

第1章 集 合

集合既是离散数学中最重要、最基础的基本概念，也是现代数学中最重要、最基础的基本概念之一。本章主要介绍朴素集合论中集合的定义、表示、运算、性质等基础知识，还将介绍一些集合的应用，主要是如何用集合定义新的代数结构。

1.1 集合基础

数学理论中的概念分为原始概念和派生概念。原始概念指的是不能严格定义的概念，不能严格定义有可能是因为没有能用于定义该概念的更原始的概念；其余的概念为原始概念的派生概念。

朴素集合论中的集合就是一个原始概念，只能给予直观描述，而不能给出严格定义。

定义 1.1.1 集合是由某些可以相互区分的任意对象汇集在一起所组成的一个整体。某个集合中的各个对象称为该集合的元素或成员。

在定义 1.1.1 中，需要重点关注的词是“相互区分”“任意对象”“汇集”，这些词体现了集合的主要特性，理解了这些词，集合的性质也就清楚了。

- 相互区分：指的是一个集合中的元素都是独一无二的，若有多个相同的元素，则只保留一个。例如， $\{1, 2, 3, 2, 3, 3\}$ 只能记作集合 $\{1, 2, 3\}$ ，相同的 3 个元素“3”和相同的 2 个元素“2”只能保留一个，即 $\{1, 2, 3, 2, 3, 3\} = \{1, 2, 3\}$ ，该集合只有 3 个元素。
- 任意对象：指的是同一个集合中的元素可以是不同类的，没有强制要求必须为相同种类的对象。例如，对集合 $\{1, 2, 3, \text{欧洲}, \text{亚洲}, 39^\circ\text{C}\}$ ，该集合的元素为自然数、大洲名和温度值。
- 汇集：指的是集合中元素的排列是无序的，没有哪个元素排前面，哪个元素排后面的强制要求。例如， $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{2, 3, 1\}$ ，都代表是同一个集合。

例 1.1.1 此处给出一些集合的示例：

- 所有中文字的集合；
- 10 以内的素数，即 $\{2, 3, 5, 7\}$ ；
- 前 4 个英文字母的集合，即 $\{'a', 'b', 'c', 'd'\}$ ；
- 以集合 $\{2\}$ 和 $\{3\}$ 的元素为元素的集合，即 $\{2, 3\}$ ；
- 以集合 $\{2\}$ 和集合 $\{3\}$ 为元素的集合，即 $\{\{2\}, \{3\}\}$ ；

- 以集合 $\{2\}$ 的元素和集合 $\{3\}$ 为元素的集合, 即 $\{2, \{3\}\}$. □

从例 1.1.1 可知, 集合的一般表示形式是用一对花括号 ($\{\}$) 将集合中的元素括起来, 元素间以逗号 ($,$) 分隔。

通常, 用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合, 用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示元素。

对任意对象 a , 其与任意集合 A 的关系只有两种, 且二者必居其一, 而不会都成立:

- a 在集合 A 中, 此时称“对象 a 属于集合 A ”, 记为 $a \in A$;
- a 不在集合 A 中, 此时称“对象 a 不属于集合 A ”, 记为 $a \notin A$ 。

根据不同标准, 可对集合进行分类。以集合内元素个数为依据, 可将集合分为空集与非空集合、有限集合与无限集合。

定义 1.1.2 设 A 为任一集合, $|A|$ 表示集合 A 中的元素个数。

- (1) 若 $|A| = 0$, 则称 A 为空集, 即 $A = \{\}$, 记为 $\emptyset$;
- (2) 若 $|A| \neq 0$, 则称 A 为非空集合;
- (3) 当 A 为非空集合时, 若 $|A| = n$, 其中 n 为自然数, 则称 A 为有限集合; 若 $|A| = \infty$, 则称 A 为无限集合。

例 1.1.2 各类集合举例如下。

- (1) $\{1, 2, 3\}$ 、 $\{'a', 'b', 'c', \dots, 'z'\}$ 为有限集合, 元素个数分别为 3 和 26;
- (2) 自然数集合 $\mathbb{N}$ 、有理数集合 $\mathbb{Q}$ 、整数集合 $\mathbb{I}$ 、实数集合 $\mathbb{R}$ 、复数集合 $\mathbb{C}$ 、偶自然数集合 $\mathbb{E}_v$ 、奇自然数集合 $\mathbb{O}_d$ 、正整数集合 $\mathbb{I}_+$ 、负整数集合 $\mathbb{I}_-$ 、正实数集合 $\mathbb{R}_+$ 与负实数集合 $\mathbb{R}_-$ 都是无限集合;
- (3) $\{x|x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x < 0 \text{ 且 } x > 0\}$ 、 $\{x|x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x^2 + x + 1 = 0\}$ 为空集。 □

定义 1.1.3 令 A, B 为任意两个集合:

- (1) 若对每个 $a \in A$, 都有 $a \in B$, 则称 A 为 B 的子集 (A 包含于 B 或 B 包含 A), 记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ 。
- (2) 若有 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称 A 等于 B , 记为 $A = B$; 否则, 称 A 不等于 B , 记为 $A \neq B$ 。
- (3) 若有 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 为 B 的真子集 (A 真包含于 B 或 B 真包含 A), 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ 。

这 3 种关系的描述, 是判断集合之间关系的准则, 也是证明集合之间关系的依据。根据定义, 如要判断某个集合 A 是否为另一个集合 B 的子集, 则需考查集合 A 的每个元素, 看是否也属于集合 B 。

要证明集合 A 是否为集合 B 的子集时, 需要结合问题的已知条件, 证明集合 A 的每个元素也属于集合 B 即可。要证明集合 A 是否为集合 B 的真子集时, 首先可证明 $A \subseteq B$, 再证明 B 中至少有一个元素 b , 使得 $b \notin A$ 。而要判断或证明 $A = B$, 则要判断或证明它们所包含的元素完全相同, 或证明 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 。

集合的表示方法有多种, 对任意集合 A , 常用的表示方法有以下几种。

(1) 列举法: 将集合中的所有元素依照任意一种次序不重复地枚举出来, 并用一对花括号括起来。例如 $A = \{ 'a', 'b', 'c', 'd' \}$, 以及例 1.1.1 中的示例。

(2) 部分列举法: 将集合中的部分元素依照任意一种次序不重复地列举出来, 未列举的部分用 “ $\dots$ ” 表示。这些未列举出来的元素可以通过部分列举出的元素所依照次序的构造规律推算出来。然后, 将列举和未列举的元素用一对花括号括起来。例如 $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, 可知未列举出来的元素为 3、4、5、6、7 和 8。又例如 $A = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$, 可知未列举出来的元素为 12、15 等后续的 3 的倍数。

(3) 命题法: 通过给出一个与集合中元素有关的命题来定义或约束集合中的元素, 只有满足命题的对象才是集合中的元素。即对任意对象 a , $a \in A$ 当且仅当 $P(a)$ 为真, 其中 $P(a)$ 为关于 a 的命题。所谓命题, 指的是有确定真假含义的陈述语句。因此, 命题法表示集合通常的格式为 $A = \{a | P(a)\}$ 或 $A = \{a : P(a)\}$ 。例如 $A = \{a | a \in \mathbb{R} \text{ 且 } a^2 - 2a + 1 = 0\} = \{1\}$ 。

(4) 归纳定义法: 给出集合 A 的一个包含必要且足够的元素的子集 S_0 , 以及一组规则, 从 S_0 的元素出发, 依据这些规则所得到的元素仍都是 A 中的元素。即从 S_0 开始, 对其中每个元素不断应用这组规则, 就能将 A 中所有元素构造出来。归纳定义法通常由以下三部分构成。

① 基本项: 已知的 A 中的某些元素构成的集合 S_0 , 即 $S_0 \subseteq A$, 并保证其不为空。这是构造 A 的基础。

② 归纳项: 一组规则, 从 A 现有元素出发, 应用这组规则, 能将 A 中所有元素构造出来。这是构造 A 的关键步骤。

③ 极小化: 如果集合 $S \subseteq A$ 也满足 (1) 和 (2), 则 $S = A$ 。这说明 A 中的每个元素都能通过若干次应用 (1) 和 (2) 构造出来, 且保证构造出来的 A 是最小集合, 既不会遗漏、也不会引入额外的元素。极小化保证了 A 的唯一性。

以前述集合示例 $A = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$ 为例, 展示如何用归纳定义法定义该集合。

例 1.1.3 用归纳定义法定义集合 $A = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$ 如下:

(1) $\{0\} \subseteq A$;

(2) 若 $a \in A$, 则 $(a + 3) \in A$;

(3) 如果集合 $S \subseteq A$ 也满足 (1) 和 (2), 则 $S = A$ 。 □

归纳定义法其实是一个动态过程, 从基础项开始, 不断应用归纳规则, 达到构造出 A 所有元素的目的。以例 1.1.3 为例:

(1) 开始时, A 中只有元素 0;

(2) 第 1 次应用归纳规则, 有 $0 + 3 = 3 \in A$, 则 $A = \{0, 3\}$;

(3) 在更新后的 A 上第 2 次应用归纳规则, 有 $0 + 3 = 3 \in A$ 和 $3 + 3 = 6 \in A$, 因此有 $A = \{0, 3, 3, 6\} = \{0, 3, 6\}$ 。

(4) 以此类推, 在每次更新后的集合上不断应用归纳规则, 即可将 A 构造出来。

对不同的集合，极小化这一步在书写时都是一样的，因此常常可省略不写，但并不表示没有这一环节。

与其他表示方法相比，归纳定义法的优势在于它能够用有限条规则表示包含无穷多元素的集合，这一点非常有利于编程实现。以例 1.1.3 为例，可用如下的程序，按需生成集合 A 。例如 $\text{genA}(\{0\}, 12)$ 可返回由前 13 个元素组成的集合。此处 $\text{genA}()$ 函数为递归函数，在第 5 行被调用。第 5 行的 set 将 list 类型的数据转换为集合类型数据，“ $|$ ”运算符为 Python 集合并运算符。

代码 1.1 生成集合 A 前 $n+1$ 项的 Python 程序

```

1 def genA(S, n):
2     if n == 0:
3         return S
4     else:
5         return genA(S|set([x+3 for x in S]), n-1)

```

在集合以及集合关系上有一些性质，了解和掌握这些性质，可以有助于集合相关问题的求解。

定理 1.1.1 若 A 、 B 与 C 为任意集合，则有：

- (1) $\emptyset \subseteq A$;
- (2) $A \subseteq A$;
- (3) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$ ，则 $A \subseteq C$;
- (4) 若 $A \subset B$ 且 $B \subset C$ ，则 $A \subset C$ 。

证明：

(1) 用反证法。假设 $\emptyset \subseteq A$ 不成立，则必存在某个 $a \in \emptyset$ ，使得 $a \notin A$ 。但是， $a \in \emptyset$ 与 $\emptyset$ 为空集矛盾。所以假设不成立，即 $\emptyset \subseteq A$ 。

(2) 对任意的元素 $a \in A$ ，有 $a \in A$ ，所以 $A \subseteq A$ 成立。

(3) 对任意的元素 $a \in A$ ，因为 $A \subseteq B$ ，所以有 $a \in B$ 。又因为 $B \subseteq C$ ，所以有 $a \in C$ ，因此， $A \subseteq C$ 成立。

(4) 因为 $A \subset B$ 且 $B \subset C$ ，所以 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$ ，由 (3) 可知 $A \subseteq C$ 。因为 $A \subset B$ ，所以存在 $a \in B$ 但 $a \notin A$ ，又因 $B \subseteq C$ ，故 $a \in C$ ，从而 $A \subset C$ 。□

证明该定理 $\emptyset \subseteq A$ 成立时，使用了反证法。应用反证法进行证明时，首先通过假设结论不成立，此处即 $\emptyset \not\subseteq A$ 。然后利用已知条件、问题相关基础知识、定理等，推导出与已知知识相矛盾的结论，表示假设不成立。而这种矛盾是由假设要证明的结论为假导致的，因此，即证明了结论为真。

其他三条性质的证明运用了集合间关系的定义，该定理的证明展示了这些定义的应用方法，读者在今后遇到涉及集合间关系的证明时，可借鉴这种思路。

定理 1.1.2 空集是唯一的。

证明：假设集合 A 、 B 为任意空集，则由定理 1.1.1 的 (1) 可知， $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 。由集合相等的定义有， $A = B$ 。所以，空集是唯一的。□

又可用反证法证明如下。

证明：假设空集不唯一。则至少有两个不相等的空集，设为 A 与 B 。由定理 1.1.1 的 (1) 可知， A 为空集， B 为集合，则 $A \subseteq B$ 。又 B 为空集， A 为集合，则 $B \subseteq A$ 。由集合相等的定义有 $A = B$ 。与假设 $A \neq B$ 矛盾。□

该定理的证明是典型的“唯一性”的证明，通常有两种证明“唯一性”的方法。一种方法是假设有多于一个，如两个满足条件的对象，然后根据已知条件、定义和定理等，证明这两个对象是相等的，由此证明是唯一的。另一种方法是反证法，假设不唯一，则至少有两个不相等的满足条件的对象，再由已知条件、定义和定理等，证明这两个对象相等，与假设矛盾，从而证明唯一。

集合 A 的子集也能作为元素构成新的集合。这样的集合中有一个特殊的集合，称为 A 的幂集。

定义 1.1.4 设 A 为任意集合，令 $\mathcal{P}(A) = \{B | B \subseteq A\}$ ，则称 $\mathcal{P}(A)$ 为 A 的幂集，又记为 2^A ，即 $2^A = \mathcal{P}(A)$ 。

例 1.1.4 易知：

- (1) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$;
- (2) $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$;
- (3) $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{a, b\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a, b\}\}, \{\emptyset, \{a, b\}\}\}$ 。

□

幂集具有以下一些性质。

定理 1.1.3 设 A 、 B 为任意两个集合，则有：

- (1) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$;
- (2) $A \in \mathcal{P}(A)$;
- (3) 若 $A \subseteq B$ ，则 $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$;
- (4) 若 $A \subset B$ ，则 $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ 。

证明：

- (1) 因为对任意集合 A 有 $\emptyset \subseteq A$ ，所以 $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ 。
- (2) 因为对任意集合 A 有 $A \subseteq A$ ，所以 $A \in \mathcal{P}(A)$ 。
- (3) 对任意元素 $a \in \mathcal{P}(A)$ 有 $a \subseteq A$ ，因为 $A \subseteq B$ ，所以有 $a \subseteq B$ ，即 $a \in \mathcal{P}(B)$ 。因此 $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ 成立。

- (4) 因为 $A \subset B$ ，所以 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ 。首先，由 (3) 可知，当 $A \subseteq B$ 时， $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ 。其次 $B \in \mathcal{P}(B)$ 且 $B \notin \mathcal{P}(A)$ ，即 $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$ 。綜上有 $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ 。

□

定理 1.1.4 若 A 为有限集, 则 $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

证明: 不妨设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 于是 $|A| = n$. 确定 A 的一个子集 B , 只需对每个 $1 \leq i \leq n$ 依次确定是否有 $a_i \in B$ 成立即可. 显然, 对每个元素 a_i 有两种选择. 因此 A 有 2^n 个不同的子集. $\square$

习题 1.1

1. 请判断下面的命题是否正确, 并说明理由:

- (1) $-12 \in \mathbb{N}$;
- (2) $0 \in \mathbb{N}$;
- (3) $-12 \in \mathbb{R}$;
- (4) $\frac{1}{123} \in \mathbb{Q}$;
- (5) $-1220 \in \mathbb{I}$;
- (6) $-9 \in \mathbb{I}_+$;
- (7) $-12 \in \mathbb{E}_v$;
- (8) $11 \in \mathbb{O}_d$;
- (9) $\frac{123}{456} \in \mathbb{R}_+$.

2. 用列举法给出下列集合:

- (1) 大于 2 且小于 7 的非负数整数的集合;
- (2) 小于 20 的素数的集合;
- (3) 不超过 65 的 3 与 4 的公倍数之正整数倍的集合;
- (4) 元音字母的集合.

3. 用命题法给出下列集合:

- (1) 大于 -10 且不超过 100 的整数的集合;
- (2) 集合 $\{3, 9, 27, 81, \dots\}$;
- (3) 集合 $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots\}$;
- (4) 被 5 除余 3 的所有整数的集合;
- (5) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

4. 用归纳定义法定义下列集合:

- (1) 允许有前 0 的八进制无符号整数的集合;
- (2) 不允许有前 0 的八进制无符号整数的集合;
- (3) 允许有前 0 和后 0 的有有限小数部分的十进制无符号实数的集合;
- (4) 不允许有前 0 的二进制无符号偶数的集合;
- (5) $\mathbb{E}_v$ 和 $\mathbb{O}_d$;

(6) 集合 $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$;

(7) 集合 $\{3, 9, 27, 81, \dots\}$ 。

5. 请证明, 对任意的集合 A , 有 $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + x + 1 = 0\} \subseteq A$ 。

6. 确定下列集合中哪些是相等的:

$A = \{x | x \text{ 为偶数且 } x^2 \text{ 为奇数}\}$;

$B = \{x | \text{有 } y \in \mathbb{I} \text{ 使 } x = 2y\}$;

$C = \{1, 2, 3\}$;

$D = \{0, 2, -2, 5, -3, 4, -4\}$;

$E = \{2x | x \in \mathbb{I}\}$;

$F = \{3, 3, 2, 1, 2\}$;

$G = \{x | x \in \mathbb{I} \text{ 且 } x^3 - 6x^2 - 7x - 6 = 0\}$ 。

7. 确定下列命题中哪些是正确的, 并简要说明理由。

(1) $\emptyset = \{\emptyset\}$;

(2) $\emptyset = \{0\}$;

(3) $|\emptyset| = 0$;

(4) $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 0$ 。

8. 确定下列关系中哪些是正确的, 并简要说明理由。

(1) $\emptyset \subseteq \emptyset$;

(2) $\emptyset \in \emptyset$;

(3) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$;

(4) $\emptyset \in \{\emptyset\}$;

(5) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$;

(6) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$;

(7) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$;

(8) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$ 。

9. 判断下面所陈述事实的正确性, 并简要说明理由。

(1) 集合 $\{y | y = x^2 - 1, x \in \mathbb{R}\}$ 与 $\{y | y = x - 1, x \in \mathbb{R}\}$ 的公共元素所组成的集合是 $\{0, 1\}$;

(2) 集合 $\{x | x - 1 < 0\}$ 与集合 $\{x | x > a, a \in \mathbb{R}\}$ 没有公共元素;

(3) 若集合 $M = \{a, b, c\}$ 中的元素是某个 $\triangle ABC$ 的三边长, 则 $\triangle ABC$ 一定不是等腰三角形;

(4) 对任意的集合 A 与 B , 若 $A \subset B$, 则集合 B 中至少有一个元素;

(5) 对任意的集合 A 与 B , 若 $A \subseteq B$, 则 $|A| < |B|$ 。

10. 设 A 、 B 、 C 为集合, 证明或用反例推翻以下命题:

(1) 若 $A \notin B$ 且 $B \notin C$, 则 $A \notin C$;

(2) 若 $A \in B$ 且 $B \notin C$, 则 $A \notin C$;

- (3) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \notin C$, 则 $A \notin C$;
- (4) 若 $A \in B$ 且 $B \in C$, 则 $A \in C$ 。
11. 若 A, B 为集合, 则 $A \subset B$ 与 $A \in B$ 能同时成立吗? 请证明你的结论。
12. 列出下列每个集合的所有子集:
- (1) $\{1, 2, 3\}$;
- (2) $\{1, \{2, 3\}\}$;
- (3) $\{\{1, \{2, 3\}\}\}$;
- (4) $\{\emptyset\}$;
- (5) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- (6) $\{\{1, 2\}, \{2, 1, 1\}, \{2, 1, 1, 2\}\}$;
- (7) $\{\{\emptyset, 2\}, \{2\}\}$ 。
13. 写出下列集合的幂集:
- (1) $\{a, \{b\}\}$;
- (2) $\{1, \emptyset\}$;
- (3) $\{x, y, z\}$;
- (4) $\{\emptyset, a, \{a\}\}$;
- (5) $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$ 。

1.2 集合运算

通常, 在讨论某类问题时, 往往会涉及一个固定集合, 它含有该类问题所涉及的全部对象。例如, 若讨论的某个问题涉及某所学校的学生时, 往往会将该校全体学生作为问题涉及的全体对象, 构成一个固定集合。这类问题相关的固定集合被称为全集, 常用 U 表示。此时, 问题中涉及的其他集合就是全集 U 的子集。在前面的例子中, 全校学生的集合即为全集, 若问题涉及某个班的全体学生, 则该班学生构成的集合就是全校学生集合这个全集的子集。

有了全集概念后, 可引入集合的图形化表示方法, 即文氏图 (Venn 图)。在文氏图表示法中, 通常以一个矩形框 (的内部区域) 表示全集, 各个集合以圆或椭圆 (的内部区域) 来表示。图 1.1 中, 矩形框内部区域表示全集, 框内椭圆内部区域表示集合 A 。图 1.2 为 $A \subseteq B$ 的文氏图表示。

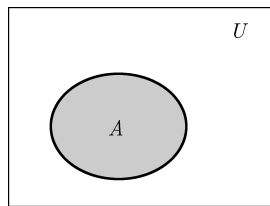


图 1.1 文氏图表示集合示例

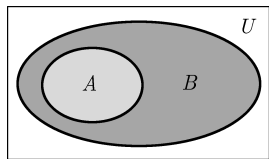


图 1.2 $A \subseteq B$ 的文氏图

有了全集概念后,可定义集合上的运算,主要包括 5 种。

定义 1.2.1 设 A 、 B 为任意两集合,集合运算如下。

- (1) 并运算: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$;
- (2) 交运算: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。一般当 $A \cap B = \emptyset$ 时,称 A 与 B 不相交;
- (3) 差运算: $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$;
- (4) 对称差运算: $A \oplus B = \{x | (x \in A \text{ 且 } x \notin B) \text{ 或 } (x \in B \text{ 且 } x \notin A)\} = A \cup B - A \cap B$;
- (5) 补集: $\sim A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\} = U - A$ 。

由上述运算的定义可知,当从运算结果的集合中取元素时,元素应满足集合运算结果对应的集合定义。例如,对任意的 $a \in A \cup B$,有 $a \in A$ 或 $a \in B$ 。当考查不在集合运算结果中的对象时,该对象其实应满足集合运算结果中元素命题的否定。例如,对任意的 $a \notin A \cup B$,有 $a \notin A$ 且 $a \notin B$ 。请读者自行写出其他运算结果集合中命题的否定形式。

集合运算的文氏图如图 1.3 所示,阴影部分表示运算结果,白色部分表示不在运算结果内的元素。下面通过简单示例,可进一步理解集合运算。

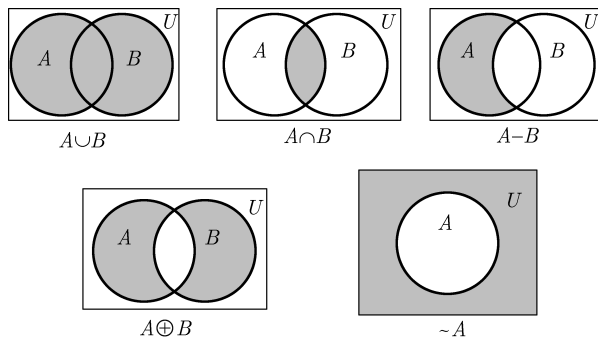


图 1.3 集合运算的文氏图

例 1.2.1 令集合 $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ 且 } 5 \leq x \leq 10\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ 且 } (x \leq 10 \text{ 且 } x \text{ 是素数})\}$, 全集 $U = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ 且 } 1 \leq x \leq 10\}$ 。则

- (1) $A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
- (2) $A \cap B = \{5, 7\}$;
- (3) $A - B = \{6, 8, 9, 10\}$;
- (4) $A \oplus B = \{2, 3, 6, 8, 9, 10\}$;
- (5) $\sim A = \{1, 2, 3, 4\}$ 且 $\sim B = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$ 。

□

两个集合的并、交运算可以推广到多个集合的并、交运算。令 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为任意 n 个集合,则 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 可记作 $\bigcup_{i=1}^n A_i$, $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ 可记作 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 。与两个集合的并、交运算定义类似, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x | \text{有 } A_i (1 \leq i \leq n) \text{ 使得 } x \in A_i\}$, $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x | \text{对每个 } A_i (1 \leq i \leq n) \text{ 有 } x \in A_i\}$ 。

在集合的运算上, 有一些常用的性质。

定理 1.2.1 设 A 、 B 与 C 为任意集合, 则

- (1) $A \subseteq A \cup B$ 且 $B \subseteq A \cup B$;
- (2) $A \cap B \subseteq A$ 且 $A \cap B \subseteq B$;
- (3) $A - B = A \cap \sim B$;
- (4) $A - B \subseteq A$;
- (5) 若 $A \subseteq B$, 则 $\sim B \subseteq \sim A$;
- (6) 若 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq C$, 则 $A \cup B \subseteq C$;
- (7) 若 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$, 则 $A \subseteq B \cap C$ 。

证明:

(1) 对任意的元素 $a \in A$, 若 $a \notin A \cup B$, 则有 $a \notin A$ 且 $a \notin B$, 与 $a \in A$ 矛盾, 所以假设 $a \notin A \cup B$ 不成立, 因此 $a \in A \cup B$, 即 $A \subseteq A \cup B$ 。同理可证 $B \subseteq A \cup B$ 。

(2) 对任意的元素 $a \in A \cap B$, 有 $a \in A$ 且 $a \in B$, 因此 $A \cap B \subseteq A$ 且 $A \cap B \subseteq B$ 。

(3) 对任意对象 a , 有 $a \in A - B$, 当且仅当 $a \in A$ 且 $a \notin B$, 当且仅当 $a \in A$ 且 $a \in \sim B$, 当且仅当 $a \in A \cap \sim B$ 。因此有 $A - B = A \cap \sim B$ 。

(4) 由 (3) 可知, $A - B = A \cap \sim B$, 由 (2) 可知 $A \cap \sim B \subseteq A$, 即 $A - B \subseteq A$ 。

(5) 对任意的元素 $b \in \sim B$, 则 $b \notin B$ 。因为 $A \subseteq B$, 所以 $b \notin A$, 即 $b \in \sim A$ 。所以 $\sim B \subseteq \sim A$ 。

(6) 对任意的元素 $a \in A \cup B$, 则 $a \in A$ 或 $a \in B$ 。若 $a \in A$, 由 $A \subseteq C$ 可知 $a \in C$, 若 $a \in B$, 由 $B \subseteq C$ 可知 $a \in C$ 。无论哪种情况, 都有 $a \in C$, 因此 $A \cup B \subseteq C$ 。

(7) 对任意的元素 $a \in A$, 因为 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$, 则 $a \in B$ 且 $a \in C$, 即 $a \in B \cap C$, 所以有 $A \subseteq B \cap C$ 。□

定理 1.2.2 设 A 、 B 为任意集合, 则以下条件互相等价:

- (1) $A \subseteq B$;
- (2) $A \cup B = B$;
- (3) $A = A \cap B$ 。

证明:

(1) (1) $\Rightarrow$ (2): 首先, 由定理 1.2.1 的 (1) 可知 $B \subseteq A \cup B$ 。其次, 对任意元素 $a \in A \cup B$, 则 $a \in A$ 或 $a \in B$, 因为 $A \subseteq B$, 因此无论 $a \in A$ 或 $a \in B$, 都有 $a \in B$, 所以 $A \cup B \subseteq B$ 。综上可证 $A \cup B = B$ 。

(2) (2) $\Rightarrow$ (3): 首先, 由定理 1.2.1 的 (2) 可知 $A \cap B \subseteq A$ 。其次, 对任意的元素 $a \in A$, 则 $a \in A \cup B$, 由已知 $A \cup B = B$ 可得 $a \in B$, 即 $a \in A$ 且 $a \in B$, 因此有 $a \in A \cap B$, 即 $A \subseteq A \cap B$ 。综上可证 $A \cup B = B$ 。

(3) (3) $\Rightarrow$ (1): 对任意的元素 $a \in A$, 由已知 $A = A \cap B$ 可知 $a \in A$ 且 $a \in B$, 所以 $A \subseteq B$ 。□