-1 个(除 i_1),即有 i_2-2 个逆序,……,依次类推,在 i_k 后面,比 i_k 小的数有 $i_k-1-(k-1)$个,即有 i_k-k 个逆序,依题设,在 $j_1,j_2,\cdots,j_{n-k}$ 中,每个数后面都没有比其小的数字,逆序均为 0,因此

$$\tau(i_1i_2\cdots i_kj_1j_2\cdots j_{n-k})=(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_k-k)=\sum_{l=1}^{k}i_l-\frac{k(k+1)}{2}.$$

注 $\tau(i_1i_2\cdots i_k)=0,\tau(j_1j_2\cdots j_{n-k})=0$,而 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_kj_1j_2\cdots j_{n-k}$ 的逆序是由数 $j_1,j_2,\cdots,j_{n-k}$ 中可能有数字小于 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 中某个数造成的.

评　在排列 $i_1i_2\cdots i_kj_1j_2\cdots j_{n-k}$ 中,因为 $i_1i_2\cdots i_k$ 和 $j_1j_2\cdots j_{n-k}$ 没有逆序,则 $i_1i_2\cdots i_kj_1j_2\cdots j_{n-k}$ 的逆序只需考查 $j_1j_2\cdots j_{n-k}$ 中是否有小于 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 的数.

习题 1-2

1. 求下列各排列的逆序数,并且指出它们的奇偶性:
(1) 6542173;　(2) 15243876;　(3) 93746528(2 为最小整数).
2. 在下列由数 1,2,…,9 组成的 9 元排列中,确定 i,j,使
(1) $172i963j4$ 为奇排列;　(2) $73i58j269$ 为偶排列.
3. 求下列排列的逆序数:
(1) n 元排列:$34\cdots(n-1)n12$;
(2) $2n$ 元排列:$(2n)(2n-2)\cdots42(2n-1)(2n-3)\cdots31$.
4. 在由 $1,2,\cdots,n$ 组成的某 n 元排列中,位于第 k 个位置的 n 构成多少个逆序?
5. 在由 $1,2,\cdots,n$ 组成的所有 n 元排列中,一共有多少个逆序?

1.3　n 阶行列式的定义

二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,它是 2! 项的代数和,其中每一项包含来自二阶行列式的不同行、不同列的 2 个元素的乘积,把这 2 个元素按照行标自然顺序排列,此时发现其列标排列为偶排列(奇排列)时,该项带正号(负号),比如 $a_{11}a_{22}(a_{12}a_{21})$,于是二阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

其中 j_1j_2 是 1, 2 的某个 2 元排列, $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对所有 1, 2 的 2 元排列取和.

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

它是 3! 项的代数和,其中每一项包含来自三阶行列式不同行、不同列的 3 个元素的乘积,把这 3 个元素按照行标自然顺序排列,此时发现其列标排列为偶排列(奇排列)时,该项带正号(负号),比如 $a_{11}a_{22}a_{33},a_{12}a_{23}a_{31},a_{13}a_{21}a_{32}(a_{13}a_{22}a_{31},a_{12}a_{21}a_{33},a_{11}a_{23}a_{32})$. 于是三阶行列式可表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是 1,2,3 的某个 3 元排列, $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有 1,2,3 的 3 元排列取和.

1. 内容要点与评注

定义 1 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 是 $n!$ 项的代数和，每一项都包含来自不同行、不同列的 n 个元素的乘积，把这 n 个元素按照行标自然顺序排列，当列标排列为偶排列时，该项带正号，当列标排列为奇排列时，该项带负号，于是 n 阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{1.3}$$

其中列标排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的某一 n 元排列，$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 $1,2,\cdots,n$ 的 n 元排列取和，行列式记作 $\det(a_{ij})$ 或 $\det(a_{ij})_n$ 或 D 或 D_n. (1.3)式称为 n 阶行列式的**完全展开式**，组成行列式的每个 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式的**元素**，i 称为 a_{ij} 的**行标**，j 称为 a_{ij} 的**列标**，a_{ij} 称为行列式的 (i,j) **元**.

命题 1 设 n 阶行列式 $\det(a_{ij})$，$i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $k_1 k_2 \cdots k_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的两个 n 元排列，则

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_n k_n} \tag{1.4}$$

也是行列式 $\det(a_{ij})$ 的项.

证 不妨设(1.4)式中 $a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_n k_n}$ 可经 s 次互换元素变成

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

因乘法满足交换律，即 $a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_n k_n} = a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$，其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的某一 n 元排列. 同时行标排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与列标排列 $k_1 k_2 \cdots k_n$ 分别经过 s 次对换变为 $12\cdots n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$，排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $k_1 k_2 \cdots k_n$ 的奇偶性都改变了 s 次，依 1.2 节定理 2，有

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} = (-1)^s, (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} = (-1)^s (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)},$$

于是

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} = (-1)^{2s+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)},$$

从而 $(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_n k_n}$ 对应行列式中一项 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$.

◆

特别地，当排列 $k_1 k_2 \cdots k_n$ 为自然排列 $12\cdots n$ 时，$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$ 也是行列式的项，因此 n 阶行列式还可定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n},$$

其中行标排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的某一 n 元排列，$\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 元排列取和.

注　n 阶行列式的每一项都包含来自行列式的不同行、不同列的 n 个元素乘积.

由 $1,2,\cdots,n$ 组成的 n 元排列共有 $n!$ 种，从而决定 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对 $n!$ 项取和.

在 $n!$ 种 n 元排列中，奇排列、偶排列各占一半，所以在 n 阶行列式的完全展开式中，带正号的项与带负号的项数同为$\dfrac{n!}{2}$个.

2. 典型例题

例 1.3.1　主对角线之下的元素都为零的行列式称为**上三角行列式**. 计算下述 n 阶上三角行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

分析　n 阶行列式的完全展开式的每一项包含来自行列式不同行、不同列的 n 个元素乘积，第 n 行有 $n-1$ 个零元素，第 $n-1$ 行有 $n-2$ 个零元素，……

解　依 n 阶行列式的定义，有

$$D_n = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{(n-1)j_{n-1}} a_{nj_n},$$

每一项都包含来自行列式不同行、不同列的 n 个元素连乘，其中但凡有一个元素为 0，该项必为 0，不作考虑. 下面仅考虑可能不为零的项. 因为第 n 行仅一个元素可能不为 0，因此，从 a_{nj_n} 开始考虑，a_{nj_n} 来自第 n 行，故仅当列标 $j_n=n$ 时，有可能 $a_{nj_n}\neq 0$，故第 n 行取 a_{nn}，再考虑 $a_{(n-1)j_{n-1}}$，同时注意到列标 $j_{n-1}\neq n$（第 n 列已取 a_{nn}），故仅当 $j_{n-1}=n-1$ 时，有可能 $a_{(n-1)j_{n-1}}\neq 0$，故第 $n-1$ 行取 $a_{(n-1)(n-1)}$，…，依次类推，只能 $j_{n-2}=n-2$，$j_{n-3}=n-3$，…，$j_2=2$，$j_1=1$，即在 D_n 的 $n!$ 项中，可作考虑的仅一项，就是 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 又因该项的行标排列为自然顺序，故该项符号应由 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}$ 确定，而 $\tau(12\cdots(n-1)n)=0$，于是

$$D_n = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注　主对角线之上的元素都为零的行列式称为**下三角行列式**. 主对角线之外的元素都为零的行列式称为**主对角行列式**（或称**对角行列式**）.

评　上、下三角（或对角）行列式等于其主对角线上元素之积.

例 1.3.2　副对角线之外的元素都为零的行列式称为**副对角行列式**. 计算下述 n 阶副对角行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & ⋰ & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$