

卫星通信信号在发射端需要首先调制到卫星信号载频上才能实现星地之间的远距离传输,在接收端需要将带通信号转化为基带信号,将基带信号转化为原始通信信号,才能最后解调出有用信息。载波同步技术是卫星通信信号接收过程中实现信号还原的关键技术,载波同步过程是指在接收端将接收到的带通信号还原为基带信号,并消除信号中多普勒效应的过程。

据此,我们可将载波同步过程分为两个阶段:第一阶段是实现带通信号到基带信号的转换,可以根据通信协议中的载波频率定义,通过本地振荡器产生本振信号,也可以通过通信信号中自带的载波频率信息产生本振信号。这一过程可以称为载波剥离过程;第二阶段是消除基带信号残留频率偏差,经过载波剥离后信号应还原为基带信号,但是由于信号收发设备间的相对运动和信号传输过程中的噪声干扰,并不能完全消除接收信号中的频率偏移。为了消除残留频率偏差所提出的载波同步技术是本书讨论的重点。

根据同步对象的不同,本书将载波同步分为载波频率同步和载波相位同步两部分。根据辅助方法的不同,本章又将各部分细分为数据辅助和非数据辅助载波同步技术分别进行介绍。另外,由于编码辅助和其他一些同步技术可同时给出频率同步和相位同步的估计值,因此单列出来归为一节。

3.1 基本原理

在载波同步过程中,根据同步参数估计范围的不同可以分为载波捕获和载波跟踪两个阶段,也可以称为载波粗同步和载波细同步。在实际的信号处理算法中,载波同步的实质是要给出每一时刻载波相位、频率及其各阶导数的联合估计值。

在载波同步过程中,载波频率捕获模块需要先成功捕获到导频信号,然后将导频信号的若干初始参数(通常为载波初始频偏及其各阶导数)传递至跟踪器。载波跟踪系统在收到捕获模块提供的辅助参数后,启动跟踪处理,实时估计输入信号的载波相位。捕获模块能够辅助跟踪模块快速锁定信号,实现准确、稳定的载波跟踪。捕获的精度对于跟踪器的入锁时间起决定性作用。捕获误差越大,则跟踪器入锁时间越长;当捕获误差超出一定范围时,甚至可能导致跟踪器永久不能锁定,无法正常工作。另一方面,捕获精度对于跟踪器的稳态输出误差并无明显影响,即只要捕获误差被限制在一定范围内(以跟踪器能够快速进入锁定状态

为准),则跟踪器的输出精度与初始误差无关。

信号模型

假设接收机已实现理想匹配滤波和符号同步,则载波同步系统结构可简化为如图 3-1 所示的形式。

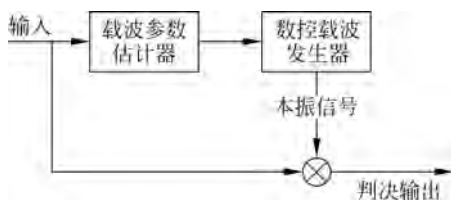


图 3-1 简化载波同步系统结构

在如图 3-1 所示的载波同步系统中,输入信号 $r(k)$ 匹配滤波器滤波后以 T 为采样周期抽取的每符号最佳采样点,则

$$r(k) = c_k e^{j\theta(k)} + n(k) \quad (3-1)$$

其中, c_k 为调制数据, $\theta(k)$ 是由收发两端载波频率及初始相位偏差所致的时变相位误差函数, $n(k)$ 表示均值为 0、方差为 σ^2 的加性复高斯白噪声。通常,载波参数估计器只能处理纯载波信号。对于携带有调制数据的已调载波信号,需要在估计器前附加去调制模块,经去调制处理后的输出信号可等价于纯载波信号,但会造成一定的信噪比损失,损失大小与调制方式以及所选择的去调制方法均有关系。在不考虑调制数据的情况下,式(3-1)演变为

$$r(k) = e^{j\theta(k)} + n(k)$$

载波同步的核心任务即根据接收信号 $r(k)$,实时计算得到时变载波相位函数 $\theta(k)$ 的估计值 $\hat{\theta}(k)$ 。对于低轨道卫星高动态通信链路,对时变载波相位函数进行近似展开,得 $\theta(k)$ 的一阶递推近似表达式为^[1]

$$\theta(k) \approx \theta(k-1) + 2\pi f_0(k-1)T + \frac{1}{2}2\pi f_1(k-1)T^2 + \frac{1}{6}2\pi f_2(k-1)T^3 \quad (3-2)$$

已知 $\omega = 2\pi f$,因此上式也可改写为

$$\theta(k) \approx \theta(k-1) + \omega_0(k-1)T + \frac{1}{2}\omega_1(k-1)T^2 + \frac{1}{6}\omega_2(k-1)T^3 \quad (3-3)$$

对式(3-2)作差分运算,可将 f_0 、 f_1 、 f_2 分别作如下近似展开:

$$f_0(k) \approx f_0(k-1) + f_1(k-1)T + \frac{1}{2}f_2(k-1)T^2 \quad (3-4)$$

$$f_1(k) \approx f_1(k-1) + f_2(k-1)T \quad (3-5)$$

$$f_2(k) \approx f_2(k-1) \quad (3-6)$$

基于式(3-4)~式(3-6)给出的数学模型,为了能够实时计算时变载波相位函数的估计值 $\hat{\theta}(n)$,载波参数估计器需要支持四维实时参数估计,包括相位、频率及其一阶和二阶变化率的估计值。记载波参数估计器的输出估计量为矢量 $\hat{\mathbf{b}}_k$,则 $\hat{\mathbf{b}}_k = [\hat{\theta}(k), \hat{f}_0(k), \hat{f}_1(k), \hat{f}_2(k)]^T$,其中 $\hat{\theta}(k)$ 、 $\hat{f}_0(k)$ 、 $\hat{f}_1(k)$ 、 $\hat{f}_2(k)$ 分别为 $\theta(k)$ 、 $f_0(k)$ 、 $f_1(k)$ 、 $f_2(k)$ 的估计值。

在迭代更新过程中,数控载波发生器实时接收载波参数估计器传递的估计值 $\hat{\mathbf{b}}_k = [\hat{\theta}(k), \hat{f}_0(k), \hat{f}_1(k), \hat{f}_2(k)]^T$,并按下式构造时变载波相位函数对消信号

$$d(k) = e^{-j\theta(k)}$$

复数乘法器将对数控载波发生器产生的对消信号与输入信号 $r(k)$ 相乘,得

$$z(k) = r(k)e^{-j\theta(k)} = e^{-j\Delta\theta(k)} + n'(k)$$

其中, $\Delta\theta(k) = \hat{\theta}(k) - \theta(k)$, $n'(k) = e^{-j\Delta\theta(k)}$ 。

在不考虑噪声干扰的情况下,当载波同步系统锁定时,有 $\Delta\theta(k) = 0$,表明此时载波参数估计模块能够实时准确地给出输入信号相位、频偏及其一阶和二阶变化率的估计值。

3.2 载波频率同步技术

3.2.1 非数据辅助算法

非数据辅助算法是指不依赖于导频信号或前一观测时间间隔内的符号判决结果,根据当前符号数据实现载波频率估计的一类算法。本节将分别介绍理想定时同步和非理想定时同步两种情况下的载波频率同步技术,首先按照环路结构特点在开环和闭环两方面对载波频率同步技术分别进行讨论,然后介绍通过以上环路结构与不同估计算法相结合而发展出的一些非数据辅助载波频率同步技术。

1. 理想定时同步下的载波频率同步

1) 闭环载波频率同步

假设理想定时同步且满足奈奎斯特条件,在频率偏移量远小于符号速率的前提下,通过基于相关解调的闭环频率跟踪算法,可以实现非数据辅助的载波频率同步^[2]。本节将讨论 MPSK(Multiple Phase Shift Keying)调制和 QAM(Quadrature Amplitude Modulation)下的闭环载波频率同步。首先以 QPSK(Quadrature Phase Shift Keying)调制为例,图 3-2 是频率同步实现流程图。

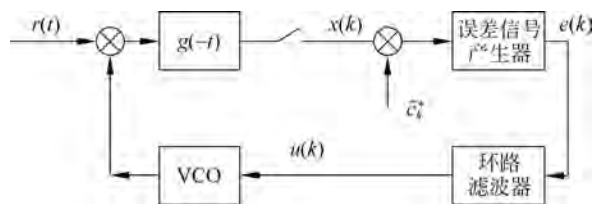


图 3-2 非数据辅助闭环同步算法流程图

匹配滤波器输出信号经定时采样,与来自检测器的符号判决数据的共轭复数相乘,消除数据符号影响后送至误差信号产生器,产生一个与实际频差和估计频差的差值成正比的误差信号,此误差信号经过环路滤波后用于控制压控振荡器(VCO)。通过闭环控制,使此信号频率跟随实际输入信号频率。从而实现对下变频信号中频率偏移的估计。

假设经下变频后信号的形式为:

$$r(t) = e^{j(2\pi f_d t + \theta)} \sum_i c_i g(t - iT - \tau)$$

由图 3-2 可见,匹配滤波器的输入为压控振荡器的输出与 $r(t)$ 之积,即

$$r(t)e^{j2\pi\hat{f}_d t} = e^{j(2\pi\Delta f t + \theta)} \sum_i c_i g(t - iT - \tau)$$

其中, $\Delta f = f_d - \hat{f}_d$, 从匹配滤波器输出的第 k 次采样的值为

$$y(k) = c_k e^{j\phi(k)}, \quad \phi(k) = 2\pi\Delta f(kT + \tau) + \theta \quad (3-7)$$

由于 PSK 调制信号的幅度为单位幅度,故 $y(k)$ 可以表示为

$$y(k) = e^{j\psi(k)} \quad (3-8)$$

结合式(3-7)和式(3-8),有

$$\psi(k) = \arg\{c_k\} + \phi(k)$$

下面的问题是寻找判决规则,是检测器做出判决 $c_k = e^{jm\pi/2}$, 其中 \hat{m} 为

$$\hat{m} = \arg\{\min_m \{|\psi(k) - m\pi/2|\}\}$$

判决规则的描述如图 3-3 所示,图中实线圆上的 4 个小圆圈代表了 QPSK 星座的位置。当将 $z(k) = y(k)\hat{c}_k$ 输入误差信号产生器时,由图 3-3 可见, $z(k)$ 的相位 $\psi(k)$ 在 $\pm\pi/4$ 的范围内,即

$$\arg\{z(k)\} = \{|\psi(k) - m\pi/2|\}_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

也即

$$\arg\{z(k)\} = \{2\pi\Delta f(kT + \tau) + \theta\}_{-\pi/4}^{\pi/4} \quad (3-9)$$

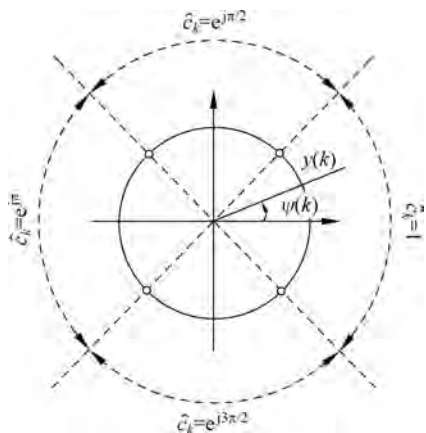


图 3-3 QPSK 调制方式频率区间判别规则

图 3-4 描述了在 $\Delta f > 0$ 或者 $\Delta f < 0$ 情况下 $\arg\{z(k)\}$ 随时间变化的曲线,可以看出,曲线呈锯齿形,并且根据 Δf 的符号变化会呈现正向坡度或者负向坡度。由此可以设置误差信号^[2]:

$$e(k) \triangleq \begin{cases} \arg\{z(k)\}, & |\arg\{z(k)\}| < \alpha \\ e(k-1), & \text{其他} \end{cases} \quad (3-10)$$

其中, α 是一个小于 $\pi/4$ 的正参数,图 3-5 描述了该准则的基本原理。

以上是关于 QPSK 调制下的闭环载波频率同步,将其扩展到 MPSK 范围,式(3-9)变为

$$\arg\{z(k)\} = \{2\pi\Delta f(kT + \tau) + \theta\}_{-\pi/M}^{\pi/M}$$

相应误差函数仍如式(3-10)所示, $\alpha < \pi/M$ 。

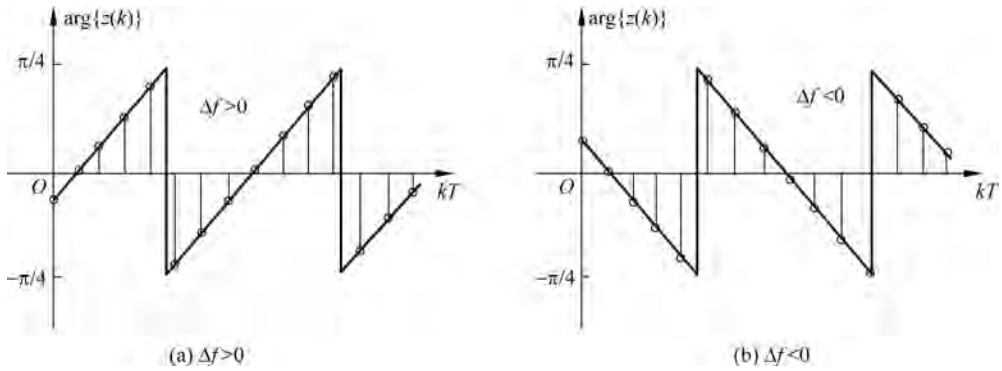


图 3-4 $\arg\{z(k)\}$ 与 f_d 的关系曲线

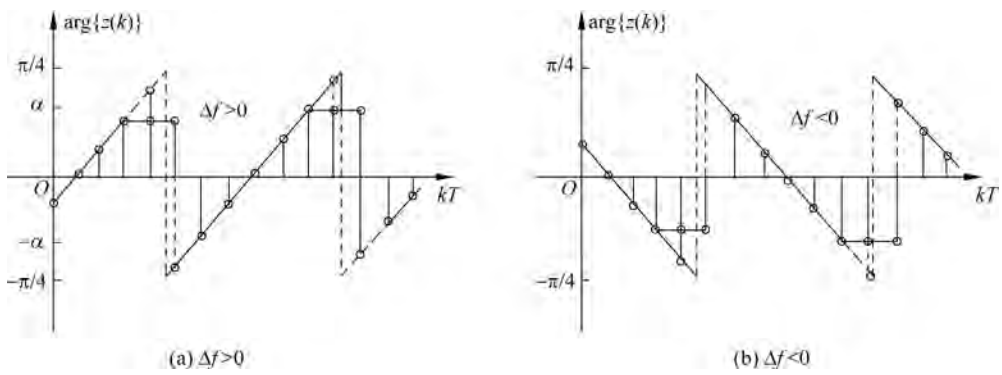


图 3-5 误差发生器的基本原理

对于 QAM 调制方式的处理可以采用星座图分解形式, 首先将图 3-6 中的星座点分为内环之内、内外环之间和外环之外 3 部分。内外环之间包含均匀分布的 8 个星座点, 故此部分的处理可以参照 8PSK 调制, 剩余部分的星座点分布规律与 QPSK 调制相似, 因此可以参照 QPSK 调制处理方式(见式(3-9))。内外环之间星座点误差处理函数:

$$e(k) \triangleq \begin{cases} \arg\{z(k)\}, & |\arg\{z(k)\}| < \alpha, \text{ 且 } z(k) \notin C \\ e(k-1), & \text{其他} \end{cases}$$

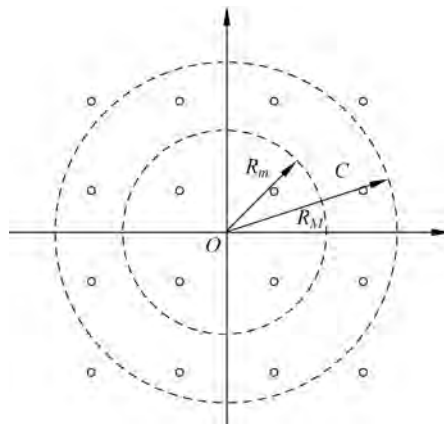


图 3-6 QAM 星座图

其中, C 的区域为

$$C = \{R_m < z(k) < R_M\}$$

2) 开环载波频率同步

闭环结构载波频率同步技术的反馈迭代过程使得算法估计时间过长,对于同步时间要求较高的突发通信条件不再适用。因此本节将以 QPSK 调制为例介绍开环载波频率同步技术。同样假设匹配滤波器输出为

$$y(k) = c_k e^{j[2\pi f_d(kT+\tau)+\theta]} + n(k) \quad (3-11)$$

由于 QPSK 的星座几何为 $\{e^{jm\pi/2}, m=0,1,2,3\}$, c_k 的四次方不再包含符号信息,因此对式(3-11)两边做四次方运算:

$$y^4(k) = c_k^4 e^{j[8\pi f_d(kT+\tau)+4\theta]} + n'(k) \quad (3-12)$$

对 $y^*(k-1)$ 也做四次方运算,与式(3-12)相乘后得

$$[y(k)y^*(k-1)]^4 = e^{j8\pi f_d T} + n''(k)$$

再经平滑滤波,得

$$\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} [y(k)y^*(k-1)]^4 = e^{j8\pi f_d T} + \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} n''(k)$$

假设上式中噪声项很小,对两边取幅角后可得

$$\hat{f}_d = \frac{1}{8\pi T} \arg \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} [y(k)y^*(k-1)]^4 \right\}$$

图 3-7 描述了开环频率估计的算法流程图。需要指出的是, $\arg \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} [y(k)y^*(k-1)]^4 \right\}$ 的范围应在 $\pm\pi$ 之内,因此其频率同步范围在 $\pm 1/8T$ 之内,图 3-8 描述了在 $N=100$, 满足奈奎斯特条件且滚降系数为 50% 情况下,频率估计值和实际频率值之间的关系曲线。可见,在 $|f_d T| < 1/8T$ 的范围内, $E(\hat{f}_d T)$ 和 $\hat{f}_d T$ 呈比例关系。图 3-9 给出了信噪比 E_b/N_0 和归一化频率估计值的关系。

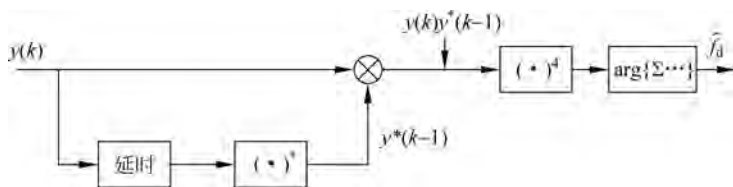


图 3-7 开环算法处理流程图

对于 MPSK 调制方式,可对匹配滤波器输出信号进行 M 次方处理得到:

$$y^M(k) = c_k^M e^{j[2M\pi f_d(kT+\tau)+M\theta]} + n'(k)$$

最终频率估计结果为

$$\hat{f}_d = \frac{1}{2M\pi T} \arg \left\{ \sum_{k=1}^{L_0-1} [y(k)y^*(k-1)]^M \right\}$$

此时频率估计范围为 $\pm 1/(2MT)$ 。

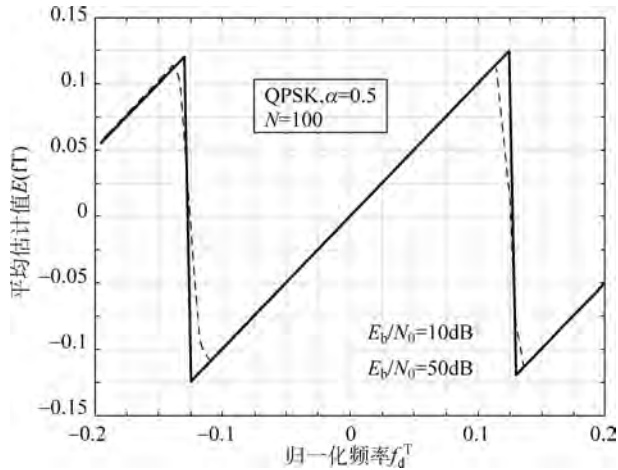


图 3-8 频率估计值和实际频率值的关系曲线

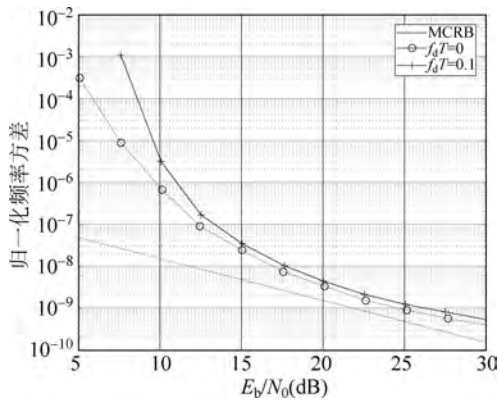


图 3-9 信噪比 E_b/N_0 与归一化频率估计值的关系

2. 非理想定时同步下的载波频率同步

1) 似然函数

假设存在定时误差且符号信息未知,重写信号模型

$$r(t) = s(t) + w(t)$$

$$s(t) = e^{j(2\pi f t + \theta)} \sum_i c_i g(t - iT - \tau)$$

其中, f 是未知常数,取值范围为 $\pm 1/T$; θ 是在 $[0, 2\pi)$ 范围服从均匀分布的随机变量; τ 为在 $[0, T)$ 范围服从均匀分布的随机变量; $\{c_i\}$ 表示零均值相互独立随机变量并满足:

$$E\{c_i c_k^*\} = \begin{cases} C_2, & i = k \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

并且 $\theta, \tau, \{c_i\}$ 相互独立,则似然函数可写作:

$$\Lambda(\mathbf{r} | \tilde{f}, \tilde{\theta}, \tilde{\tau}, \tilde{c}) = \exp \left\{ \frac{1}{N_0} \int_0^{T_0} \text{Re}[r(t) \tilde{s}^*(t)] dt - \frac{1}{2N_0} \int_0^{T_0} |\tilde{s}(t)|^2 dt \right\}$$

$$\tilde{s}(t) \triangleq e^{j(2\pi \tilde{f} t + \tilde{\theta})} \sum_i \tilde{c}_i g(t - iT - \tilde{\tau})$$

其中, N_0 为噪声方差。

关于频率的边缘似然函数可通过对 $\theta, \tau, \{c_i\}$ 求平均, 令

$$X_{rs} \triangleq \int_0^{T_0} \operatorname{Re}[r(t)\tilde{s}^*(t)] dt \quad (3-13)$$

$$X_{ss} \triangleq \int_0^{T_0} |\tilde{s}(t)|^2 dt \quad (3-14)$$

似然函数可展开为

$$\Lambda(\mathbf{r} | \tilde{f}, \tilde{\theta}, \tilde{\tau}, \tilde{c}) \approx 1 + \frac{1}{2N_0}(2X_{rs} - X_{ss}) + \frac{1}{8N_0^2}(2X_{rs} - X_{ss})^2 \quad (3-15)$$

由于 X_{rs}, X_{ss} 和 $X_{rs}X_{ss}$ 求平均后的期望值与 \tilde{f} 无关, 所以式(3-15)可简化为

$$\Lambda'(\mathbf{r} | \tilde{f}) \triangleq E_{\tilde{u}}\{X_{rs}^2\} \quad (3-16)$$

首先求解式(3-16)中的积分成分

$$\int_0^{T_0} r(t)\tilde{s}^*(t) dt \approx e^{-j\tilde{\theta}} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{c}_i^* x(iT + \tilde{\tau}) \quad (3-17)$$

其中, $N \triangleq T_0/T$ 表示观测间隔内的符号周期数, $x(iT + \tilde{\tau})$ 为匹配滤波器输出 $x(t)$ 在 $t = iT + \tilde{\tau}$ 的采样值:

$$x(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} r(\xi) e^{-j2\pi f \tilde{\tau}} g(\xi - t) d\xi \quad (3-18)$$

其中, $r'(t) \triangleq r(t)e^{-j2\pi f \tilde{\tau}}$ 。示意图如图 3-10 所示。

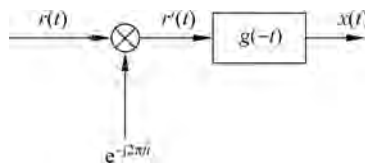


图 3-10 $x(t)$ 示意图

综合式(3-13)~式(3-17)可得

$$\begin{aligned} X_{rs} &= \frac{1}{2} e^{-j\tilde{\theta}} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{c}_i^* x(iT + \tilde{\tau}) + \frac{1}{2} e^{j\tilde{\theta}} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{c}_i x^*(iT + \tilde{\tau}) \\ X_{rs}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{c}_i^* \tilde{c}_k x(iT + \tilde{\tau}) x^*(kT + \tilde{\tau}) + \\ &\quad \frac{1}{4} e^{-j2\tilde{\theta}} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{c}_i^* \tilde{c}_k^* x(iT + \tilde{\tau}) x(kT + \tilde{\tau}) + \\ &\quad \frac{1}{4} e^{j2\tilde{\theta}} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{c}_i \tilde{c}_k x^*(iT + \tilde{\tau}) x^*(kT + \tilde{\tau}) \end{aligned} \quad (3-19)$$

因为 $e^{\pm j2\tilde{\theta}}$ 关于 θ 的均值为 0, 所以式(3-19)右边最后两项的期望为 0, X_{rs} 的期望为

$$E_{\tilde{\theta}, \tilde{c}}\{X_{rs}^2\} = \frac{C_2}{2} \sum_{i=0}^{N-1} |x(iT + \tilde{\tau})|^2$$

关于 τ 取平均后得到:

$$\Lambda'(\mathbf{r} | \tilde{f}) = \frac{C_2}{2T} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^T |x(iT + \tilde{\tau})|^2 d\tilde{\tau}$$

考虑到 N 与 T 的关系及 $t = iT + \tilde{\tau}$, 去除无关项后, 得到似然函数简化形式:

$$\Lambda''(\mathbf{r} | \tilde{f}) \triangleq \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

2) 闭环载波频率同步

闭环估计器即锁频环法是通过构造与频率估计值和真实频率值之间差值成正比的误差信号实现的, 通常采用回归模式。首先给出误差函数的构造方法:

通过对似然函数求最大值可以得到。显然, 似然函数的导数为零时似然函数达到最大值, 因此有

$$\frac{d\Lambda''(\mathbf{r} | \tilde{f})}{d\tilde{f}} = 2 \int_0^{T_0} \operatorname{Re} \left[x(t) \frac{\partial x^*(t)}{\partial \tilde{f}} \right] dt \quad (3-20)$$

又从式(3-18)可以得

$$\frac{\partial x(t)}{\partial \tilde{f}} = jy(t) - j2\pi tx(t)$$

其中,

$$y(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} r(\xi) e^{-j2\pi\tilde{f}\xi} 2\pi(t - \xi) g(\xi - t) d\xi$$

代入式(3-20), 有

$$\frac{d\Lambda''(\mathbf{r} | \tilde{f})}{d\tilde{f}} = 2 \int_0^{T_0} \operatorname{Im}[x(t)y^*(t)] dt$$

Im 表示取 z 的虚部。

由于匹配滤波函数 $h(t)$ 与 $g(t)$ 之间存在如下关系:

$$H(f) = j \frac{dG^*(f)}{df} \quad (3-21)$$

将式(3-21)中的 $2\pi g(-t)$ 定义为导数匹配滤波器。由于 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是低通滤波器(匹配滤波器和导数匹配滤波器)的输出, 假设 $G(f)$ 的带宽为 $\pm 1/T$, 因此 $\operatorname{Im}[x(t)y^*(t)]$ 的带宽为 $\pm 2/T$ 。根据 N 与 T 的关系可得

$$\frac{d\Lambda''(\mathbf{r} | \tilde{f})}{d\tilde{f}} \approx 2T_s \sum_{k=0}^{2N-1} \operatorname{Im}[x(kT_s)y^*(kT_s)] \quad (3-22)$$

其中, T_s 是采样速率。

直接求解方程(3-22)存在一定的困难, 则

$$\frac{d\Lambda''(\mathbf{r} | \tilde{f})}{d\tilde{f}} = 0$$

因此采用回归方式进行逐级逼近, 令

$$u(kT_s) = \sum_{i=k-N+1}^k \operatorname{Im}[x(iT_s)y^*(iT_s)]$$

当 $u(k) = 0$ 时取得最大似然值, 对应估计值即为真实值。因此可令

$$\tilde{f}[(k+1)T_s] = \tilde{f}(kT_s) + \gamma u(kT_s)$$

其中, γ 是一个常数。

由于频率估计更新速度是符号速率的一半($1/T_s = 2/T$), 为了将估计值更新速率提高到单位符号速率, 重新定义误差信号:

$$e(kT) \triangleq \frac{1}{2} \text{Im}[x(2kT_s)y^*(2kT_s)] + \frac{1}{2} \text{Im}\{x[(2k+1)T_s]y^*[(2k+1)T_s]\} \quad (3-23)$$

并将更新方程式(3-23)改写为

$$\tilde{f}[(k+1)T] = \tilde{f}(kT) + \gamma e(kT)$$

由此可构建锁频环路, 如图 3-11 所示。其中, MF (Matched Filter)、DMF (Derivative Matched Filter) 分别表示匹配滤波器和导数匹配滤波器。数字累积过程由环路滤波器完成, 压控振荡器用于产生本地振荡信号 $e^{-j\phi(t)}$, $\phi(t)$ 满足

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = 2\pi\hat{f}(kT), \quad kT \leq t \leq (k+1)T$$

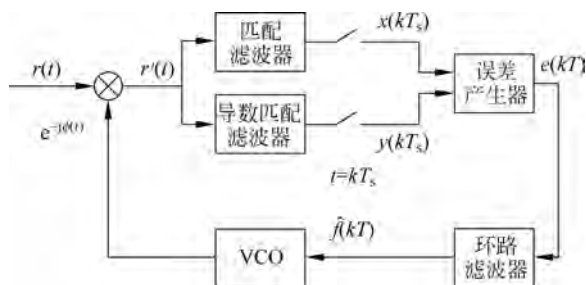


图 3-11 锁频环估计器框图

在实际应用中以数字形式呈现, $\phi(nT_N)$ 是对单位符号周期 T 内进行 N 点分段后的 $\phi(t)$ 的离散采样值, 满足如图 3-12 所示的关系 $kT \leq t \leq (k+1)T, T_N = T/N$ 。

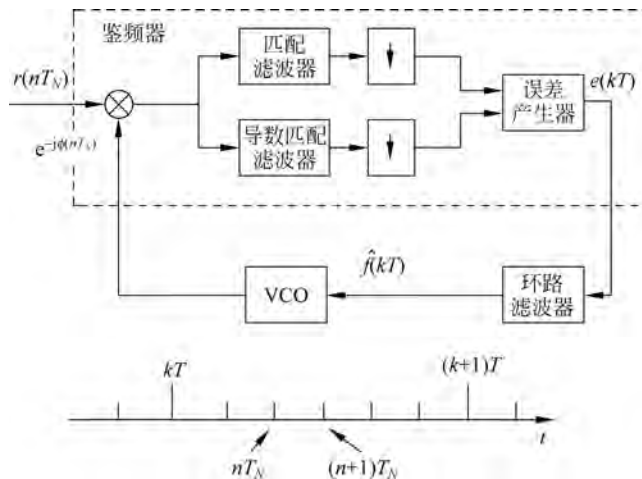


图 3-12 第 k 个符号区间

因此对于 $nT_N \leq t \leq (n+1)T_N$, 有

$$\phi[(n+1)T_N] = \phi(nT_N) + 2\pi \hat{f}(kT)T/N$$

其中, k 为符号索引, n 为采样值索引。

将图 3-12 中虚线框表示鉴频器, 图 3-12 就转换为我们常见的锁频环结构, 如图 3-13 所示。

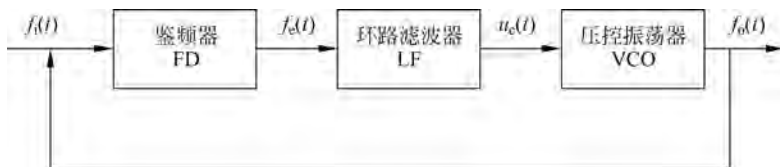


图 3-13 锁频环结构框图

锁频环由鉴频器 (Frequency Detector, FD)、环路滤波器 (Loop Filter, LF) 和压控振荡器 (Voltage Controlled Oscillator, VCO) 组成。常用的鉴频算法和误差函数形式如表 3-1 所示。

表 3-1 鉴频算法及特性^[3]

鉴频算法	频率误差函数	应用环境
$\frac{I \cdot Q}{t_2 - t_1}$	$\frac{\sin[2(\theta_2 - \theta_1)]}{t_2 - t_1}$	高信噪比时使用最佳, 运算量适中
$\frac{\text{sign}(I) \cdot Q}{t_2 - t_1}$	$\frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{t_2 - t_1}$	低信噪比时使用接近最佳, 运算量较小
$\frac{\text{atan}(Q/I)}{2\pi(t_2 - t_1)}$	$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi(t_2 - t_1)}$	最大似然估计器, 高低信噪比时使用均最佳, 运算量较大

环路滤波器是一个线性器件, 不仅可以实现低通滤波, 而且可以调整鉴相器的输出大小, 因此它对环路参数调整起着决定性作用。常用的一阶环路滤波器包括 RC 积分滤波器、无源比例积分滤波器、有源比例积分滤波器^[4]。

(1) RC 积分滤波器, 其传输函数为

$$F(s) = \frac{1}{1 + s\tau}$$

其中, $\tau = R \cdot C$ 是时间常数。电路结构如图 3-14 所示。

它具有低通特性, 且相位滞后, 当频率很高时, 幅度趋于零, 相位滞后接近 $\pi/2$ 。

(2) 无源比例积分滤波器, 其传输函数为

$$F(s) = \frac{1 + s\tau_2}{1 + s(\tau_1 + \tau_2)}$$

其中, $\tau_1 = R_1 \cdot C$, $\tau_2 = R_2 \cdot C$ 是时间常数。电路结构如图 3-15 所示。

(3) 有源比例积分滤波器, 其传输函数为

$$F(s) = \frac{1 + s\tau_2}{s\tau_1}$$

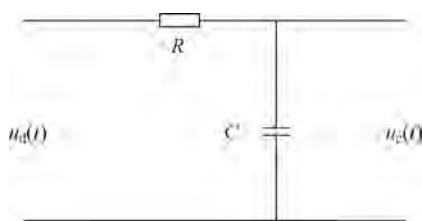


图 3-14 RC 积分滤波器结构框图

有源比例积分滤波器的电路的结构如图 3-16 所示,它是由运算放大器、电阻和电容组成的。在图 3-16 中,A 是运算放大器无反馈时的电压增益。当 A 值很大时,滤波器传递函数可近似为上式。

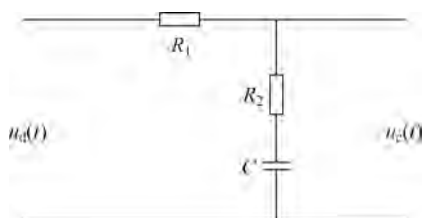


图 3-15 无源比例积分滤波器结构框图

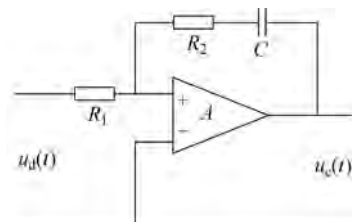


图 3-16 有源比例积分滤波器结构框图

三种滤波器对应传输函数 $F(s)$ 、开环传递函数 $G(s)$ 、系统传递函数 $H(s)$ 、误差传递函数 $H_e(s)$ ($k = k_d \cdot k_o$),如表 3-2 所示。

表 3-2 不同环路滤波器的环路相关函数^[4]

	RC 积分滤波器二阶环 (一型)	无源比例积分滤波器 二阶环(一型)	理想二阶环 (有源比例积分滤波器)(二型)
$F(s)$	$\frac{1}{1+s\tau_1}$	$\frac{1+s\tau_2}{1+s\tau_1}$	$\frac{1+s\tau_2}{s\tau_1}$
$G(s)$	$\frac{k/\tau_1}{s^2+s/\tau_1}$	$\frac{k(1/\tau_1+s\tau_2/\tau_1)}{s^2+s/\tau_1}$	$\frac{sk\tau_2/\tau_1+k/\tau_1}{s^2}$
$H(s)$	$\frac{k/\tau_1}{s^2+s/\tau_1+k/\tau_1}$	$\frac{sk\tau_2/\tau_1+k/\tau_1}{s^2+s(1/\tau_1+k\tau_2/\tau_1)+k/\tau_1}$	$\frac{sk\tau_2/\tau_1+k/\tau_1}{s^2+sk\tau_2/\tau_1+k/\tau_1}$
$H_e(s)$	$\frac{s^2+s/\tau_1}{s^2+s/\tau_1+k/\tau_1}$	$\frac{s^2+s/\tau_1}{s^2+s(1/\tau_1+k\tau_2/\tau_1)+k/\tau_1}$	$\frac{s^2}{s^2+sk\tau_2/\tau_1+k/\tau_1}$

3 种滤波器的环路的阻尼系数和固有频率与滤波器参数之间的关系如表 3-3 所示。

表 3-3 二阶锁相环的不同滤波器的系数和固有频率及阻尼系数之间的关系

	RC 积分滤波器环路	无源比例积分滤波器环路	有源比例积分滤波器环路
ω_n	$\sqrt{k/\tau_1}$	$\sqrt{k/\tau_1}$	$\sqrt{k/\tau_1}$
ξ	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{k\tau_1}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{\tau_1}}\left(\tau_2+\frac{1}{k}\right)$	$\frac{\tau_2}{2}\sqrt{\frac{k}{\tau_1}}$

压控振荡器是一个电压频率变换部件,其输入电压和输出频率之间的关系为

$$\omega(t) = \omega_c + k_0 u(t)$$

上式中 ω_c 为压控振荡器固有频率,一般等同于信号的载波频率。由于压控振荡器的输出反馈到鉴相器上,对鉴相器起作用的不是频率,而是相位,其传输函数形式为

$$F(s) = \frac{k}{s}$$

压控振荡器的 S 域模型如图 3-17 所示。

锁频环是一种频率自动跟踪技术,将频率检测和负反馈相结合,而频率检测技术可采用卡尔曼滤波、频域频率估计、叉积鉴频等技术^[4],因而锁频环跟踪技术包括基于卡尔曼滤波的锁频环、基于扩展卡尔曼滤波的锁频环、基于FFT的鉴频锁频环、叉积鉴频锁频环及其他形式的锁频环,具体将在后续章节讨论。锁频环动态跟踪能力较强,但跟踪精度却逊于锁相环。二阶锁频环对加速度应力敏感,三阶锁频环对加加速度应力敏感。比较适合载波同步初期信号捕获阶段的频率同步^[3]。关于锁频环路同步过程和性能参数的深入讨论可参见文献[10]。

3) 开环搜索

当直接求解式似然函数最大值十分困难时,可将频率估计范围划分为若干小的区间,通过计算似然函数在各区间中心点上的值,比较得到近似最大似然估计值。具体步骤如下:

- (1) 记录 $(0, T_0)$ 范围内信号 $r(t)$;
- (2) 设各区间中心点处频率为 $f_k = f_0 + k \Delta f$,计算补偿信号 $r(t)e^{-j2\pi f_k t}$ 及其能量 E_k ;
- (3) 选出能量最大值 E_{\max} ,则其对应的补偿频率即为频率近似估计值。

显然,这一逐频率补偿的过程可被视为串行搜索的过程,选择以频率中心点值代表单个区间内的频率值将不可避免地在此过程中引入量化误差,因此,需要在此基础上引入插值算法来进一步减小估计误差。在计算量允许的情况下,以上描述的串行搜索过程可以选用并行结构实现以节约同步时间。并行结构如图3-18^[2]所示。

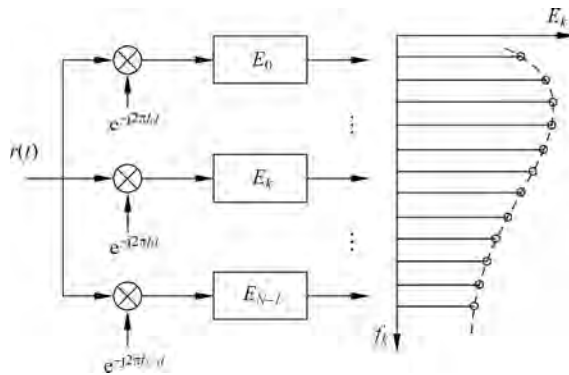


图 3-18 并行处理示意图

4) 延时乘积载波频率同步

延时乘积法即延时自相关,是将卫星下变频信号经延时器后与原信号相乘得到新的信号,以此为基础进行载频残留频率估计的方法。该方法采用开环方式,信息需求量少,估计速度快,可在一个 NT 时间内完成频率估计,因此特别适用于突发通信环境。

图3-19是这种算法的工作流程图。假设低通滤波器是理想的,滤波带宽足够大,可保证信号 $r(t)$ 无损失通过。

延时乘积信号:

$$z(t) = x(t)x^*(t - \Delta T) \quad (3-24)$$



图 3-17 压控振荡器 S 域模型

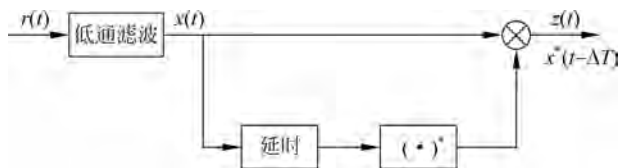


图 3-19 延时乘积载波频率同步开环方法

信号形式为

$$s(t) = e^{j(2\pi ft + \theta)} \sum_i c_i g(t - iT - \tau)$$

假设低通滤波器无损耗,滤波输出为

$$x(t) = e^{j(2\pi ft + \theta)} \sum_i c_i g(t - iT - \tau) + n(t) \quad (3-25)$$

其中,噪声项 $n(t)$ 在 $|f| \leq B_{\text{LPF}}$ 范围内具有和前述的噪声信号 $w(t)$ 一样的特性。

将式(3-25)代入式(3-24),有

$$\begin{aligned} z(t) = & e^{j(2\pi f \Delta T + \theta)} \sum_i \sum_k c_i c_k^* g(t - iT - \tau) g(t - kT - \tau - \Delta T) + \\ & s(t)n^*(t - \Delta T) + n(t)s^*(t - \Delta T) + n(t)n^*(t - \Delta T) \end{aligned} \quad (3-26)$$

上式的数学期望可表示为

$$E\{z(t)\} = C_2 e^{j(2\pi f \Delta T + \theta)} A(t - \tau) + R_n(\Delta T) \quad (3-27)$$

其中, $C_2 = E\{|c_i|^2\}$, 函数 $A(t)$ 定义为

$$A(t) = \sum_i g(t - iT)g(t - iT - \Delta T)$$

$R_n(\xi)$ 是 $n(t)$ 的自相关函数。

$$R_n(\xi) = 4N_0 B_{\text{LPF}} \frac{\sin 2\pi B_{\text{LPF}} \xi}{2\pi B_{\text{LPF}} \xi}$$

由于 $A(t)$ 为周期函数,因此式(3-26)可表示为

$$z(t) = E\{z(t)\} + N(t) \quad (3-28)$$

对式(3-28)积分,并将式(3-27)代入,得

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} z(t) dt = C_2 A_0 e^{j2\pi f \Delta T} + R_n(\Delta T) + X \quad (3-29)$$

其中, $A_0 > 0$ 是 $A(t)$ 的直流分量; X 是 $N(t)$ 的均值,为零均值随机变量:

$$X = \frac{1}{N_0} \int_0^{T_0} N(T) dt$$

根据式(3-29),当 $\Delta T = \frac{k}{2B_{\text{LPF}}}$, $k=1, 2, \dots$ 时, $R_n(\Delta T) \rightarrow 0$, 式(3-29)可简化为

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} z(t) dt = C_2 A_0 e^{j2\pi f \Delta T} + X \quad (3-30)$$

当 X 较小时,忽略其影响,可得到频率偏移的估计量:

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi \Delta T} \arg \left\{ \int_0^{T_0} z(t) dt \right\}$$

这就是频率偏移的开环估计方法。对其可估计的频率范围说明如下。

式(3-30)可重写为如下形式:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} z(t) dt = C_2 A_0 (1 + X_1 + jX_Q) e^{j2\pi f \Delta T}$$

其中,

$$X_1 + jX_Q \triangleq \frac{X}{C_2 A_0} e^{-j2\pi f \Delta T}$$

因此 X_1, X_Q 也是零均值随机变量。由于 X_1, X_Q 远小于 1, 因此上式可以进一步简化为

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi \Delta T} \arg\{(1 + jX_Q) e^{j2\pi f \Delta T}\}$$

取幅角可得

$$\hat{f} = f + \frac{X_Q}{2\pi \Delta T}$$

由于 X_Q 均值为零, 因此 \hat{f} 是近似无偏的。

当 $2\pi f \Delta T$ 接近 $\pm\pi$ 时, 即使小的 X_Q 也会使 $\arg\{(1 + jX_Q) e^{j2\pi f \Delta T}\}$ 超过 $\pm\pi$ 交界处, 使 \hat{f} 得到完全相反的估计结果。因此, f 的估计范围应限制在 $\pm 1/(2\Delta T)$ 范围内, 如图 3-20 所示。

3. 非数据辅助载波频率估计的克拉美罗界

载波频率估计的克拉美罗界依赖于载波相位的先验信息。Rife 在论文中指出, 如果采样时间关于零中心对称, 载波频率和相位的估计是非耦合的^[5], 也就是载波频率的估计精度与是否已知相位信息无关。在这种情况下, 载波频率估计的克拉美罗界达到最大。因此, 本节中设定观测时间为 $k = -(L_0 - 1)/2, \dots, 0, \dots, (L_0 - 1)/2$, 且初始相位为零。上述假设可以简化推导过程, 同时也不失一般性。

令 $\mathbf{y} = [y_{-(L_0-1)/2}, \dots, y_0, \dots, y_{(L_0-1)/2}]$, 并假设传输的符号 c_k 相互独立。在给定 f_d 的情况下, 接收信号序列 \mathbf{y} 的概率密度函数为

$$p(\mathbf{y} | f_d) = \prod_{k=-(L_0-1)/2}^{(L_0-1)/2} p(y_k | f_d) = \prod_{k=-(L_0-1)/2}^{(L_0-1)/2} \sum_{c_i \in C} p(y_k | c_i, f_d) / M$$

其中, $p(y_k | c_i, f_d) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-|y_k - c_i e^{-j2\pi f_d k}|^2 / (2\sigma^2)}$ 。载波频率估计的克拉美罗界可以表示为

$$\text{CRB}(f_d)^{-1} = E \left\{ \left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{y} | f_d)}{\partial f_d} \right]^2 \right\} \quad (3-31)$$

对于具有半平面对称特点的信号星座, 即 c_i 和 $-c_i$ 同时属于信号集合 C , 式(3-31)中的 $p(\mathbf{y} | f_d)$ 可以进一步简化为

$$p(\mathbf{y} | f_d) = \prod_{k=-(L_0-1)/2}^{(L_0-1)/2} \frac{1}{M\pi\sigma^2} e^{-\frac{|y_k|^2}{2\sigma^2}} \sum_{c_i \in H} e^{-\frac{|c_i|^2}{2\sigma^2}} \cosh\left(\frac{\text{Re}\{y_k c_i^* e^{-j2\pi f_d k}\}}{\sigma^2}\right)$$

其中, H 为集合 C 的子集, 表示 C 中位于复平面上下或者左右侧半平面内的符号集合。因

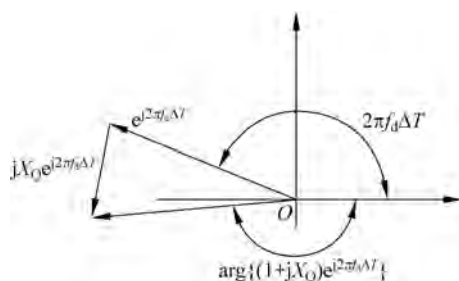


图 3-20 估计范围的确定

此,对数似然函数 $\ln p(\mathbf{y} | f_d)$ 对 f_d 求一阶偏导数表示为

$$\frac{\partial p(\mathbf{y} | f_d)}{\partial f_d} = \prod_{k=-(L_0-1)/2}^{(L_0-1)/2} k \left\{ \frac{\sum_{c_i \in H} e^{-|c_i|^2/(2\sigma^2)} \sinh(\operatorname{Re}\{y_k c_i^* e^{-j2\pi f_d k}\}/\sigma^2) \operatorname{Im}\{y_k c_i^* e^{-j2\pi f_d k}\}/\sigma^2}{\sum_{c_i \in H} e^{-|c_i|^2/(2\sigma^2)} \cosh(\operatorname{Re}\{y_k c_i^* e^{-j2\pi f_d k}\}/\sigma^2)} \right\} \quad (3-32)$$

将信号模型 $y_k = c_k e^{j(2\pi f_d k + \theta)} + n_k$ (设初始相位 $\theta=0$) 代入式(3-32),得

$$\frac{\partial p(\mathbf{y} | f_d)}{\partial f_d} = \prod_{k=-(L_0-1)/2}^{(L_0-1)/2} k \left\{ \frac{\sum_{c_i \in H} e^{-|c_i|^2/(2\sigma^2)} \sinh(\operatorname{Re}\{(c_k + \tilde{n}_k) c_i^*\}/\sigma^2) \operatorname{Im}\{(c_k + \tilde{n}_k) c_i^*\}/\sigma^2}{\sum_{c_i \in H} e^{-|c_i|^2/(2\sigma^2)} \cosh(\operatorname{Re}\{(c_k + \tilde{n}_k) c_i^*\}/\sigma^2)} \right\} \quad \Phi(c_k, \tilde{n}_k^I, \tilde{n}_k^Q)$$

其中, $\tilde{n}_k = \tilde{n}_k^I + j\tilde{n}_k^Q = n_k e^{-j2\pi f_d k}$, 是与 n_k 服从相同分布的独立随机变量。由于 $\{c_k\}$ 和 $\{\tilde{n}_k\}$ 相互独立,可得

$$E \left\{ \left[\frac{\partial p(\mathbf{y} | f_d)}{\partial f_d} \right]^2 \right\} = \frac{L_0(L_0^2 - 1)}{12} E_{c_k} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(c_k, \tilde{n}_k^I, \tilde{n}_k^Q) p(\tilde{n}_k^I, \tilde{n}_k^Q) d\tilde{n}_k^I d\tilde{n}_k^Q \right\} \quad (3-33)$$

显然,式(3-33)中的积分无法求得闭式解。然而,可以通过数值计算的方法有效解决上述问题。对上式进行整理可得

$$E \left\{ \left[\frac{\partial p(\mathbf{y} | f_d)}{\partial f_d} \right]^2 \right\} = \frac{L_0(L_0^2 - 1)}{12} E_{c_k} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(c_k, \sqrt{2}\sigma\tilde{n}_k^I, \sqrt{2}\sigma\tilde{n}_k^Q) e^{-[(\tilde{n}_k^I)^2 + (\tilde{n}_k^Q)^2]} d\tilde{n}_k^I d\tilde{n}_k^Q \right\} \quad (3-34)$$

式(3-34)可以利用二维高斯-厄米特积分^[6]计算如下:

$$E \left\{ \left[\frac{\partial p(\mathbf{y} | f_d)}{\partial f_d} \right]^2 \right\} \approx \frac{L_0(L_0^2 - 1)}{12M} \sum_{c_i \in C} \sum_{m=1}^v \sum_{n=1}^v \omega_m \omega_n \Phi^2(c_i, \sqrt{2}\sigma x_m, \sqrt{2}\sigma x_n) \quad (3-35)$$

其中, x_m 和 x_n 表示度为 v 的厄米特多项式 $H_n(x)$ 的根; ω_m 和 ω_n 为相应的权重系数。经过研究表明, $v=20$ 已经足够保证式(3-35)计算结果的准确性。最后将式(3-35)代入式(3-31),可得非数据辅助载波频率估计的克拉美罗界。

图 3-21 中用实线标出来通过(3-35)计算获得的克拉美罗界与修正的克拉美罗界的比值(Cramer Rao Bound/Modified Cramer Rao Bound, CRB/MCRB)。同时,蒙特卡洛仿真结果也通过标号在图中给出。此外,几种 MPSK 调制和 MQAM 调制信号载波频率估计的克拉美罗界也通过式(3-35)获得,并且在图中标出。需要说明的是, MPSK/MQAM 信号的 CRB 结果与 Cowley^[7]和 Rice^[8]采用二阶偏导数获得的结果一致,但后者在高信噪比下的结果只能通过仿真获得。对于 APSK 调制信号,星座图中各个环上星座点的个数及环的半径 d_i 都是可变的设计参数,因此 Cowley 和 Rice 提出的方法需要进行大量的仿真,而通过二维高斯-厄米特积分可以高效地计算求解。

从图 3-21 中可以看出,根据本节给出的克拉美罗界计算数值解与仿真结果完全一致。而且 16/32-APSK 调制信号的克拉美罗界位于 8PSK 和 16PSK 调制之间。在低信噪比区域, APSK 调制信号载波频率估计的 CRB 高于具有相同星座集大小的 MQAM 调制。这是

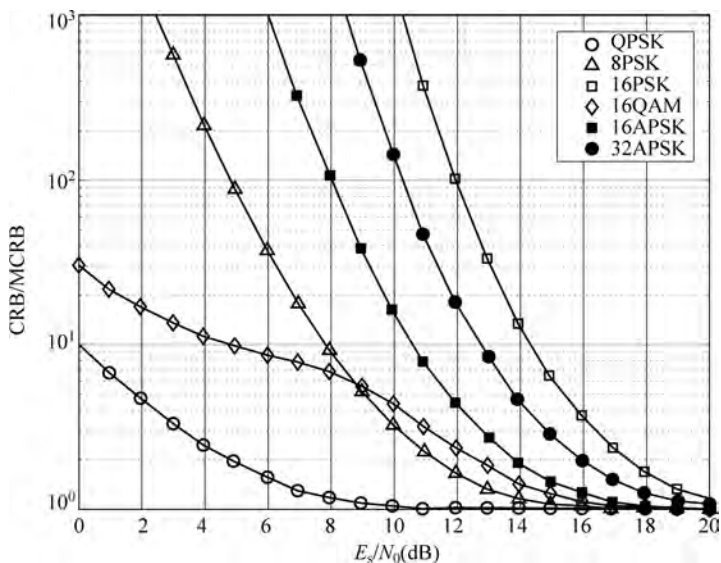


图 3-21 多种调制方式非数据辅助载波频率估计的 CRB 与 MCRB 之比

因为,当信噪比相对较高时,相位估计的 CRB 由星座图中星座点的最小欧氏距离决定,但是当信噪比非常低,星座点无法区分时,决定相位估计 CRB 的主要因素是星座图的整体形状(矩形、圆形)^[8]。

4. 基于卡尔曼滤波的载波同步算法

1) 基本卡尔曼滤波

卡尔曼滤波是一种基于贝叶斯理论体系的参数估计算法,是经典的维纳滤波在非平稳、矢量条件下的扩展形式。它以信号的状态递推方程和观测方程为基础,以最小均方误差准则为依据,进行序贯更新式的参数估计。当信号状态模型和测量模型均满足线性条件且信号与噪声服从联合高斯分布时,卡尔曼滤波器是 MMSE 准则下的最优估计器。区别于前一章给出的 MMSE 最优估计表达式,卡尔曼滤波能够以序贯递推的形式给出最优 MMSE 估计值,具有单次更新计算量低、硬件资源开销小的特点,更适于实时跟踪具有快速时变特性的非平稳信号。下面给出标准卡尔曼滤波器的数学模型^[1]。

设信号状态递推方程为

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$$

观测方程为

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

其中, \mathbf{x}_k 为 p 维待估时变参数矢量,称为状态变量; \mathbf{A} 为 $p \times p$ 维状态转移矩阵, \mathbf{B} 为 $p \times r$ 维过程噪声矩阵。 $\mathbf{u}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$ 是均值为 $\mathbf{0}$,协方差矩阵为 \mathbf{Q} 的 r 维高斯白噪声矢量,称为激励噪声矢量; \mathbf{z}_k 为 m 维观测变量, \mathbf{H} 为 $m \times p$ 维测量矩阵; $\mathbf{v}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{C})$ 是均值为 $\mathbf{0}$,协方差矩阵为 \mathbf{C} 的 m 维高斯白噪声矢量,称为测量噪声矢量。

基于卡尔曼滤波的状态变量估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{0:k}]$ ($\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 表示估计器获得第 n 时刻观测值 \mathbf{z}_k 后给出的 \mathbf{x}_k 的估计值,与 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 意义相同, $\mathbf{z}_{0:k}$ 表示 $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k$ 的集合)可按如下流程递推获得。

预测:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$$

预测值协方差矩阵:

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^T$$

卡尔曼增益矩阵:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^T(\mathbf{C} + \mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^T)^{-1}$$

修正:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$$

估计值协方差矩阵:

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})\mathbf{P}_{k|k-1}$$

初始: 自 $k=1$ 开始迭代, $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ 为卡尔曼滤波器预置的初始值, $\mathbf{P}_{0|0}$ 为其协方差矩阵。将上述标准卡尔曼滤波器作为载波跟踪系统中的参数估计器, 根据前节给出的信号模型, 有 $\mathbf{x}_k = [\theta(k), f_0(k), f_1(k), f_2(k)]^T$, $\mathbf{z}_k = [\text{real}(z_k), \text{imag}(z_k)]^T$, 其中 $\text{real}(\cdot)$ 和 $\text{imag}(\cdot)$ 分别表示求实部和虚部, 过程噪声矩阵 $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ 为单位矩阵, 状态转移矩阵 \mathbf{A} 由式(3-2)~式(3-6)确定, 此时信号状态转移方差和观测方程可分别写为如下形式:

$$\begin{bmatrix} \theta(k) \\ f_0(k) \\ f_1(k) \\ f_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2\pi T & \frac{2\pi T^2}{2} & \frac{2\pi T^3}{6} \\ 0 & 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(k-1) \\ f_0(k-1) \\ f_1(k-1) \\ f_2(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \\ u_4(k) \end{bmatrix} \quad (3-36)$$

$$\begin{bmatrix} r_1(k) \\ r_Q(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta(k)) \\ \sin(\theta(k)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(k) \\ n_Q(k) \end{bmatrix} \quad (3-37)$$

由式(3-37)可见, 在观测方程中, 状态变量 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 与观测变量 \mathbf{z}_k 不满足线性关系, 无法应用标准形式的卡尔曼滤波算法, 为了解决实际应用中可能出现的状态方程或观测方程非线性问题, 需要引入一种基于标准卡尔曼滤波的改进算法, 即扩展卡尔曼滤波算法。

2) 扩展卡尔曼滤波

前面讨论了线性离散时间系统的卡尔曼滤波, 其状态方程和观测方程都是线性的。然而, 在实际应用, 如雷达跟踪系统和导航系统中, 通常采用极坐标系, 因此其状态方程和观测方程是非线性的。离散时间系统的状态方程和观测方程其中之一是非线性的, 那么该离散时间系统就是非线性离散时间系统。针对非线性离散系统中的参数估计问题, 可以采用扩展卡尔曼滤波算法。

扩展卡尔曼滤波(Extended Kalman Filter, EKF)算法是标准卡尔曼滤波在非线性条件下的扩展形式, 能够应用于非线性状态方程及观测方程表征的信号模型。EKF 的基本原理是对非线性函数的泰勒展开式进行一阶线性化截断, 忽略其余高阶项, 从而将非线性问题转化为线性问题, 再利用标准卡尔曼滤波算法进行参数估计。

将 EKF 作为载波跟踪系统中的参数估计器时, 其状态递推方程和观测方程仍然如式(3-36)和式(3-37)所示。由于状态递推方程本身即满足线性关系, 故无须额外处理; 非线性观测方程为

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} \cos(\theta(k)) \\ \sin(\theta(k)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(k) \\ n_Q(k) \end{bmatrix}$$

其中, $\mathbf{h}(\cdot)$ 表示非线性测量函数。EKF 算法在每次迭代更新时需要非线性测量函数 $\mathbf{h}(\cdot)$ 作如下近似一阶泰勒级数展开, 则

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$$

则有雅克比矩阵

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}} = \begin{bmatrix} -\sin(\hat{\theta}(k | k-1)) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\hat{\theta}(k | k-1)) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将上述近似线性化处理流程融入标准卡尔曼滤波算法, 得到基于 EKF 的载波参数估计算法, 其基本流程如下:

预测:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$$

预测值协方差矩阵:

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}$$

近似线性化:

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}} = \begin{bmatrix} -\sin(\hat{\theta}(k | k-1)) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\hat{\theta}(k | k-1)) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

卡尔曼增益矩阵:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T(\mathbf{C} + \mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T)^{-1}$$

修正:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$$

估计值协方差矩阵:

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})\mathbf{P}_{k|k-1}$$

自 $k=1$ 开始迭代, $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ 为扩展卡尔曼滤波器预置的初始值, 等于捕获模块给出的参数估计值, $\mathbf{P}_{0|0}$ 为其协方差矩阵。

EKF 算法与标准 KF 算法的最大区别在于用时变的近似线性化矩阵 \mathbf{H}_k 取代了原来的恒定测量矩阵 \mathbf{H} , 且 \mathbf{H}_k 是非线性测量函数 $\mathbf{h}(\cdot)$ 对状态变量 \mathbf{x} 求一阶偏导数所得。EKF 算法虽然能够用于非线性条件下的参数估计, 但其本质上采用了一种近似线性化方法, 因而 EKF 估计只是非线性、高斯条件下的一种次优解, 并非基于 MMSE 准则的理论最优估计量。此外, 当系统状态方程或观测方程具有强非线性时, EKF 泰勒展开式中被忽略的高阶项可能带来较大的误差, 使得 EKF 滤波结果不收敛。

根据扩展卡尔曼滤波算法可建立基于卡尔曼滤波的载波 (Extended Kalman Filtering-based Carrier, EKF) 跟踪环, 其原理框图如图 3-22 所示。

环路的输入信号和本地信号经过乘法器和低通滤波器后, 得到扩展卡尔曼滤波器的输入观测信号矢量:

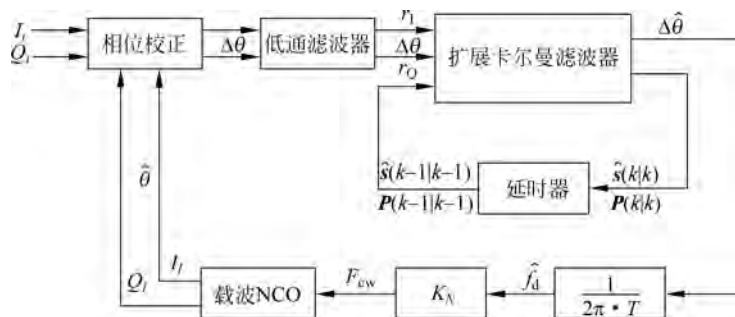


图 3-22 EKF 原理框图

$$\mathbf{r}(k) = \begin{bmatrix} r_1(k) \\ r_Q(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \sin(\Delta\theta(k)) \\ A \cos(\Delta\theta(k)) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(k) \quad (3-38)$$

其中, $r_1(k)$ 和 $r_Q(k)$ 分别为低通滤波器的两路正交输出信号, 这里环路的观测噪声矢量可表示为

$$\mathbf{n}^T(k) = [n_1(k) \quad n_Q(k)]$$

其中, 两路正交的噪声分量 $n_1(k)$ 和 $n_Q(k)$ 都是零均值、单边谱密度为 N_0 的高斯白噪声。 A 为信号幅度, $\Delta\theta$ 表示环路输入信号和本地信号的相位差。设环路的预积分时间为 T , 于是环路观测噪声的方差矩阵可表示为

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{n}(k)\mathbf{n}^T(k)] = \begin{bmatrix} \sigma_n^2 & 0 \\ 0 & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

其中, $\sigma_n^2 = N_0/(2T)$ 。

为了精确估计输入信号各阶高动态参数, 将输入信号和本地信号的相位差 $\Delta\theta$ 按泰勒级数展开为:

$$\Delta\theta(k+1) = \Delta\theta(k) + T\Delta\omega_0(k) + \frac{T^2}{2}\Delta\omega_1(k) + \frac{T^3}{6}\Delta\omega_2(k) + \xi_1(k) \quad (3-39)$$

其中, $\Delta\omega_0$ 、 $\Delta\omega_1$ 和 $\Delta\omega_2$ 是相位 $\Delta\theta$ 的各阶导数, 分别代表了环路输入信号和本地信号经过差分后所得信号的频率、频率变化率和频率二阶导数, 它们在环路的更新周期 T 内的迭代关系可进一步表示为:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_0(k+1) &= \Delta\omega_0(k) + T\Delta\omega_1(k) + \frac{T^2}{2}\Delta\omega_2(k) + \xi_2(k) \\ \Delta\omega_1(k+1) &= \Delta\omega_1(k) + T\Delta\omega_2(k) + \xi_3(k) \\ \Delta\omega_2(k+1) &= \Delta\omega_2(k) + \xi_4(k) \end{aligned} \quad (3-40)$$

其中,

$$\xi_i(k) = \int_{(k-1)T}^{kT} \frac{\tau^{4-i}}{(4-i)!} Y(\tau) d\tau, \quad i=1,2,3,4 \quad (3-41)$$

为泰勒级数展开式的余项, 表示动态模型噪声, 用来描述上述模型受到某些随机干扰以及模型的不准确所造成的影响, 式(3-41)中的 $Y(t)$ 则表示连续相位过程的四阶变化率, 被视为随机噪声过程。假设 $Y(t)$ 是零均值、高斯白噪声过程且具有单边谱密度 N_y , 那么动态噪声的方差为

$$E[Y^2(t)] = \sigma_y^2 = \frac{N_y}{2T}$$

于是可以计算:

$$\begin{aligned} E[\xi_i(k) \cdot \xi_j(k)] &= E \left\{ \left[\int_{(k-1)T}^{kT} \frac{u^{4-i}}{(4-i)!} Y(u) du \right] \cdot \left[\int_{(k-1)T}^{kT} \frac{v^{4-i}}{(4-i)!} Y(v) dv \right] \right\} \\ &= E \left\{ \iint_{uv} \left[\frac{u^{4-i}}{(4-i)!} \cdot \frac{v^{4-j}}{(4-j)!} \cdot Y(u) \cdot Y(v) \right] du dv \right\} \\ &= \iint_{uv} E \left\{ \left[\frac{u^{4-i}}{(4-i)!} \cdot \frac{v^{4-j}}{(4-j)!} \cdot Y(u) \cdot Y(v) \right] \right\} du dv \\ &= \iint_{uv} \left\{ \frac{u^{4-i}}{(4-i)!} \cdot \frac{v^{4-j}}{(4-j)!} \cdot E[Y(u) \cdot Y(v)] \right\} du dv \\ &= \frac{\sigma_y^2}{(4-i)! \cdot (4-j)!} \int_{(k-1)T}^{kT} dv \cdot \int_0^T v^{4-i} v^{4-j} dv \\ &= \frac{\sigma_y^2 T^{10-(i+j)}}{(4-i)! \cdot (4-j)! \cdot [9-(i+j)]} \end{aligned}$$

特别地,当 $i=j=4$ 时,有

$$E[\xi_4^2(k)] = \sigma_y^2 \cdot T^2 = \frac{N_y}{2T} \cdot T^2 = \frac{N_y \cdot T}{2}$$

于是可以得到系统动态模型噪声的方差矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= E[\xi(k)\xi^T(k)] \\ &= E \left\{ \begin{array}{c} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \\ \xi_4(k) \end{array} \begin{array}{cccc} \xi_1(k) & \xi_2(k) & \xi_3(k) & \xi_4(k) \end{array} \right\} \\ &= \frac{N_y \cdot T}{2} \cdot \begin{bmatrix} T^6/252 & T^5/72 & T^4/30 & T^3/24 \\ T^5/72 & T^4/20 & T^3/8 & T^2/6 \\ T^4/30 & T^3/8 & T^2/3 & T/2 \\ T^3/24 & T^2/6 & T/2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

将式(3-39)、式(3-40)表示为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta(k+1) \\ \Delta\omega_0(k+1) \\ \Delta\omega_1(k+1) \\ \Delta\omega_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 & T^3/6 \\ 0 & 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta(k) \\ \Delta\omega_0(k) \\ \Delta\omega_1(k) \\ \Delta\omega_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \\ \xi_4(k) \end{bmatrix}$$

将系统待估计的状态矢量记为

$$\mathbf{s}^T(k) = [\Delta\theta(k) \quad \Delta\omega_0(k) \quad \Delta\omega_1(k) \quad \Delta\omega_2(k)]$$

扰动噪声矢量记为

$$\xi^T(k) = [\xi_1(k) \quad \xi_2(k) \quad \xi_3(k) \quad \xi_4(k)]$$

状态转移矩阵记为

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 & T^3/6 \\ 0 & 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是可以得到系统的状态方差

$$\mathbf{s}(k+1) = \Phi \cdot \mathbf{s}(k) + \boldsymbol{\xi}(k)$$

为不失一般性,令信号幅度 $A=1$,于是式(3-38)变为

$$\mathbf{r}(k) = \begin{bmatrix} \sin(\mathbf{l}^T \mathbf{s}(k)) \\ \cos(\mathbf{l}^T \mathbf{s}(k)) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(k)$$

其中, $\mathbf{l}^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ 。

令 $h[\mathbf{s}(k)] = \begin{bmatrix} \sin(\mathbf{l}^T \mathbf{s}(k)) \\ \cos(\mathbf{l}^T \mathbf{s}(k)) \end{bmatrix}$,此时可以得到系统的观测方程 $\mathbf{r}(k) = h[\mathbf{s}(k)] + \mathbf{n}(k)$ 。

至此,得到了离散时间系统的状态方程和观测方程。从系统的状态方程和观测方程表达式可以发现,该系统的状态模型仍然是线性的,而观测模型由于采用的是极坐标的表达形式,因而非线性的。将非线性函数 $h[\mathbf{s}(k)]$ 线性化,得到系统的测量矩阵

$$\mathbf{H}^T(k) = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} h(\mathbf{s}) \right|_{\mathbf{s}=\hat{\mathbf{s}}(k|k-1)}$$

根据扩展卡尔曼滤波递推公式,可以得到本系统的状态滤波和状态一步预测的递推算法。

(1) 计算一步预测均方误差阵

$$\mathbf{M}(k|k-1) = \Phi \mathbf{M}(k-1|k-1) \Phi^T + \mathbf{Q}$$

(2) 计算卡尔曼滤波增益

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{M}(k|k-1) \mathbf{H}^T(k) [\mathbf{H}^T(k) \mathbf{M}(k|k-1) \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}]^{-1}$$

(3) 计算滤波均方误差阵

$$\mathbf{M}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \mathbf{H}^T(k)] \mathbf{M}(k|k-1)$$

(4) 计算状态一步预测

$$\hat{\mathbf{s}}(k|k-1) = \Phi \hat{\mathbf{s}}(k-1|k-1)$$

(5) 计算状态滤波

$$\hat{\mathbf{s}}(k|k) = \hat{\mathbf{s}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k) [\mathbf{r}(k) - h(\hat{\mathbf{s}}(k|k-1))]$$

在每一个环路更新周期 T 内,扩展卡尔曼滤波器输出对系统状态矢量 $\mathbf{s}(k)$ 的估计矢量 $\hat{\mathbf{s}}(k|k)$ 和滤波的均方误差矩阵 $\mathbf{M}(k|k)$,它们经延时器延迟一个环路更新周期 T 后被反馈到扩展卡尔曼滤波器的输入端,参与下一周期的扩展卡尔曼滤波迭代算法。估计矢量 $\hat{\mathbf{s}}(k|k)$ 中的第一个元素 $\Delta \hat{\theta}$ 即为环路对输入信号和本地信号相位差的瞬时估计值,于是可以得到环路对输入信号多普勒频率的瞬时估计值

$$\hat{f}_d = \frac{\Delta \hat{\theta}}{2\pi \cdot T}$$

瞬时频率估计量 \hat{f}_d 经数乘运算后转换为环路中载波 NCO 所需要的输入频率控制字

$$F_{cw} = K_N \cdot \hat{f}_d = \frac{2^N}{f_{clk}} \cdot \hat{f}_d \quad (3-42)$$

将频率控制字 F_{cw} 反馈回载波 NCO 的输入端,致使整个载波跟踪环闭合。式(3-42)中 N 为载波 NCO 的位数, f_{clk} 为载波 NCO 的时钟频率,它等于环路输入信号采样率。

由于采用的是近似的线性最小均方误差估计准则,因此在高的信噪比工作状态时它的性能应该接近于克拉美罗界^[9]。但是,当环路处于低的信噪比工作状态时,很难用解析的方法来分析环路的跟踪性能。为了研究低信噪比情况下基于扩展卡尔曼滤波算法的载波同步环路的同步性能,需要通过仿真获得。当环路中扩展卡尔曼滤波器为三阶时,系统状态变量为:

$$\mathbf{s}^T(k) = [\Delta\theta(k) \quad \Delta\omega_0(k) \quad \Delta\omega_1(k)]$$

待估参数包括输入信号和本地信号的相位差及一阶和二阶导数。当环路中扩展卡尔曼滤波器为四阶时,系统状态变量为:

$$\mathbf{s}^T(k) = [\Delta\theta(k) \quad \Delta\omega_0(k) \quad \Delta\omega_1(k) \quad \Delta\omega_2(k)]$$

待估参数包括输入信号和本地信号的相位差、频率差及一阶和二阶导数。

图 3-23 给出了三阶 EKF 和四阶 EKF 的失锁概率随载噪比(Carrier Noise Ratio, CNR)变化曲线。由仿真结果可见,当载噪比极低($\leq 24.5 \text{ dB} \cdot \text{Hz}$)时,三阶 EKF 环路的失锁概率明显低于四阶 EKF,这表明在低信噪比时三阶 EKF 比四阶 EKF 稳定。随着环路的载噪比逐渐增大,三阶 EKF 和四阶 EKF 的稳定性逐渐趋于一致。由图 3-24 中的曲线可以确定三阶 EKF 的失锁门限约为 $24 \text{ dB} \cdot \text{Hz}$,而四阶 EKF 的失锁门限约为 $24.5 \text{ dB} \cdot \text{Hz}$ 。图 3-24 给出了三阶 EKF 和四阶 EKF 的频率估计误差与载噪比的对应关系曲线。由图 3-24 中的曲线可以发现,由于四阶 EKF 对频率的二阶导数进行了估计,而三阶 EKF 仅估计到相位的二阶导数,因此四阶 EKF 的频率跟踪精度比三阶 EKF 略有改善。

综合图 3-23 和图 3-24 可以发现,三阶 EKF 在其失锁门限 $24 \text{ dB} \cdot \text{Hz}$ 上的频率跟踪精度约为 3.1 Hz ,四阶 EKF 在其失锁门限 $24.5 \text{ dB} \cdot \text{Hz}$ 上的频率跟踪精度约为 2.5 Hz 。这样的频率跟踪性能与传统的锁相环路相比有了很大的改善,这是由于 EKF 载波跟踪方案采用的是近似线性最小均方误差估计的准则,因此它对输入信号的频率实现了准最佳估计。

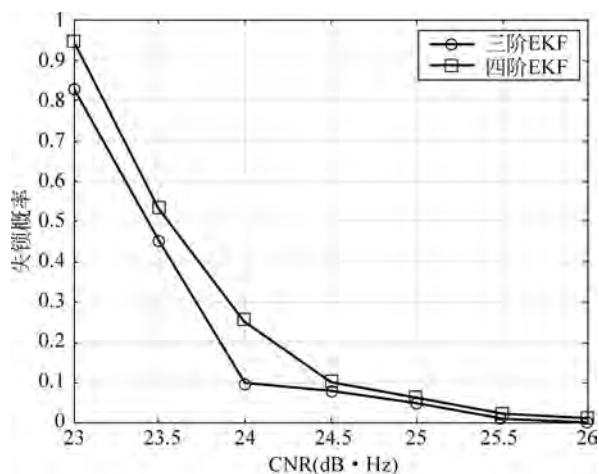


图 3-23 EKF 的失锁概率随载噪比变化曲线

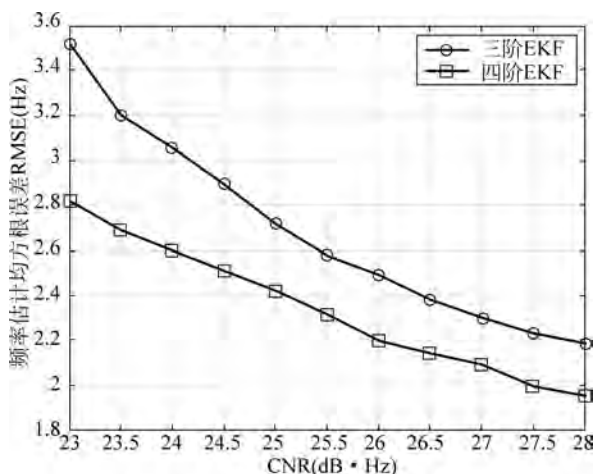


图 3-24 EKF 的频率估计 RMSE 随载噪比变化曲线

3) 无迹卡尔曼滤波

为了利用卡尔曼滤波递推估计的思想来解决非线性系统的状态估计问题,提出了基于将非线性函数线性化的扩展卡尔曼滤波方法。由于在将非线性函数线性化的过程中忽略了泰勒级数展开式的二阶及二阶以上的项,这样就会不可避免地给递推估计带来误差。因此扩展卡尔曼滤波对于非线性系统的状态估计而言并不是理论上的最佳滤波,而被称为准最佳滤波。针对扩展卡尔曼滤波估计精度的问题,基于无迹变换思想并利用线性卡尔曼滤波递推模式的无迹卡尔曼滤波方法被提出。无迹变换的基本想法是近似非线性函数的概率分布比近似非线性函数本身更容易进行无迹变换的理论基础是近似某种概率分布比近似任意的非线性函数或非线性变换要容易。该方法的基本思想是构造一组点集,使得它们均值为 $\bar{\mathbf{x}}$, 方差阵为 \mathbf{P}_{xx} 。然后将非线性函数作用于点集中的每一个点,从而产生一组变换后的点集。通过计算变换后点集的统计量可以获得对非线性变换的均值和方差的估计。

尽管该方法从表面上看起来有些类似于粒子滤波器^[23],但它和粒子滤波器有着本质的区别。首先,点集的选取不是随机的,而是根据某一特定的准则被确定性地选择出来,从而满足规定的统计特性,如满足一定的均值和方差。因此,该方法有可能通过固定数量的且少量的点来捕获某一分布率的高阶信息。其次,对点集的加权值与粒子滤波器中采样点的加权值也是不同的。例如,粒子滤波器中采样点的加权值必须位于区间 $[0, 1]$,而点集的加权值则不必满足这一要求。

通常的点集包括单个状态矢量以及与之相对应的权值

$$S = \{i = 0, 1, \dots, p; \mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{W}^{(i)}\}$$

其中,权值 $\mathbf{W}^{(i)}$ 可以是正数也可以是负数,但为了提供无偏估计,必须满足:

$$\sum_{i=0}^p \mathbf{W}^{(i)} = 1$$

将非线性变换作用于每一个点,从而产生变换后的点集

$$\mathbf{z}^{(i)} = h[\mathbf{x}^{(i)}]$$

将变换后点集的加权平均作为非线性函数的均值

$$\bar{\mathbf{z}} = \sum_{i=0}^p W^{(i)} \mathbf{z}^{(i)}$$

将变换后点集的加权外积作为非线性函数的方差

$$\mathbf{P}_{zz} = \sum_{i=0}^p W^{(i)} \{\mathbf{z}^{(i)} - \bar{\mathbf{z}}\} \{\mathbf{z}^{(i)} - \bar{\mathbf{z}}\}^T$$

任何其他函数的统计量均可按照以上方式进行计算。

典型的满足条件的点集是具有 $2N_x$ 个采样点的对称点集合, 这些点都位于第 $\sqrt{N_x}$ 层方差等高线上

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(i)} &= \bar{\mathbf{x}} + (\sqrt{N_x \mathbf{P}_{xx}})_i \\ W^{(i)} &= \frac{1}{2N_x} \\ \mathbf{x}^{(i+N_x)} &= \bar{\mathbf{x}} - (\sqrt{N_x \mathbf{P}_{xx}})_i \\ W^{(i+N_x)} &= \frac{1}{2N_x} \end{aligned}$$

其中, N_x 是状态矢量 \mathbf{x} 的维数, $(\sqrt{N_x \mathbf{P}_{xx}})_i$ 是矩阵 $N_x \mathbf{P}_{xx}$ 平方根的第 i 行或第 i 列。这里矩阵平方根的计算利用 cholsky 分解方法。设矩阵 \mathbf{P} 有 cholsky 分解形式

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$$

则 Sigma 点由平方根矩阵 \mathbf{A} 的行形成; 若矩阵 \mathbf{P} 的 cholsky 分解形式为

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T$$

则 Sigma 点由平方根矩阵 \mathbf{A} 的列形成。无迹卡尔曼滤波递推算法步骤如下:

(1) 根据一定的准则选取 Sigma 点集 $\mathbf{x}_{a,k}^{(i)}$ 。

(2) 根据系统的状态模型计算变换后的点集:

$$\hat{\mathbf{x}}_{a,k}^{(i)} = f[\mathbf{x}_{a,k}^{(i)}, \mathbf{u}_n]$$

(3) 计算预测的均值:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{a,k} = \sum_{i=0}^P W^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_{a,k}^{(i)}$$

(4) 计算预测方差矩阵:

$$\hat{\mathbf{P}}_{a,k} = \sum_{i=0}^P W^{(i)} [\hat{\mathbf{x}}_{a,k}^{(i)} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{a,k}] [\hat{\mathbf{x}}_{a,k}^{(i)} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{a,k}]^T$$

(5) 根据系统观测模型计算变换后的预测点集:

$$\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} = g[\mathbf{x}_{a,k}^{(i)}, \mathbf{v}_k]$$

(6) 计算预测的观测值:

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=0}^P W^{(i)} \hat{\mathbf{y}}_k^{(i)}$$

(7) 计算观测值的预测方差矩阵:

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k = \sum_{i=0}^P W^{(i)} [\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k] [\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k]^T$$

(8) 计算互协方差矩阵:

$$\hat{\mathbf{P}}_k^{xy} = \sum_{i=0}^P W^{(i)} [\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_k] [\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k]^T$$

(9) 根据卡尔曼滤波方差计算无迹卡尔曼滤波估计:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \hat{\mathbf{P}}_k^{xy} \hat{\mathbf{Q}}_k^{-1} \\ \mathbf{P}_k &= \hat{\mathbf{P}}_k - \mathbf{K}_k \hat{\mathbf{Q}}_k \mathbf{K}_k^T \\ \mathbf{v}_k &= \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k &= \hat{\boldsymbol{\mu}}_k + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \end{aligned}$$

上述步骤是无迹卡尔曼滤波针对非线性离散时间系统的一般化递推过程,对于具体的应用环境,该算法还可以进行适当的简化或优化。

尽管无迹变换的形式非常简单,但它具有很多的优点^[24]:

(1) 算法中用到的点的个数是有限的且定量的,因此它可以很自然地用于“黑箱”滤波库。如果给定一个具有特定输入和输出的模型,可以利用一套标准的计算流程来对任意给定的非线性变换计算所需要的预测量。

(2) 算法的运算量与同等阶数的扩展卡尔曼滤波相当。算法中最复杂的运算来自计算矩阵的平方根以及计算经过非线性映射后的点集的方差所需要的外积运算。然而,上述两种运算的运算量都是 $O(N_x^3)$,该运算量和计算扩展卡尔曼滤波预测方差阵所需要的 $N_x \times N_x$ 矩阵乘法的运算量是相同的。

(3) 任何能够正确地传递均值和方差的点集对均值和方差的计算精度都能够达到二阶。因此,该估计隐含了被截断的二阶滤波器的二阶偏移误差的修正项,且不要求求导运算。因此,无迹变换不需要像线性化方法那样利用中心差分方案来计算。

(4) 该算法可应用于非连续的变换。由于点本身是离散的,它不会受到非连续变换的影响,因此变换后的均值和方差估计也不会受到变换的非连续性的影响。

由于无迹卡尔曼滤波相对扩展卡尔曼滤波在非线性的状态估计性能上的改善,本节进一步给出基于无迹卡尔曼滤波(Unscented Kalman Filtering-based, UKF)的载波同步算法,UKF 方案和 EKF 方案具有完全类似的结构,只是将环路中的参数估计器扩展卡尔曼滤波器变成了无迹卡尔曼滤波器。原理框图如图 3-25 所示。

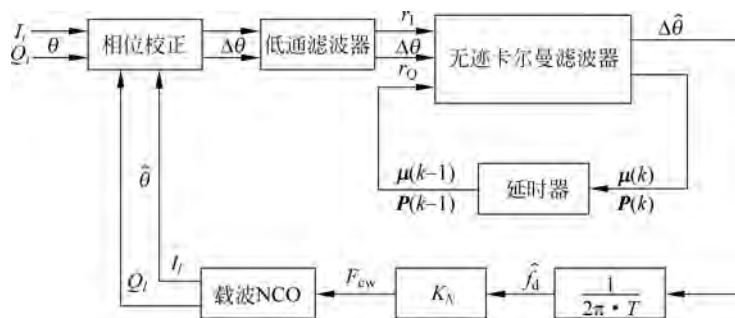


图 3-25 UKF 原理框图

UKF 环路待估计的状态矢量、观测噪声矢量、过程噪声矢量,以及观测模型和状态模型与 EKF 都是相同的。无迹卡尔曼滤波递推算法步骤如下:

(1) 根据系统的状态模型计算预测均值

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}(k) = \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\mu}(k-1)$$

(2) 计算预测方差矩阵

$$\mathbf{P}(k) = \Phi \mathbf{P}(k-1) \Phi^T + \mathbf{Q}$$

(3) 将 $\hat{\boldsymbol{\mu}}(k)$ 扩展为 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_a(k) = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\mu}}(k) \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix}$, $\hat{\mathbf{P}}(k)$ 扩展为 $\hat{\mathbf{P}}_a(k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}$, 确定扩维后的

Sigma 点集 $\hat{\mathbf{s}}_a^{(i)}(k)$ 。

(4) 根据系统的观测模型计算变换后的预测点集

$$\hat{\mathbf{r}}^{(i)}(k) = h[\hat{\mathbf{s}}_a^{(i)}(k)]$$

(5) 计算预测的观测值

$$\hat{\mathbf{r}}(k) = \sum_{i=0}^P W^{(i)} \hat{\mathbf{r}}^{(i)}(k)$$

(6) 计算观测值的预测方差矩阵

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}(k) = \sum_{i=0}^P W^{(i)} [\hat{\mathbf{r}}^{(i)}(k) - \hat{\mathbf{r}}(k)][\hat{\mathbf{r}}^{(i)}(k) - \hat{\mathbf{r}}(k)]^T$$

(7) 计算互协方差矩阵

$$\mathbf{P}^{sr}(k) = \sum_{i=0}^P W^{(i)} [\hat{\mathbf{s}}^{(i)}(k) - \hat{\boldsymbol{\mu}}(k)][\hat{\mathbf{r}}^{(i)}(k) - \hat{\mathbf{r}}(k)]^T$$

(8) 根据卡尔曼滤波方差计算无迹卡尔曼滤波估计

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}^{sr}(k) \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}(k)$$

$$\mathbf{P}(k) = \hat{\mathbf{P}}(k) - \mathbf{K}(k) \hat{\boldsymbol{\Omega}}(k) \mathbf{K}^T(k)$$

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{r}(k) - \hat{\mathbf{r}}(k)$$

$$\boldsymbol{\mu}(k) = \hat{\boldsymbol{\mu}}(k) + \mathbf{K}(k) \mathbf{v}(k)$$

假设系统的观测模型是非线性的, 状态模型是线性的, 可以利用线性卡尔曼方差计算 $\hat{\boldsymbol{\mu}}(k)$ 和 $\hat{\mathbf{P}}(k)$, 利用预测分布确定的 Sigma 点计算 $\hat{\mathbf{r}}(k)$ 、 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}(k)$ 和 $\hat{\mathbf{P}}^{sr}(k)$ 。

在每一个环路更新周期 T 内, 无迹卡尔曼滤波器输出对系统状态矢量 $\mathbf{s}(k)$ 的均值估计 $\boldsymbol{\mu}(k)$ 和误差方差估计 $\mathbf{P}(k)$, 它们经延时器延迟一个环路更新周期 T 后被回馈到无迹卡尔曼滤波器的输入端, 参与下一周期的无迹卡尔曼滤波迭代算法。均值估计 $\boldsymbol{\mu}(k)$ 中的第一个元素 $\Delta \hat{\theta}$ 为输入信号和本地信号相位差的瞬时估计值, 对应的频率瞬时估计值

$$\hat{f}_d = \frac{\Delta \hat{\theta}}{2\pi \cdot T}$$

由瞬时频率估计量 \hat{f}_d 可得载波 NCO 输入频率控制字, 计算公式为

$$F_{\text{cw}} = K_N \cdot \hat{f}_d = \frac{2^N}{f_{\text{clk}}} \cdot \hat{f}_d$$

上述的环路闭合过程与方案完全一致。

除 EKF、无迹卡尔曼滤波外, 有关卡尔曼滤波应用于非线性参数估计的研究成果还有很多, 如容积卡尔曼滤波、求积分卡尔曼滤波等, 能够获得比 EKF 更优的估计性能, 但也伴随有计算复杂度显著提升的问题, 本书不再一一详述。

下面通过仿真方式来研究 UKF 载波同步算法的跟踪性能。图 3-26 和图 3-27 对比了

EKF 和同等阶数的 UKF 的性能曲线^[25]。其中图 3-26 为两种方案的失锁概率与环路载噪比 CNR 的对应关系曲线,而图 3-27 则给出了两种方案的频率估计误差与的对应关系曲线。由图 3-26 可见,当 $\text{CNR} < 24\text{dB} \cdot \text{Hz}$ 时,UKF 的失锁概率略低于 EKF,当 $\text{CNR} \geq 24\text{dB} \cdot \text{Hz}$ 时,两种方案的失锁概率非常接近。同时由图可见 UKF 和 EKF 的失锁门限均为 $24.5\text{dB} \cdot \text{Hz}$ 。由图 3-27 可见,UKF 的频率跟踪精度较 EKF 有明显的改善,但这种改善随着 CNR 的逐渐增大而减小,当 $\text{CNR} \geq 27.5\text{dB} \cdot \text{Hz}$ 时,两种方法的性能相当。同时,由图 3-27 中的曲线可以确定,在门限 $24.5\text{dB} \cdot \text{Hz}$ 上,UKF 的频率跟踪精度较 EKF 改善了约 0.3Hz 。

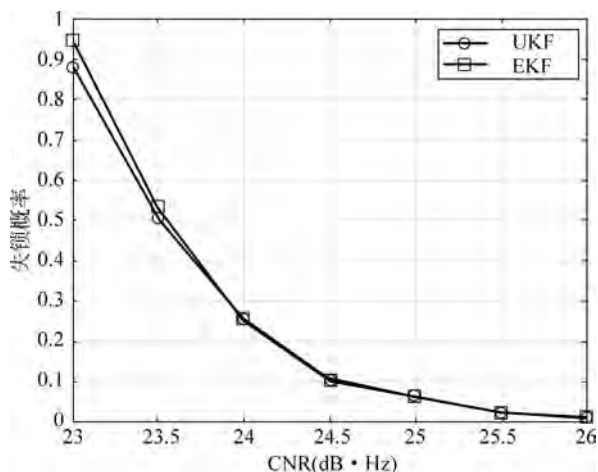


图 3-26 UKF 和 EKF 的失锁概率随载噪比变化曲线

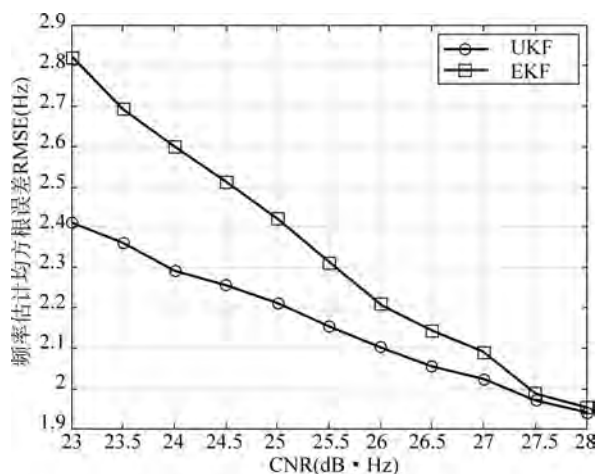


图 3-27 UKF 和 EKF 的频率估计 RMSE 随载噪比变化曲线

3.2.2 数据辅助算法

1. 基于最大似然的频率估计理论

为了利用最大似然(ML)方法研究数字卫星信号的频率估计,提出 3 个假设前提:

(1) 符号数据是已知的;

- (2) 实现理想定时同步;
 (3) 频率偏移远小于符号速率。

在以上前提下,待估计信号所包含的未知参数只剩下频率偏移和相位。此时似然函数形式如下:

$$\Lambda(\mathbf{r} | \tilde{f}, \tilde{\theta}) = \exp \left\{ \frac{1}{N_0} \int_0^{T_0} \operatorname{Re}[r(t) \tilde{s}^*(t)] dt - \frac{1}{2N_0} \int_0^{T_0} |\tilde{s}(t)|^2 dt \right\} \quad (3-43)$$

其中,

$$s(t) = e^{j(2\pi ft + \theta)} \sum_i c_i g(t - iT - \tau) \quad (3-44)$$

假设 θ 是在 $[0, 2\pi)$ 范围内的随机变量, f 是值固定但未知的参数。又由于式(3-43)的第二积分项是确知的,与似然函数求最大值无关,因此可忽略掉。这时,等效似然函数变为

$$\Lambda(\mathbf{r} | \tilde{f}, \tilde{\theta}) = \exp \left\{ \frac{1}{N_0} \int_0^{T_0} \operatorname{Re}[r(t) \tilde{s}^*(t)] dt \right\} \quad (3-45)$$

代入式(3-44),得

$$\int_0^{T_0} r(t) s^*(t) dt = e^{-j\theta} \sum_i c_i^* \int_0^{T_0} r(t) e^{-j2\pi f_d t} \cdot g(t - iT - \tau) dt$$

由于 $g(t)$ 只占有有限的时间间隔,且一般不会超出一个符号周期 $[0, T]$ 的范围,因此上式可进一步改写为

$$\int_0^{T_0} r(t) s^*(t) dt = e^{-j\theta} \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* x(k) \quad (3-46)$$

其中, $x(k)$ 是匹配滤波器输出在 $kT + \tau$ 时刻的采样值。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\xi) e^{-j2\pi f \xi} g(\xi - t) d\xi$$

改写式(3-46)的右边项为

$$e^{-j\theta} \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* x(k) = |X| e^{j(\psi - \theta)}$$

其中,

$$|X| e^{j\psi} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* x(k) \quad (3-47)$$

将式(3-47)和式(3-46)代入式(3-45),则

$$\Lambda(\mathbf{r} | f, \theta) = \exp \left[\frac{|X|}{N_0} \cos(\psi - \theta) \right] \quad (3-48)$$

在 $[0, 2\pi]$ 上对式(3-48)取期望,消除对 θ 的影响,有

$$\Lambda(\mathbf{r} | f) = I_0 \left(\frac{|X|}{N_0} \right) \quad (3-49)$$

其中, $I_0(\alpha)$ 是零阶修正贝塞尔函数,其表达式为

$$I_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\alpha \cos z} dz$$

零阶修正贝塞尔函数是具有正幅角的偶函数,幅值是上凹的弧形。由式(3-49)可见, $\Lambda(\mathbf{r} | f)$ 和 $|X|$ 呈正比,所得最大值位置相同。故最大化似然函数可转化为最大化式(3-47):

$$\Gamma(f) \triangleq \left| \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* x(k) \right|$$

图 3-28 给出了 $\Gamma(f)$ 的计算流程。图 3-29 给出了在 QPSK 调制且采用滚降系数 $\alpha=0.5$ 的根升余弦脉冲, 信噪比 $E_s/N_0=30\text{dB}$, 观测长度为 30 个符号长度情况下的 $\Gamma(f)$ 随 f 变化的曲线。其中, 真实频率偏移量为 0。由图 3-29 可见, $\Gamma(f)$ 曲线会有多个极大值点。为了取得最大值从而获得频率偏移量 f , 一般采用两步搜索方式。第一步是进行大范围搜索, 获得最大值区域, 称为粗搜索; 第二步是在最大值附近的领域内进行精搜索。需要说明的是, 在低信噪比情况下, 由于噪声信号幅值过高, 可能会影响峰值搜索, 进而导致搜索得到的频率偏移出现错误。

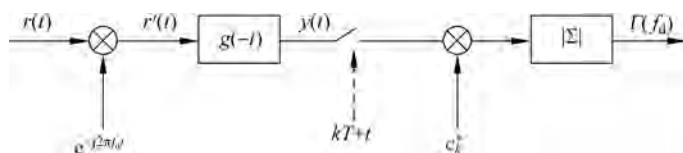


图 3-28 $\Gamma(f_d)$ 的计算流程

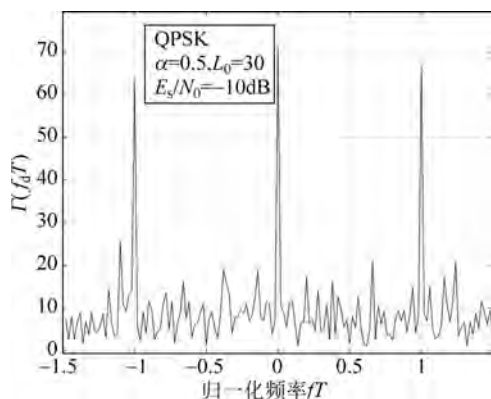


图 3-29 QPSK 调制信号在符号波形为根升余弦滚降脉冲方式时的 $\Gamma(f_d)$ 的典型波形

2. 载波频率估计的简化模型

以上基于最大化似然函数进行频率估计的方法并不实用, 但它提供了载波频率估计的基本途径。下面介绍基于数据辅助的载波频率估计的简化模型。

假设

(1) 卷积 $g(t) * g(-t)$ 满足奈奎斯特条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)g[-(kT-t)]dt = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3-50)$$

(2) 符号数据属于 PSK 星座:

$$\{c_k = e^{j\alpha_k}; \alpha_k = 0, 2\pi/M, \dots, 2\pi(M-1)/M\}$$

(3) 频率偏移范围相对于符号速率较小。

接收信号为

$$r(t) = e^{j(2\pi f_d t + \theta)} \sum_i c_i g(t - iT - \tau) + w(t) \quad (3-51)$$

将 $r(t)$ 经过匹配滤波器 $g(-t)$ 并对输出结果采样, 得

$$y(k) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)g(t - kT - \tau)dt \quad (3-52)$$

将式(3-51)代入式(3-52),则

$$y(k) = e^{j\theta} \sum_i c_i \int_{-\infty}^{\infty} g(t - iT - \tau)g(t - kT - \tau)dt + n(k) \quad (3-53)$$

其中,噪声分量 $n(k)$ 为

$$n(k) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)g(t - kT - \tau)dt$$

由于 $w(t)$ 是谱密度为 N_0 的高斯白噪声信号, $n(k)$ 可以写作:

$$n(k) = n_R(k) + jn_1(k)$$

其中, $n_R(k)$ 、 $n_1(k)$ 分别表示噪声分量的实部和虚部,是独立零均值高斯随机变量。

由于 $|f| \ll 1/T$, 在 $t = iT + \tau$ 邻域内, $e^{j2\pi ft}$ 可近似认为是常数 $e^{j2\pi f(iT + \tau)}$;

$$e^{j2\pi ft}g(t - iT - \tau) \approx e^{j2\pi f(iT + \tau)}g(t - iT - \tau) \quad (3-54)$$

将式(3-54)和式(3-50)代入式(3-53),得

$$y(k) = c_k e^{j[2\pi f(kT + \tau) + \theta]} + n(k) \quad (3-55)$$

式中,信号参数有载频偏差 f 、延时 τ 、相移 θ 、符号数据 $\{c_k\}$ 。为了估计频率偏移 f ,需要消除其他几个参数的影响。其中对于 PSK 信号,有 $c_k c_k^* = 1$,因此,在式(3-55)两边同乘以 c_k^* 得

$$\begin{aligned} z(k) &= c_k^* y(k) \\ &= e^{j[2\pi f(kT + \tau) + \theta]} c_k c_k^* + n(k) c_k^* \\ &= e^{j[2\pi f(kT + \tau) + \theta]} + n'(k) \end{aligned} \quad (3-56)$$

上式就是进行频率偏移估计的模型。图 3-30 给出了 $z(k)$ 的计算过程。

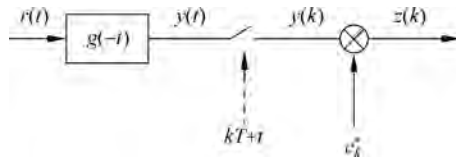


图 3-30 $z(k)$ 的计算流程

3. Kay 频偏估计算法

Kay 频偏估计算法^[26]的思路是首先将式(3-56)转换为极坐标的格式:

$$z(k) = \rho(k) e^{j[2\pi f(kT + \tau) + \theta + \phi(k)]} \quad (3-57)$$

其中, $\rho(k)$ 和 $\phi(k)$ 的含义为

$$\rho(k) e^{j\phi(k)} = 1 + n'(k) e^{-j[2\pi f(kT + \tau) + \theta]} \quad (3-58)$$

随着信噪比的增大可以发现,根据高斯分布的性质,式(3-57)中的 $\{\phi(k)\}$ 集合的分布近似为独立高斯分布。从式(3-58)看到,需要的频偏信息其实就在该式的相位中,因此提取式(3-58)的相位,记为

$$p(k) = \arg\{z(k)\} = 2\pi f(kT + \tau) + \theta + \phi(k) \quad (3-59)$$

其中, $\arg\{\cdot\}$ 表示求相位角。

然后再对式(3-59)求差分,可得

$$\begin{aligned}
 \alpha(k) &= p(k) - p(k-1) \\
 &= \arg\{z(k)z^*(k-1)\} \\
 &= 2\pi fT + \phi(k) - \phi(k-1)
 \end{aligned} \tag{3-60}$$

令 $\alpha(k) = \{\alpha(2), \alpha(3), \dots, \alpha(L_0)\}$, L_0 为导频序列的长度。因为相位集 $\{\phi(k)\}$ 在信噪比较高时可以近似为零均值独立高斯分布,也可以近似为有色高斯过程,对频偏 f 的估计就是求有色高斯过程的平均。因此基于观察样本 $\arg\{z(k)z^*(k-1)\}$ 下的参量 f 的最大似然估计就是式(3-59)线性模型的最小方差无偏估计。

根据上面的分析得到的频偏估计值 \hat{f} 为

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi fT} \sum_{k=2}^{L_0} \gamma(k) \arg\{z(k)z^*(k-1)\} \tag{3-61}$$

式(3-61)中的 $\gamma(k)$ 是个平滑窗口函数,表示为

$$\gamma(k) = \frac{3}{2} \frac{L_0}{L_0^2 - 1} \left[1 - \left(\frac{k - \left(\frac{L_0}{2} - 1\right)}{\frac{L_0}{2}} \right)^2 \right], \quad k = 2, 3, \dots, L_0$$

从式(3-61)可以看出,频偏 f 的主要信息是在 $z(k)z^*(k-1)$ 的相位角中。由于 $|\arg\{z(k)z^*(k-1)\}| \leq \pi$, 代入式(3-60)可得

$$|2\pi fT + \phi(k) - \phi(k-1)| \leq \pi \tag{3-62}$$

当信噪比较大时,式(3-62)可变为

$$|2\pi fT| \leq \pi$$

因此 Kay 频偏估计算法的估计范围为

$$|fT| \leq 0.5$$

即归一化频率偏差不大于 0.5。

通过上面的分析可知,Kay 频偏估计算法利用导频序列段的观测样本的相位信息来估计频偏,容易受噪声影响,对信噪比要求比较高,而且相位不能发生阶跃性变化,否则估计结果不准确。

4. Fitz 频偏估计算法

Fitz 频偏估计算法^[27]的思路是首先求 $y(k)$ 的自相关函数,可记为 $R(m)$:

$$R(m) = \frac{1}{L_0 - m} \sum_{k=m+1}^{L_0} y(k)y^*(k-m) \tag{3-63}$$

其中, $1 \leq m \leq N, N \leq L_0$ 。

由式(3-56),则

$$\sum_{k=m+1}^{L_0} y(k)y^*(k-m) = (L_0 - m)e^{j2\pi mfT} + n''(m) \tag{3-64}$$

将式(3-64)代入式(3-63)可得

$$R(m) = \frac{1}{L_0 - m} \sum_{k=m+1}^{L_0} y(k)y^*(k-m) = e^{j2\pi mfT} + n''(m) \tag{3-65}$$

其中, $n''(m)$ 为零均值噪声。

如果不存在噪声,则 $n''(m)$ 可以忽略,那么 $R(m)$ 的相位角就是 $2\pi m f T$ 。但是如果存在噪声,那么此时 $R(m)$ 的相位角就会与 $2\pi m f T$ 存在误差,这个误差可记为 $e(m)$:

$$e(m) = \arg[R(m) - 2\pi m f T]$$

在求 $R(m)$ 的相位角时存在一个问题: 如果相位角 $2\pi m f T$ 很靠近 π 或者 $-\pi$, 那么即使此时的噪声很小,可能也会导致求出的相位角错误。因为假设相位角 $2\pi m f T$ 非常靠近 π , 处于第二象限, 这时加入的微小误差 $e(m)$ 刚好使相位角进入第三象限, 最后得到的相位角就会是 $-\pi$ 。而相位角 $2\pi m f T$ 非常靠近 $-\pi$ 的情形与上面的一样。因此只有在相位角 $2\pi m f T$ 远离 π 或者 $-\pi$, 当信噪比较好时, 误差 $e(m)$ 才会变得很小, 必须满足:

$$|2\pi m f T| < \pi \quad (3-66)$$

此时对误差 $e(m)$ 在 $1 \leq m \leq N$ 的范围内求和, 再取平均可得

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e(m) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \arg[R(m)] - \pi(N+1)fT$$

上式的左边求和取平均和后会变得更小, 因此令上式的左边为零, 这样就可以得到 Fitz 频偏估计算法的估计值:

$$\hat{f} = \frac{1}{\pi N(N+1)T} \sum_{m=1}^N \arg[R(m)] \quad (3-67)$$

从式(3-66)中可知, Fitz 的频偏估计范围为

$$|f| \leq \frac{1}{2NT}$$

其中, N 等于 $L_0/2$ 时, 该估计方法的结果最接近克拉美罗界。

5. L&R 频偏估计算法

Luise 和 Reggiannini 提出的估计算法的思路^[29]可以说是 Fitz 估计算法的改进, 首先对式(3-65)求和再取平均, 可得

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N R(m) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e^{j2\pi m f T} + \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N n''(m) \quad (3-68)$$

式(3-68)的右侧最后一项就是对噪声进行平滑处理, 可以忽略, 这样式(3-68)可变为

$$\sum_{m=1}^N R(m) \approx \sum_{m=1}^N e^{j2\pi m f T} \quad (3-69)$$

可以看出, 频率信息在上式相角信息内, 因此式(3-69)求相位:

$$\arg\left\{\sum_{m=1}^N R(m)\right\} \approx \arg\left\{\sum_{m=1}^N e^{j2\pi m f T}\right\} \quad (3-70)$$

然而上式中的右侧有以下的关系:

$$\sum_{m=1}^N e^{j2\pi m f T} = \frac{\sin(\pi N f T)}{\sin(\pi f T)} e^{j\pi(N+1)fT} \quad (3-71)$$

如果 $\frac{\sin(\pi N f T)}{\sin(\pi f T)} > 0$, 那么根据式(3-70)和式(3-71)可得

$$\arg\left\{\sum_{m=1}^N R(m)\right\} = \pi(N+1)fT \quad (3-72)$$

而 $\frac{\sin(\pi N f T)}{\sin(\pi f T)} > 0$ 的条件如下:

$$|f| \leq \frac{1}{NT} \quad (3-73)$$

通过式(3-72)可得到 L&R 频偏估计算法的频偏估计值:

$$\hat{f} = \frac{1}{\pi(N+1)fT} \arg\left\{\sum_{m=1}^N R(m)\right\}$$

而 L&R 频偏估计算法的频偏估计范围即为式(3-73)。

6. M&M 频偏估计算法

Mengali 和 Morelli 提出了一种新频率估计算法, 简称为 M&M 算法^[29]。仍采用式(3-56)中的离散时间信号模型:

$$z(k) = c_k e^{j[2\pi f(kT+\tau)+\theta]} + n'(k) \quad (3-74)$$

式(3-74)可以进一步表示为

$$z(k) = e^{j[2\pi f(kT+\tau)+\theta]} [1 + \hat{n}(k)] \quad (3-75)$$

其中, $\hat{n}(k) \triangleq n(k)c_k^* e^{j[2\pi f(kT+\tau)+\theta]}$ 。显然, $\hat{n}(k)$ 与 $n(k)$ 的统计特性相同。

$z(k)$ 的自相关函数为

$$R(m) = \frac{1}{L_0 - m} \sum_{k=m}^{L_0-1} z(k)z^*(k-m), \quad 1 \leq m \leq N \quad (3-76)$$

将式(3-75)代入式(3-76), 得

$$R(m) = e^{j2\pi mfT} [1 + \gamma(m)] \quad (3-77)$$

其中, $\gamma(m)$ 表示为

$$\gamma(m) = \frac{1}{L_0 - m} \sum_{k=m}^{L_0-1} [\hat{n}(k) + \hat{n}^*(k-m) + \hat{n}(k)\hat{n}^*(k-m)] = \gamma_R(m) + \gamma_I(m) \quad (3-78)$$

其中, $\gamma_R(m)$ 和 $\gamma_I(m)$ 分别表示 $\gamma(m)$ 的实部和虚部。当 $E_s/N_0=1$ 时, 式(3-78)中的 $\gamma(m) \ll 1$ 。因此式(3-77)可近似表示为 $R(m) \approx e^{j2\pi mfT} [1 + \gamma_I(m)]$ 。又由于 $|\gamma_I(m)| \ll 1$, 有 $\arg[1 + \gamma_I(m)] \approx \gamma_I(m)$, $R(m)$ 的幅角可近似为

$$\arg\{R(m)\} \approx 2\pi mfT + \gamma(m)$$

从而得到 M&M 频率估计^[29], 表示为

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi T} \sum_{m=1}^{L_0} \omega(m) [\arg\{R(m)\} - \arg\{R(m-1)\}]_{2\pi}$$

其中, $[\cdot]_{2\pi}$ 表示将结果限制在 $[-\pi, \pi]$ 区间, 平滑函数 $\omega(m)$ 表示为

$$\omega(m) \triangleq \frac{3[(L_0 - m)(L_0 - m + 1) - N(L_0 - N)]}{N(2N^2 - 6NL_0 + 3L_0^2 - 1)}$$

仿真结果表明, M&M 频率估计算法无偏估计范围比较大, 工作的信噪比门限比较低^[30]。

上述几种算法均针对 AWGN 信道中的单频检测问题而提出, 在接收机中对应于数据辅助的载波频率估计。对于数据未知的情况, 可以首先通过非线性处理^[32]消除数据调制, 然后再利用上述几种方法完成载波频率估计。

7. 导频结构设计

影响 DA(Data Aided)同步精度与范围的因素主要有两个: 一是导频的放置结构; 另一个是对应于导频结构的估计算法。因此 DA 同步算法可分两步, 分别是设计导频结构和

应的估计算法。

文献[32]证明了最优的导频结构为：在数据的两头各放一半导频，称为 PP(Pre/Post-ample, PP)结构，如图 3-31(a)所示。这里的最优导频结构是指码长和导频数一定时，使得估参数 CRB 最小的导频放置方式。对于 PP 结构，码长越长，估计精度越高，但估计的范围越小。

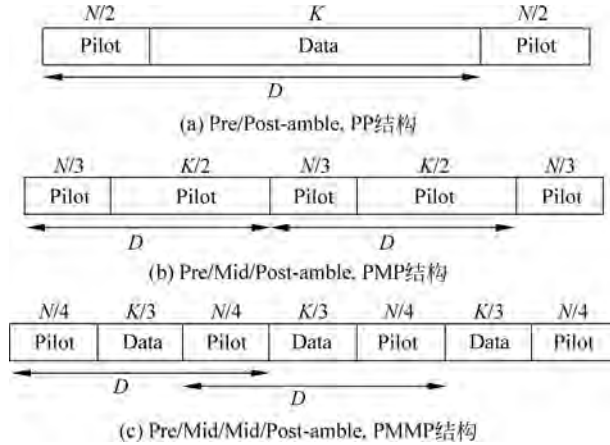


图 3-31 导频结构^[54]

在最优导频结构的基础上，需设计粗估计算法使之尽可能地接近最优导频结构的 CRB。由于传统的粗估计算法针对导频连续放置的结构，故不能直接用于 PP 结构，需对其做适当修改。文献[33]针对最优的 PP 结构提出了频率粗估计算法为

$$\hat{f}T = \frac{1}{2\pi D} \arg \left\{ \sum_{k=1}^{N/2} r^*(k)r(k+D) \right\} = \frac{1}{2\pi D} \arg \{R(D)\} \quad (3-79)$$

其中， $R(D) = \sum_{k=1}^{N/2} r^*(k)r(k+D)$ ， $D = N/2 + K$ ，其方差为

$$E[(\Delta\hat{f} - \Delta f)^2 T^2] = \frac{1}{2\pi^2 D^2} \left(\frac{1}{NSNR} + \frac{1}{2NSNR^2} \right)$$

为提高估计性能，文献[34]提出了基于相关函数和的频率粗估计算法

$$\begin{aligned} \hat{f}T &= \frac{1}{2\pi D} \arg \left\{ \sum_{k=1}^{N/2} \sum_{m=D+1}^{K+N} r^*(k)r(m) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi D} \arg \left\{ \sum_{l=0}^{N/2-1} R(D+l) + \sum_{l=1}^{N/2-1} R(D-l) \right\} \end{aligned} \quad (3-80)$$

其中， $R(D+l) = \sum_{k=1}^{N/2-l} r^*(k)r(k+D+l)$ ， $R(D-l) = \sum_{k=l+1}^{N/2} r^*(k)r(k+D-l)$ 。其方差为

$$E[(\Delta\hat{f} - \Delta f)^2 T^2] = \frac{1}{2\pi^2 D^2} \left(\frac{1}{NSNR} + \frac{1}{2N^2 SNR^2} \right)$$

文献[32]推导出 PP 结构的 DA 频率估计的克拉美罗界为

$$CRB(\hat{f}T) = \frac{1}{2SNR \cdot \pi^2} \cdot \frac{3}{N[N^2 - 3(K+N)N + 3(K+N)^2 - 1]}$$

此界可作为评价 DA 频率估计算法的标准。对于 DA 同步来说，符号样点的相位之差不能超过 π ，因此，频率估计的范围限定为

$$|fT| \leq \frac{1}{2D}$$

图 3-32 为导频结构为 PP 结构时两种频率估计算法的性能图,其中实测曲线的频偏设为 2.5×10^{-4} ,码长 $K=1200, N=120$ 。为方便起见,分别称式(3-79)和式(3-80)为单相关算法和多相关算法。从图 3-32 中可以看出,多相关算法的理论方差与 CRLB 基本重合,而单相关算法在低噪比区间离 CRLB 很远,随信噪比升高可逼近 CRLB。另外,多相关算法的实测和理论曲线的拟合度很高,而单相关算法在较高信噪比区间才有很高的拟合度。由于单相关算法比多相关简单,因此可得出结论:在极低信噪比区间(-10dB 左右),可用多相关算法估计频偏;而在低信噪比区间(0dB 左右),可用单相关算法估计频偏。

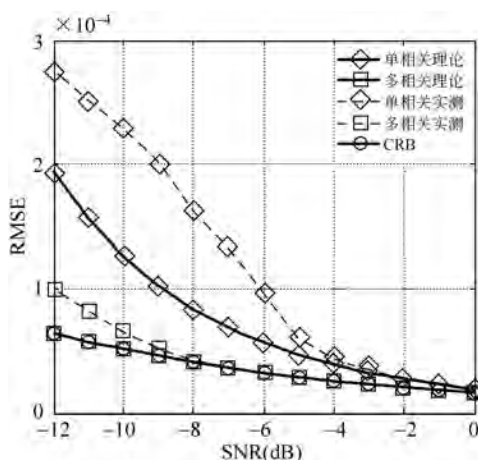


图 3-32 导频为 PP 结构时,单相关算法和多相关算法频偏估计 RMSE 曲线

在频率估计后,用频率的估计值去补偿信号,然后进行相位估计,对应的估计量为

$$\hat{\theta} = \arg \left\{ \sum_{k \in \text{LN}_{\text{pilot}}} r(k) e^{-j2\pi k \hat{f} T} \right\}$$

(1) 低信噪比下的同步方案(0dB 左右)。

如前所述,对于 PP 结构,频率估计的范围被限定为 $|fT| < 1/2D$,其中 $D = N/2 + K$ 。可见,码长越长,同步范围越小。而且, $1/2D$ 只是频率同步范围的上限值,在实际中往往低于这个值。因此,为扩大同步范围,可以适当地调整导频结构。虽然估计精度会略有降低,但可以通过精估计算法进行补偿。

针对低信噪比(0dB 左右)环境,提出一种 PMP(Pre/Mid/Post-ample)导频结构,即将导频分成相等的 3 份,放在数据的前中后,如图 3-31(b)所示。相应的频率估计算法为

$$\hat{f}T = \frac{1}{2\pi D} \arg \left\{ \sum_{k \in \text{Pilot}_{\text{pre}}} r^*(k) r(k+D) + \sum_{k \in \text{Pilot}_{\text{mid}}} r^*(k) r(k+D) \right\} \quad (3-81)$$

此时 $D = N/3 + K/2$,频率估计范围可提供大约 2 倍。其方差为

$$E[(\Delta \hat{f} - \Delta f)^2 T^2] = \frac{3}{16\pi^2 D^2 N} \left(\frac{1}{\text{SNR}} + \frac{1}{\text{SNR}^2} \right)$$

证明:

导频位置上的信号为

$$r(k) = e^{j(2\pi kfT + \theta)} + n(k), \quad k \in \text{LN}_{\text{Pilot}} \quad (3-82)$$

将式(3-82)代入式(3-81)

$$\hat{f}T = \frac{1}{2\pi D} \arg \left\{ \frac{2}{3} N e^{j2\pi DfT} + N_1 + N_2 \right\} \quad (3-83)$$

其中,

$$N_1 = \sum_{k_1 \in \text{Pilot}_{\text{pre}}} n(k_1 + D) e^{-j2\pi k_1 fT + \theta} + n^*(k_1) e^{j2\pi(k_1 + D)fT + \theta} + n^*(k_1) n(k_1 + D)$$

$$N_2 = \sum_{k_2 \in \text{Pilot}_{\text{pre}}} n(k_2 + 2D) e^{-j2\pi(k_2 + D)fT + \theta} + n^*(k_2 + D) e^{j2\pi(k_2 + 2D)fT + \theta} +$$

$$n^*(k_2 + D) n(k_2 + 2D)$$

归一化式(3-83)有

$$\hat{f}T = \frac{1}{2\pi D} \arg \left\{ e^{j2\pi DfT} + \frac{3}{2N} (N_1 + N_2) \right\}$$

对于信噪比足够高或当导频数很大时,上式可近似为

$$\hat{f}T = \frac{1}{2\pi D} \left\{ 2\pi DfT + \frac{3}{2N} (\text{Im}\{N_1\} + \text{Im}\{N_2\}) \right\}$$

$$= fT + \frac{3}{4\pi DN} (\text{Im}\{N_1\} + \text{Im}\{N_2\})$$

其中, $\text{Im}\{\cdot\}$ 表示取虚部。显然

$$E(\hat{f}T) = fT$$

可见式(3-81)是无偏的,其均方差为

$$E[(\hat{f} - \Delta f)^2 T^2] = \left(\frac{3}{4\pi DN} \right)^2 E\{(\text{Im}\{N_1\} + \text{Im}\{N_2\})^2\}$$

$$= \left(\frac{3}{4\pi DN} \right)^2 E\{(\text{Im}\{N_1\})^2 + 2(\text{Im}\{N_1\})(\text{Im}\{N_2\}) + (\text{Im}\{N_2\})^2\}$$

$$= \left(\frac{3}{4\pi DN} \right)^2 \frac{N}{3} \{(2\sigma^4 + 2\sigma^2) + (-2\sigma^2) + (2\sigma^4 + 2\sigma^2)\}$$

$$= \left(\frac{3}{4\pi DN} \right)^2 \frac{N}{3} (4\sigma^4 + 2\sigma^2)$$

将 $\text{SNR} = 1/2\sigma^2$ 代入上式,可得

$$E[(\hat{f} - \Delta f)^2 T^2] = \frac{3}{16\pi^2 D^2 N} \left(\frac{1}{\text{SNR}} + \frac{1}{\text{SNR}^2} \right) \quad (3-84)$$

图 3-33 为低信噪比下不同导频结构的粗同步鉴频曲线。可以看出, PMP 结构的同步范围大约为 PP 结构的 2 倍,与理论一致。

(2) 极低信噪比下的同步方案(-10dB 左右)。

在极低信噪比环境下, PP 结构的粗估计算法同样存在估计范围受限的问题。与低信噪比情况一样,可适当调整导频结构以扩大同步范围。因此文献[54]提出了一种 PMMP (Pre/Mid/Mid/Post-amble) 导频结构,即将导频分成相等的四份,均匀地放在数据两端和中间,如图 3-31(c)所示。记这 4 段导频的时间样点集合为 $P_i, i=1, 2, \dots, 4$ 。则相应的频率估计算法为

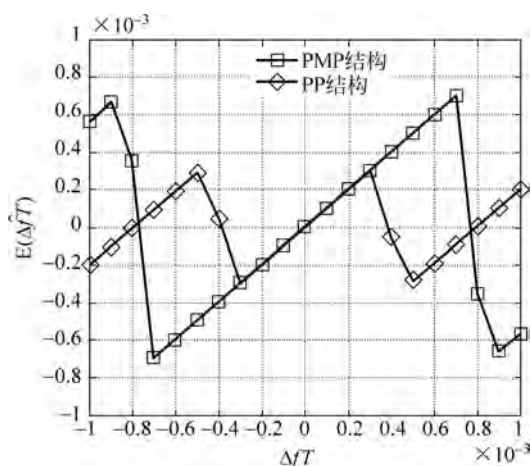


图 3-33 低信噪比下不同导频结构的粗同步鉴频曲线, SNR=0dB

$$\hat{f}T = \frac{1}{2\pi D} \arg \left(\sum_{k \in P_3} r(k) \sum_{k \in P_1} r^*(k) + \sum_{k \in P_4} r(k) \sum_{k \in P_2} r^*(k) \right) \quad (3-85)$$

其中, $D = N/3 + 2K/3$, 相比 PP 结构, 频偏估计范围可提高大约 1.5 倍。其均方误差为

$$E[(\hat{\Delta}f - \Delta f)^2 T^2] = \frac{1}{2\pi^2 D^2} \left(\frac{1}{NSNR} + \frac{2}{N^2 SNR^2} \right)$$

证明过程与式(3-84)相似, 由于篇幅较长, 这里不再赘述。图 3-34 为极低信噪比下不同导频结构的粗同步鉴频曲线。可以看出, PMMP 结构的同步范围大约为 PP 结构的 1.5 倍。

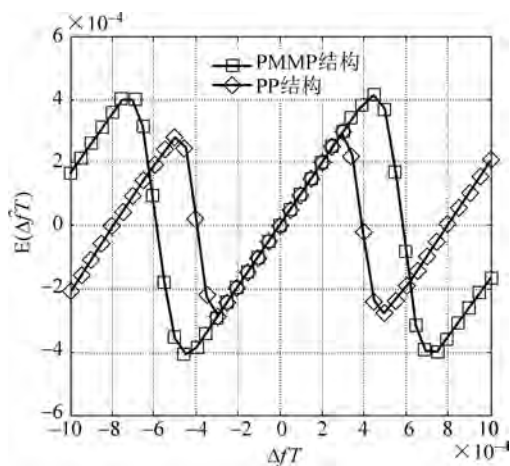
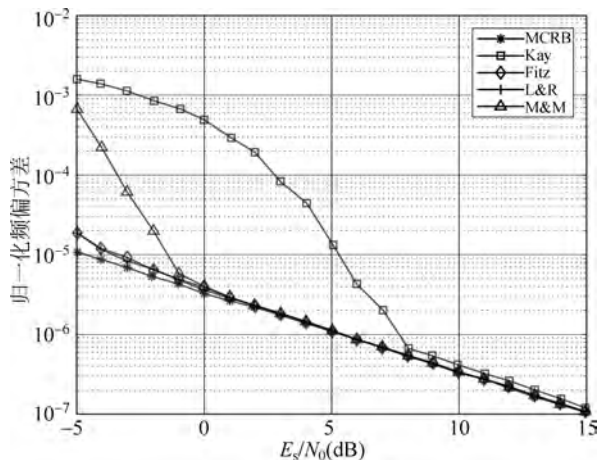


图 3-34 极低信噪比下不同导频结构的粗同步鉴频曲线, SNR=-9dB

8. 频率估计算法性能比较

评价载波频率估计算法性能的主要指标包括估计精度、估计范围、信噪比门限及实现复杂度。下面从几方面比较上述几种传统数据辅助算法性能^[30]。

假设信号中导频长度 L_0 为 36 个符号, 归一化频偏为 $f_d T = 0.01$ 。对上述 4 种算法估计精度的仿真结果如图 3-35 所示。为了比较性能, MCRB 也在图中给出, 其表达式为:

图 3-35 4 种频偏估计算法精度比较^[31]

$$T^2 \times \text{MCRB}(f_d) = \frac{3}{2\pi^2 L_0^3} \frac{1}{E_s/N_0}$$

从图 3-35 中可以看出, Kay 算法具有相对很高的门限效应, 门限的 E_s/N_0 为 8dB 左右。M&M 算法的门限比较低, 可以达到 0dB。而 Fitz 和 L&R 算法门限效应并不明显, 在 E_s/N_0 小于 0dB 时仍然非常接近克拉美罗线, 估计精度最高。

从频率估计范围角度, 根据上节算法介绍, Fitz 和 L&R 算法的归一化频率估计范围, 分别为 $\pm 1/(2N)$ 和 $\pm 1/(N)$ 。显然, 估计范围和自相关函数 $R(m)$ 中的最大长度 N 成反比。通过比较可以发现, Kay 算法实际上是 L&R、Fitz 算法在 $N=1$ 时的最优结果。因此, 只需要比较 L&R 算法和 M&M 算法的频率估计范围, 其仿真结果如图 3-36 所示。从图 3-36 中可以发现, L&R 算法的估计范围与理论一致, 且不随信噪比变化而变化。M&M 算法的估计范围在 10dB 时约为 ± 0.5 , 在 0dB 时约为 ± 0.3 。

在运算复杂度方面, Kay 的计算复杂度约为 L_0 次复乘运算, 其他算法的计算复杂度约为 $N(2L_0 - N - 1)/2$ 次复乘运算。

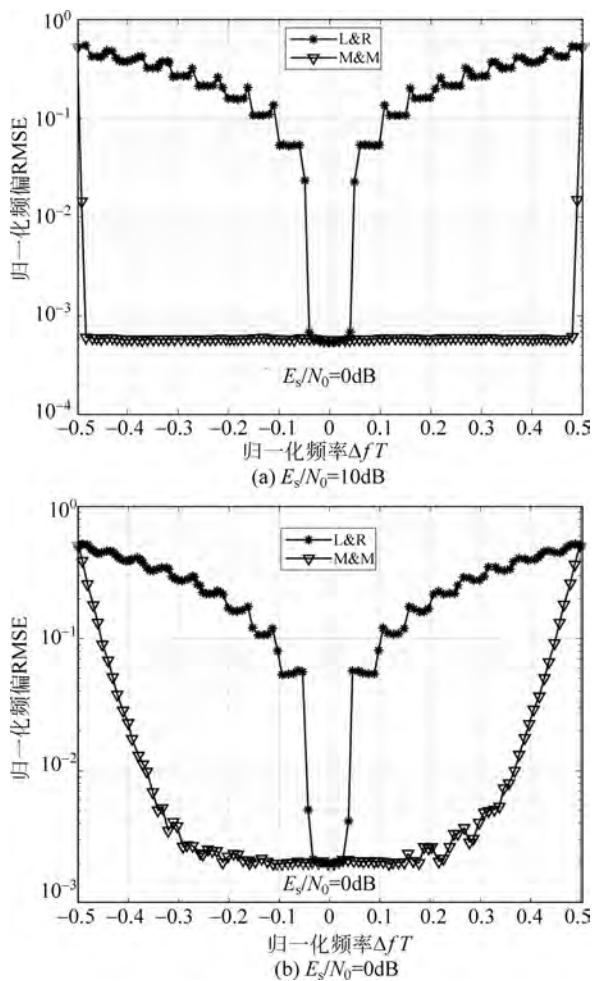
3.2.3 基于傅里叶变换的载波频偏同步技术

在经典的信号分析领域中占有统治地位的是傅里叶变换, 主要因为它可以匹配现实世界中存在的平稳信号的各频率成分, 而且还拥有高效的快速算法, 即快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transformation, FFT)。基于傅里叶变换的载波频偏同步技术不仅可以实现对载波频偏的估计, 而且可以实现对复杂运动场景中频偏变化率的估计。因此在高动态环境下具有较好的应用前景^[12]。下面介绍几种常见的基于傅里叶变换的载波频偏同步技术。

1. 分数阶傅里叶变换

分数阶傅里叶变换 (Fractional Fourier Transform, FRFT) 是一种时频分析工具。Namias 在 1980 年从数学的角度首先提出了 FRFT 的定义^[12], Almeida 分析了 FRFT 和 Wigner-Ville 之间的关系, 并且将 FRFT 解释为时频平面的旋转算子。McBride、Kerr 在 1987 年给出了 FRFT 的严格数学定义, 之后由 Cariolaro 给出了 FRFT 统一的定义^[13]。

FRFT 是傅里叶变换的一种广义形式, FRFT 是将信号的坐标轴在时频平面上绕原点


 图 3-36 L&R 和 M&M 算法的频偏估计范围^[31]

作逆时针旋转。如果说信号的傅里叶变换是将其从时间轴上逆时针旋转 $\pi/2$ 后到频率轴上的表示,那么 FRFT 是把信号在时间轴上逆时针旋转角度 α 在 u 轴上的表示。信号 $s(t)$ 的 FRFT 定义如下^[14]:

$$s_{\alpha}(u) = F^p[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)k_{\alpha}(t, u)du$$

式中, p 为 FRFT 的阶,它可以是任意实数, $\alpha = p\pi/2$, $F^p[\cdot]$ 称作 FRFT 算子符号, $k_{\alpha}(t, u)$ 是 FRFT 的变换核。

$$k_{\alpha}(t, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - j\cot\alpha}{2\pi}} \exp\left(j \frac{t^2 + u^2}{2} \cot\alpha - tu \csc\alpha\right), & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t - u), & \alpha = 2n\pi \\ \delta(t + u), & \alpha = (2n + 1)\pi \end{cases}$$

由上式可知,信号 $s(t)$ 被分解成 u 域上的一组正交线性调频信号基的线性组合。 u 域称作分数阶傅里叶域,时域和频域常常被视为分数阶傅里叶域的特例^[12,13]。

信号表示在分数阶傅里叶域上同时具备了信号时域和频域上的信息。其中, $F^p[s(t)]$

中, $\alpha=0, 2\pi$ 是恒等变换, 称作 0 阶傅里叶变换。 $\alpha=\pi/2, 5\pi/2$, 称作一阶傅里叶变换或标准傅里叶变换。 $\alpha=p\pi/2$ 是旋转角度, 一个旋转周期为 $\alpha=[0, 2\pi]$, 也即 $p=[0, 4]$ 。

FRFT 是线性变换, 是 p 的连续函数。线性调频信号在 α, u 的二维平面 $F_x(\alpha, u)$ 上对应某个最大值的点, 通过二维搜索可以得到最大值点对应的坐标 (α, u) , 进而可以得到调频

斜率和初始频率:
$$\begin{cases} k = -\cot\alpha \\ \tau\omega_0 = u/\sin\alpha \end{cases}$$
, 分数阶傅里叶变换虽然可作为一种检测噪声中线性调频

(Linear Frequency Modulated, LFM) 信号的方法, 但是它的计算量非常大。

2. 短时傅里叶变换

短时傅里叶变换是通过对信号进行加窗截取并对窗内信号进行傅里叶变换的一种频率分析方法。在较短的截取时间内可以认为信号是近似的平稳的。通过分析窗在时间轴上移动获取不同时间段信号, 通过分析各时间段内信号的“局部”谱, 从“局部”谱不同时刻的差异上就得到信号的时变特性。

短时傅里叶变换的定义如下:

$$\text{STFT}_s(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t')\omega^*(t'-t)e^{-j2\pi ft'} dt' \tag{3-86}$$

由式(3-86)可见, 正是由于窗函数 $\omega(t)$ 的存在, 使得短时傅里叶变换既是频率的函数又是时间的函数, 同时具备了时频特征。 $\text{STFT}_s(t, f)$ 可看作是给定的时间 t 时刻的频谱。当窗函数 $\omega(t)=1$ 时, 短时傅里叶变换就变成了传统的傅里叶变换。短时傅里叶变换可以用信号谱和窗谱表示:

$$\text{STFT}_s(t, f) = e^{-j2\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} s(f')H^*(f'-f)e^{j2\pi ft'} df' \tag{3-87}$$

除了式(3-87)中的相位因子 $e^{-j2\pi ft}$ 以外, 频域表达式(3-87)与上面的时域表达式(3-86)类似。表达式(3-87)说明了短时傅里叶变换可以解释为加窗谱 $s(f')H^*(f'-f)$ 的傅里叶逆变换。 $s(f)$ 是信号 $s(t)$ 的傅里叶变换, $H(f)$ 是窗函数 $\omega(f)$ 的傅里叶变换。加窗谱 $s(f')H^*(f'-f)$ 的傅里叶逆变换可以解释为: 信号 $s(f')$ 通过频率响应为 $H^*(f'-f)$ 的滤波器所得到的结果。该滤波器是一个中心频率为 f 的带通滤波器。短时傅里叶变换可以通过带通滤波器实现, 如图 3-37 所示。信号的短时傅里叶变换也可以通过低通滤波器实现, 如图 3-38 所示。短时傅里叶变换的低通实现与带通实现等价^[16]。

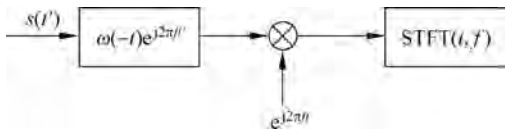


图 3-37 STFT 通过带通滤波器实现框图

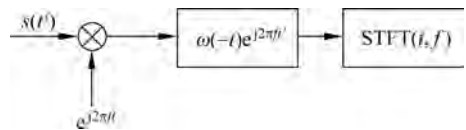


图 3-38 STFT 通过低通滤波器实现框图

由于在时间 t 的短时傅里叶变换是经过窗函数 $\omega^*(t'-t)$ 预加窗后的信号 $s(t')$ 的谱, 因此只要是处于以时间 t 为中心的局部谱窗间隔内的所有信号, 它的特性均可以在时间 t 的短时傅里叶变换内显现出来。显然, 提高短时傅里叶变换的时间分辨率要求窗尽可能小, 但提高其频率分辨率又要求滤波器 $H^*(f'-f)$ 带宽尽可能窄, 这是短时傅里叶变换设计的难点。设 Δf 和 Δt 分别代表短时傅里叶变换的频率分辨率和时间分辨率, 它们的乘积需要满足不等式 $\Delta f \cdot \Delta t \geq 1/4\pi$, 称为不确定性原理。不确定性原理阻碍了任意小带宽的窗

函数和任意小时间间隔同时存在的可能性。考虑分析窗 $w(t)$ 的两个极端情况。第一种有非常理想的时间分辨率,分析窗是一个无穷窄的冲击函数:

$$\text{STFT}_s(t, f) = s(t) e^{-j2\pi ft}$$

在这种情况下,短时傅里叶变换变为 $s(t)$,它可以保留信号的所有时间变化,但是不能提供频率分辨率。第二种的极端的情况就是使用不变窗函数 $w(t) \equiv 1$,这样可以得到理想的频率分辨率^[16]。

不同窗函数对主瓣的分辨率和对旁瓣的抑制程度不同,因此选择合适的窗函数对提高短时傅里叶变换的时频分辨能力十分重要。窗函数的选择会受到频率分辨率和时间分辨率无法同时变小的不确定性原理的制约。这使得短时傅里叶变换估计结果的时频聚集性较差,难以取得高精度估计值。此外,短时傅里叶变换分布对噪声是比较敏感的,限制了其在低信噪比情况下的应用。

3. 匹配傅里叶变换

匹配傅里叶变换源自傅里叶变换的思想。给定任意信号 $s(t) \in L^2(R)$,其傅里叶变换的定义如下:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-88)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-89)$$

从式(3-88)和式(3-89)可以看出,傅里叶变换的基本原理是将一个信号用无穷多个正弦函数的加权和来表示。因为这些正弦函数频率固定不变,所以傅里叶变换适合分析频率不随时间变化的信号,即平稳信号,而对于频率随时间变化的非平稳信号(例如 LFM 信号),傅里叶变换并不能给出满意的结果。

将信号分解成一组基函数的线性组合是信号分析的一种重要手段。如果这组基函数与信号的主要频率成分相似,那么只需要有限个基函数的线性组合就能实现原信号的数学表达。因此在采用基函数分解方法时,根据信号的先验知识,采用与信号的局部结构特征相似的基函数,可以实现用尽可能少的基函数来表示信号。因此基函数选取原则是根据信号自身的特点并且要和信号最为匹配。

对于线性调频信号 $s(t) = \sum_t c_i e^{j\omega_i t^2}$ 来说,定义其匹配傅里叶变换的定义式为

$$S(\omega) = 2 \int_0^T s(t) e^{-j\omega t^2} t dt$$

式中, $S(\omega)$ 为线性调频信号的频谱,线性调频信号频谱的幅值大小与之对应。更一般的匹配傅里叶变换的形式为:

$$S(\omega) = \int_0^T s(t) e^{-j\omega\varphi(t)} d\varphi(t)$$

逆变换为

$$s(t) = \frac{1}{X} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-j\omega\varphi(t)} d\omega$$

式中, $\varphi(t)$ 为 t 的函数,需要指出的是, $\varphi(t)$ 可以是多项式,每一项的指数可以是整数或者是分数。

对于线性调频信号 $s(t)$:

$$s(t) = e^{j2\pi(f_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2)}$$

式中, f_0 为 LFM 的起始频率, a_0 为 LFM 的调频斜率。其匹配傅里叶变换为:

$$S(f, a) = \int_0^T s(t) e^{j2\pi(ft + \frac{1}{2} at^2)} \left(t + \frac{f}{a}\right) dt \quad (3-90)$$

式(3-90)所示的是匹配傅里叶变换的一种具体形式, 它的基函数取的是 LFM 信号形式。为了计算方便, 匹配傅里叶变换也可以选取下面的形式:

$$S(f, a) = \int_0^T s(t) e^{j2\pi(ft + at^2)} t dt \quad (3-91)$$

由式(3-90)计算得到的频谱图可以称为二阶匹配傅里叶变换谱, 式中 a 不为零, 表示不同基条件下匹配傅里叶变换谱。式(3-91)是不同频率补偿条件下的匹配傅里叶变换谱。由式(3-91)计算得到的频谱图叫作二步匹配傅里叶变换谱。由于我们实际要处理的信号都是经过采样的离散信号, 所以匹配傅里叶变换的离散形式有

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(\varphi(nT_s)) e^{-j2\pi k \Omega \varphi(nT_s)} [\varphi(nT_s) - \varphi((n-1)T_s)]$$

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(\varphi(nT_s)) e^{-j2\pi k \Delta \varphi(nT_s)} \varphi(nT_s) T_s$$

线性调频信号的离散形式可以表示为

$$s(n) = e^{j2\pi[f_0 nT_s + \frac{1}{2} a_0 (nT_s)^2]}$$

式中, 采样时间间隔为 T_s , T 为信号持续时间, 则采样点数 $N = T/T_s$ 。LFM 的离散匹配傅里叶变换频谱为

$$S(f, a) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-j2\pi[f nT_s + \frac{1}{2} a (nT_s)^2]} (f + a nT_s)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi[(f_0 - f)nT_s + \frac{1}{2}(a_0 - a)(nT_s)^2]} (f + a nT_s)$$

$$S(f, a) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-j2\pi[f nT_s + \frac{1}{2} a (nT_s)^2]} nT_s$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi[(f_0 - f)nT_s + \frac{1}{2}(a_0 - a)(nT_s)^2]} nT_s$$

无论离散二阶匹配傅里叶变换谱还是离散二步匹配傅里叶变换谱, 都能在对应于信号 (f_0, a_0) 的位置上发生信号能量的聚集, 在谱上表现为一个尖峰。在匹配傅里叶变换谱分布图上进行二维搜索, 尖峰的坐标 (f_0, a_0) 就是该 LFM 信号的线性频率 f_0 和线性调频斜率 a_0 , 对于离散二阶匹配傅里叶变换和离散二步匹配傅里叶变换来说, 二者的分辨率是不同的, 二步匹配傅里叶变换比二阶匹配傅里叶变换的分辨率更高。

4. 延迟自相关傅里叶变换

延迟自相关傅里叶变换利用一次自相关运算和两次正弦信号的频率估计将复杂的二维搜索转换到两次一维搜索, 不仅降低了计算复杂度, 而且将两段信号之间具有相同多普勒频率变化率的先验信息进行了充分利用, 实现了线性调频信号的多普勒频率及其变化率的快速估计。已去除调制信息的线性调频信号 $r(t)$ 可以表示为(含噪声):

$$r(t) = e^{j2\pi(f_0 + \frac{1}{2} a_0 t^2)} + n(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3-92)$$

其中, f_0 是频偏, a_0 是频偏变化率, $n(t)$ 是复加性高斯白噪声。

延迟自相关傅里叶变换的基本思想是, 将信号 $r(t)$ 与其延迟 τ 的信号 $r(t-\tau)$ 进行自相关, 然后结合正弦信号的频率估计算法(如 FFT 技术), 实现频偏和频偏变化率的估计。并将与 FFT 结合的延迟自相关算法称为延迟自相关 FFT 算法。

假设接收信号延时为 τ , 则其瞬时自相关函数可以表示为

$$R(t, \tau) = r(t + \tau)r^*(t), \quad 0 \leq t \leq T - \tau$$

联合式(3-92)可得

$$R(t, \tau) = e^{j2\pi(f_0\tau + \frac{1}{2}a_0\tau^2 + f_0t\tau)} + n'(t)$$

其中, 噪声项为

$$n'(t) = e^{j2\pi(f_0(t+\tau) + \frac{1}{2}a_0(t+\tau)^2)} n^*(t) + e^{j2\pi(f_0t + \frac{1}{2}a_0t^2)} n(t + \tau) + n(t + \tau)n^*(t)$$

当延时 τ 固定时, $R(t, \tau)$ 可以看作噪声 $n'(t)$ 污染下的复正弦信号, 其载波频率为 $f_0\tau$ 。针对解调后的信号 $R(t, \tau)$, 采用复正弦信号的频偏估计算法(例如 FFT 算法), 即可从 $R(t, \tau)$ 中估计出频率(f_0, a_0), 则接收信号 $r(t)$ 的频偏变化率的估计值为

$$\hat{f}_0 = \hat{f} / \tau \tag{3-93}$$

由式(3-93)可以发现, 延时 τ 对频偏变化率的估计精度影响很大, 并且一旦确定了频偏估计算法, f_0 的估计精度就仅与延时 τ 有关。文献[17]用一阶扰动分析推导出最佳延迟为 $0.5T$, 算法实现框图如图 3-39 所示。文献[18]从正弦信号频率估计误差的克拉美罗界出发, 证明了最佳延迟为 $0.4T$ 。

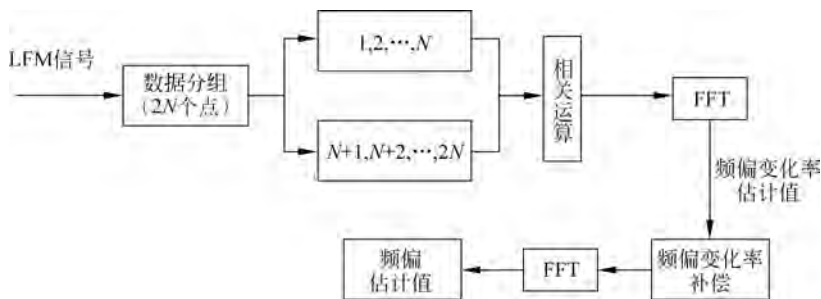


图 3-39 $\tau=0.5T$ 的延迟自相关 FFT 算法框图

5. 频域并行傅里叶变换

频域并行傅里叶变换即一级调频率逼近算法是一种基于 LFM 信号“矩形效应”的载波捕获算法。根据 LFM 信号的频谱特性, 信号的频率变化率越小, 频谱聚集性越好, 对应频谱的幅值越大, 其最大频谱幅值对应谱线的频率也最接近起始频率。因此, 一级调频率逼近算法的基本思想可总结为: 按照某种步进划分频偏变化率, 用各频偏变化率对接收信号进行解线性调制处理, 然后分别对已解除线性调制的信号进行 FFT, 并搜索各自的频谱峰值。当频偏变化率越接近真实值, 解线调后的信号频谱峰值就越大, 此时的频谱峰值对应的频率也越逼近真实频偏。算法的具体步骤如下:

- (1) 假设接收信号的频偏变化率在 (a_{\min}, a_{\max}) 范围内, 以 δ 为步进将频偏变化率划分为 a_1, a_2, \dots, a_M , 共 M 个离散值, 其中 $a_1 = a_{\min}, a_M = a_{\max}$ 。
- (2) 分别使用 a_1, a_2, \dots, a_M 实现接收信号 $r(t)$ 的解线性调制过程, 获得的 M 组解线性

调制信号 $r_i(t)$ 如下:

$$r_i(t) = r(t) e^{-j2\pi a_i t^2/2}$$

其中, $r(t)$ 如式(3-92)所示, $i=1, 2, \dots, M$ 。

(3) 对解线性调制信号 $r_i(t)$ 做 FFT 运算, 搜索并记录 M 组 FFT 下的频谱峰值 A_i ($i=1, 2, \dots, M$) 及峰值对应的频率值 Δf_i ($i=1, 2, \dots, M$);

(4) 比较 A_1, A_2, \dots, A_M , 选出最大值 A_{\max} , 则 A_{\max} 对应的 a_{\max} 为频偏变化率的估计值, 其最大峰值对应的频率为 f_{\max} :

$$\hat{a} = \operatorname{argmax}_{a_i} A_i$$

$$\hat{f} = \operatorname{argmax}_{f_i} A_i$$

由上述算法步骤可以发现, 采用一级调频率逼近的载波捕获算法得到的频偏变化率估计值和频偏估计值与频偏变化率的步进紧密相关, 频偏变化率步进选取得越小, 得到的估计值就越精确, 但是此时 M 取值更大, 会造成更大的运算复杂度。下面用复数乘法次数和复数加法次数来度量一级调频逼近算法的运算复杂度:

步骤(1)、(2)包含的复数乘法次数为 $M \times N$, 复数加法次数为 0, 其中 N 为离散信号长度; 步骤(3)要完成 M 组 N 点 FFT, 所以包含的复数乘法次数为 $M \times \left(\frac{N}{2}\right) \log_2 N$, 复数加法次数为 $M \times N \log_2 N$ 。因此, 可以计算出一级调频率逼近的载波捕获算法共包含的复数乘法次数为 $M \times N + M \times \left(\frac{N}{2}\right) \log_2 N$, 复数加法次数为 $M \times N \log_2 N$ 。

频偏变化率的估计结果受其步进大小的影响, 当步进选取较小值时, 估计结果较好。但是, 由一级调频率逼近算法原理可知, 步进越小, 算法的运算复杂度越高, 不利于突发信号的同步实现。

6. 基于交叠傅里叶变换的载波同步技术

文献[25]提出的交叠傅里叶变换算法(Overlapping Discrete Fourier Transformation-based Automatic Frequency Control, ODAFC)的载波同步技术结合了经典谱估计和传统数字相位锁定环的基础理论^[26]。其环路中的交叠频率鉴别器可认为是传统叉积频率鉴别器的推广。

1) ODAFC 原理

ODAFC 环路的原理框图如图 3-40 所示。设环路的输入信号和本地信号经过相位旋转和低通滤波模块处理后, 得到的同相和正交分量采样分别为

$$I_n = A \cos(\Delta\theta_n) + n_{In} \quad (3-94)$$

$$Q_n = A \sin(\Delta\theta_n) + n_{Qn} \quad (3-95)$$

式中, A 为信号幅度, 它和载波功率 P_c 的关系为

$$A^2 = P_c$$

$\Delta\theta_n$ 为环路输入信号和本地信号的瞬时相位差, 噪声序列 $\{n_{In}\}$ 和 $\{n_{Qn}\}$ 是相互独立的高斯随机变量, 其均值为 0, 方差为

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2T}$$

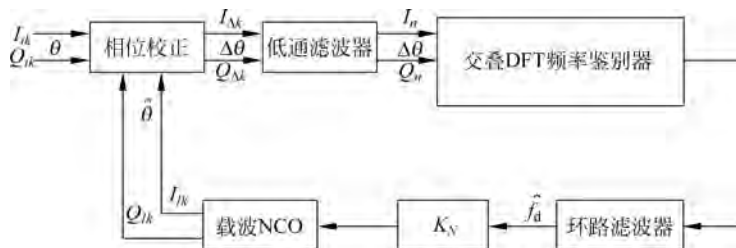


图 3-40 ODAFC 环路的原理框图

其中, N_0 是噪声的单边功率谱密度, T 为 ODAFC 环路的预积分时间, 也被称为环路的更新周期。

如图 3-41 所示为低通滤波模块输出信号复序列和交叠 DFT 频率鉴别器在 $n = k$ 时刻输入信号序列的对应时序关系, 该图反映了交叠 DFT 频率鉴别器输入信号采样的交叠原理。在每一个环路的更新周期内, 交叠 DFT 频率鉴别器对长度为 N_s 的输入序列做一次 $2N_s$ 点的 DFT(补 N_s 个零点)。如果将交叠 DFT 频率鉴别器的输入信号采样表示为

$$x_n = I_n + jQ_n$$

经 DFT 后得到

$$\begin{aligned} X_{k,l} &= \frac{1}{N_s} \sum_{s=n=k-(N_s-1)}^k x_n e^{-j2\pi nl/(2N_s)} \\ &= R_{k,l} + jM_{k,l} \end{aligned}$$

那么交叠 DFT 频率鉴别器在 $n = k$ 时刻的输出为

$$\begin{aligned} P_k &= R_{k,l}^2 + M_{k,l}^2 - (R_{k,-l}^2 + M_{k,-l}^2) \\ &= \left(\frac{1}{N_s}\right)^2 \sum_{m=k-(N_s-1)}^k \sum_{n=k-(N_s-1)}^k 2(I_n Q_m - Q_n I_m) \times \sin\left(\frac{\pi}{N_s}(n-m)\right) \end{aligned}$$

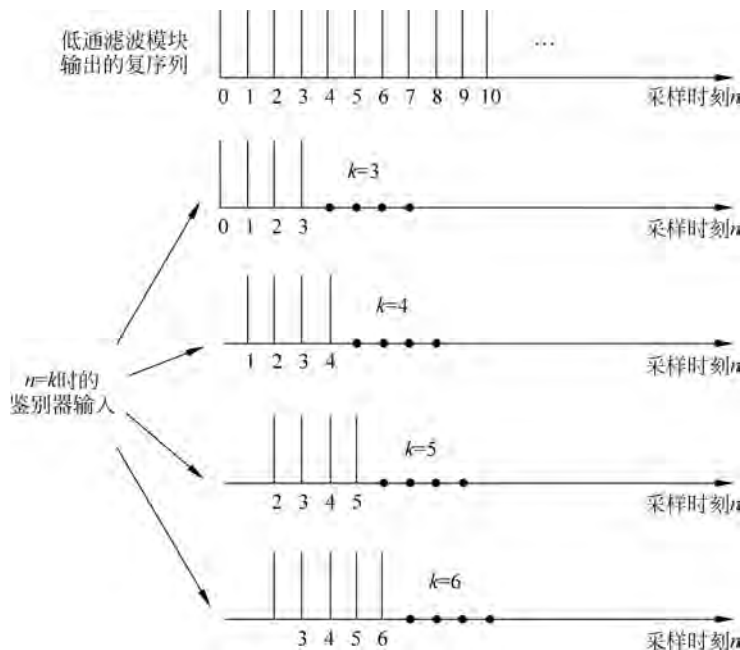


图 3-41 交叠 DFT 频率鉴别器输入信号采样的交叠原理

由于 DFT 的线性特性, 可将 P_k 展开成信号项和噪声项的叠加, 其中鉴别器输出的信号项为

$$S_k = 2 \left(\frac{1}{N_s} \right)^2 \sum_{m=k-(N_s-1)}^k \sum_{n=k-(N_s-1)}^k A^2 \sin(\Phi_m - \Phi_n) \times \sin\left(\frac{\pi}{N_s}(m-n)\right)$$

噪声项为

$$N_{\text{eq},k} = 2 \left(\frac{1}{N_s} \right)^2 \sum_{m=k-(N_s-1)}^k \sum_{n=k-(N_s-1)}^k [An_{Qm} \cos(\Phi_n) + An_{In} \sin(\Phi_m) - An_{Im} \sin(\Phi_n) - An_{Qn} \cos(\Phi_m) + n_{In}n_{Qm} - n_{Im}n_{Qn}] \times \sin\left(\frac{\pi}{N_s}(m-n)\right)$$

在这里交叠频率鉴别器输出的信号 S_k 作为环路的误差控制信号被送入环路滤波器, 使环路滤波器的输出端产生对环路输入信号频率的估计。这里特别值得注意的是, 对于环路的控制信号 S_k , 当频率鉴别器输入的信号采样点数 $N_s=2$ 时可以得到

$$\begin{aligned} S_k &= 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sum_{m=k-1}^k \sum_{n=k-1}^k A^2 \sin(\Phi_m - \Phi_n) \times \sin\left(\frac{\pi}{N_s}(m-n)\right) \\ &= \sin(\Phi_k - \Phi_{k-1}) \\ &= \sin\Phi_k \cdot \cos\Phi_{k-1} - \cos\Phi_k \cdot \sin\Phi_{k-1} \end{aligned}$$

此时的交叠频率鉴别器等效为经典的叉积频率鉴别器。因此, 经典的叉积频率鉴别器是交叠频率鉴别器在 $N_s=2$ 时的特殊情形。反之, 交叠频率鉴别器是叉积频率鉴别器在 N_s 为不同取值时的推广。

2) 仿真分析

分别对 $N_s=4$ 和 $N_s=8$ 不同环路带宽下 ODAFC 算法的载波跟踪性能进行仿真, 结果如图 3-42~图 3-45 所示。

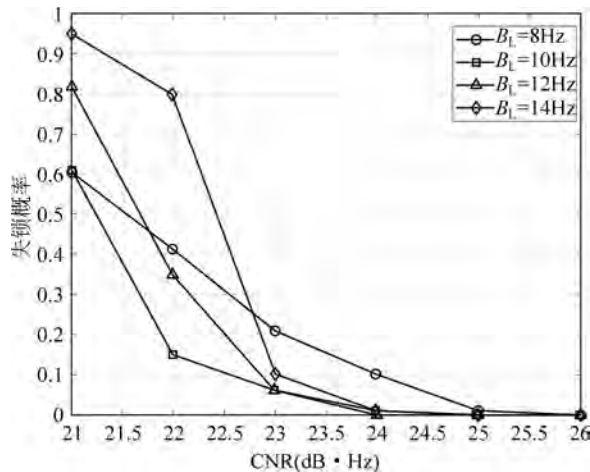
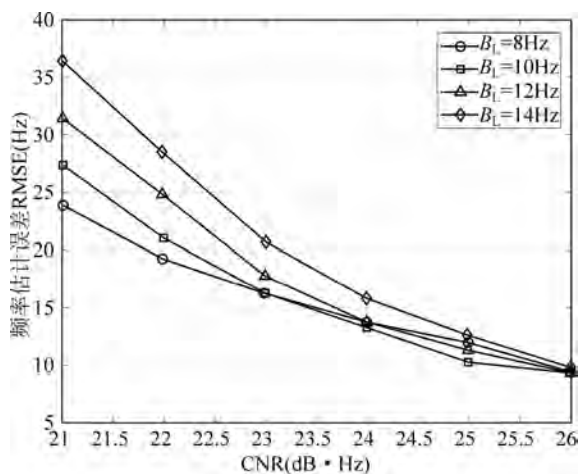
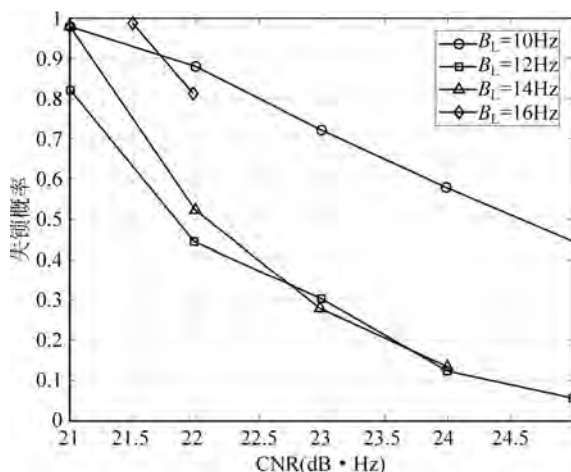


图 3-42 ODAFC 的失锁概率与载噪比的对应关系 ($N_s=4$)

图 3-42 给出了当 $N_s=4$ 时的失锁概率与载噪比的对应关系曲线, 其中各条曲线分别对应不同环路带宽时的情形。从仿真结果可以看出, 当环路带宽 $B_L=10\text{Hz}$ 时, ODAFC 具有最低的失锁门限, 约为 $22.5\text{dB}\cdot\text{Hz}$ 。图 3-43 给出了当 $N_s=4$ 时的频率估计 RMSE 与 CNR 的对应关系曲线, 其中各条曲线同样对应着不同环路带宽时的情形。由仿真结果可

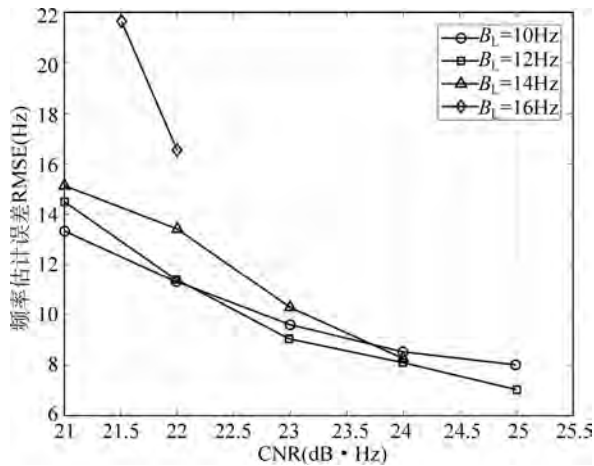
图 3-43 ODAFC 的频率估计 RMSE 随载噪比变化曲线 ($N_s = 4$)图 3-44 ODAFC 的失锁概率与 CNR 的对应关系 ($N_s = 8$)

见,当环路带宽 $B_L = 8\text{Hz}$ 时,ODAFC 在失锁门限 $22.5\text{dB} \cdot \text{Hz}$ 上具有最低的 RMSE 频率跟踪误差,约为 17.7Hz 。

图 3-44 和图 3-45 则分别给出了当 $N_s = 8$ 时的失锁概率和 RMS 频率估计误差与 CNR 的对应关系曲线。由仿真结果可见,当交叠 DFT 频率鉴别器一次输入的信号采样点数从 N_s 由 4 增加到 8 时,ODAFC 的失锁门限有所提高。从图 3-44 中的曲线可以发现当环路带宽 $B_L = 12\text{Hz}$ 时,环路的失锁门限最低,约为 $24\text{dB} \cdot \text{Hz}$ 。而从图 3-45 中的结果可见,随着 N_s 由 4 增加到 8,环路的 RMSE 频率跟踪精度有了明显改善。特别是当环路带宽 $B_L = 12\text{Hz}$ 时,在 ODAFC 的失锁门限上,环路的 RMSE 频率跟踪误差仅为 8.1Hz 。

7. 傅里叶变换改进算法

基于 FFT 的同步算法是在离散傅里叶变换 DFT 基础上提出的载波同步算法,利用 FFT 运算,在很大程度上改进了计算速度。FFT 同步算法首先对去调制信号进行傅里叶变换,其次对变换后的信号在周期图上搜索峰值,最后由峰值谱线的索引值和频谱分辨率 f 。

图 3-45 ODAFC 的频率估计 RMSE 随 CNR 变化曲线($N_s=8$)

计算得到频偏估计值。

FFT 算法的估计精度和傅里叶变换点数呈正相关,增加傅里叶变换点数,可以提高估计精度,但也会导致计算量呈指数上升。除此之外,FFT 算法存在着一个固有的弊端。实际上系统中传输的信号是频谱连续的模拟信号,对连续的模拟信号采样得到离散信号。连续的信号需截断成长度有限才能进行频谱分析,即需要对连续信号加矩形窗使信号频谱的采样离散。若信号采样周期为 T_s ,FFT 运算点数为 N_{fft} ,则信号观测时间为 $t' = N_{fft} T_s$,此时频谱分辨率为 $f_0 = 1/(N_{fft} T_s)$,由于谱线是离散的,当频率为频谱分辨率为 f_0 的倍数,即 $M/(N_{fft} T_s) = Mt'$, $M=1,2,\dots$ 时才有谱线,其余谱线均因被遮挡而舍弃,称为频谱泄漏,此现象称为栅栏效应。由此带来的频率估计偏差无法完全消除。

为了减轻栅栏效应,可以通过增大谱线密度即减小 f_0 实现。但是增加采样间隔 T_s ,需要满足奈奎斯特采样定律;因此可以通过增大傅里叶变换点数 N_{fft} 提高搜索精度,但同时会带来运算量的剧增,而且在一些条件受限的通信系统中不可能无限制地增加傅里叶变换点数。本节研究了 3 种改进算法:联合导频辅助、频偏旋转和插值运算。利用已知导频信息对接收信号进行去调制,可以去除信号调制对信号频谱的影响,提高 FFT 算法频偏估计精度。在导频序列足够长时将导频序列分为数段,对每小段导频序列进行频偏旋转后再进行 FFT 变换,既减小了频偏分辨率,又保证了计算量的增加在系统可接受的范围内。如果导频序列长度受限,那么将导频序列分为数段后,由于每段导频序列过短将会导致估计性能下降。在噪声可忽略的情况下,FFT 频谱内旁瓣的幅度小于次大谱线的幅度,因此可以用峰值谱线和次大谱线的幅度信息做插值运算,更准确地定位系统实际频偏在频谱中的位置,校正 FFT 算法的估计值,如二次插值、Rife&Jane 插值等算法。

1) 联合导频辅助

通常接收信号同步处理起始点不是符号周期的边界,FFT 运算长度与符号周期内采样点数也不一致,因此带有调制信息的采样信号在观测时间内常常存在符号跳变,这直接影响经傅里叶变换后的信号频谱幅度。图 3-46 是无噪声条件下去调制前后的信号频谱图。

通过对比去调制前后的信号频谱可观测到符号跳变会对信号功率谱的产生削弱作用,因此去调制操作可以有效去除这种作用,进而还原信号频偏峰值信息。设比特信噪比

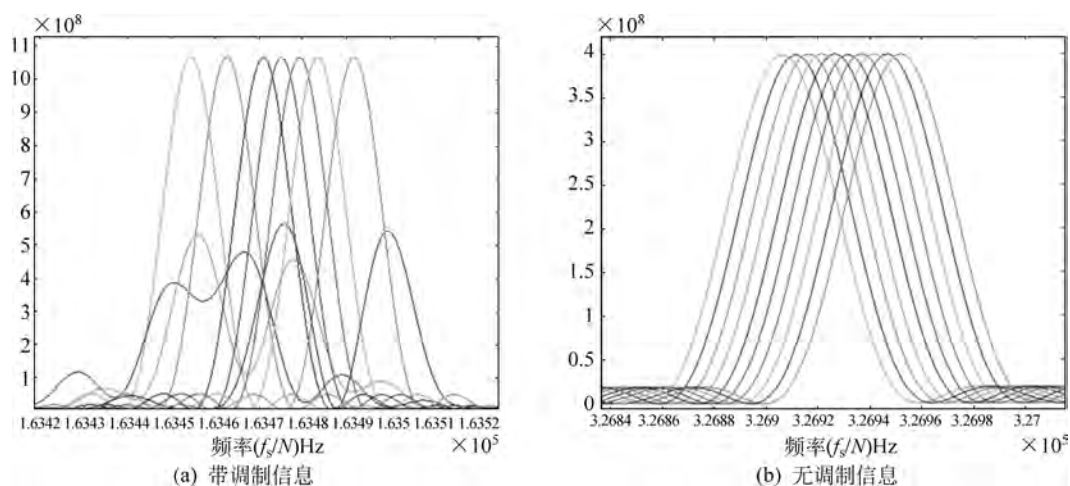


图 3-46 无噪声条件下去调制前后信号功率谱对比图

$E_b/N_0 = 0 \sim 3\text{dB}$, 采用 BPSK(Binary Phase Shift Keying) 调制方式, FFT 长度 $N = 20\,000$, 频偏估计误差不高于 10Hz , 频偏变化率估计误差不高于 20Hz/s , 对基于 FFT 的频偏同步算法进行仿真:

从图 3-47 可知, 经过导频去调制后, 基于 FFT 的频偏估计算法的捕获概率提高了 3dB 以上, 而且随着信噪比的增加, 算法捕获性能得到了进一步改善。

此外, Rife 和 Boorstyn 提出的 R&B 算法通过在导频序列后补上导频长度整数倍个零来提高频谱分辨率, 设补零倍数为 $K-1$, L_0 为导频长度, 则 FFT 运算点数 $N_{\text{fft}} = KL_0$, 频谱分辨率 $f_0 = 1/(KL_0 T_s)$, 相比原算法提高了 K 倍。设 $K=4$, 归一化频偏 $\Delta f T_s = 0.45$, 图 3-48 给出了在不同导频长度 L_0 下 R&B 估计算法的均方根误差曲线。

由图 3-48 可知, 当导频序列 L_0 长度由 16 增加到 32 时, 由于导频序列长度较短, 所有有用信息有限, R&B 算法的均方根误差改善量并不明显, 当 L_0 增加到 64 时, 估计精度有很大提高。导频序列长度的增加, R&B 算法的估计性能不断提高。

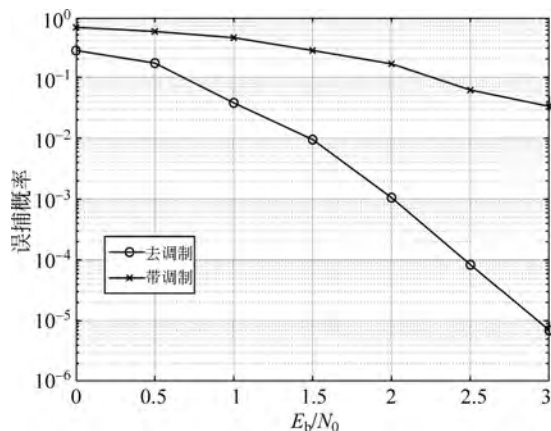


图 3-47 去调制前后基于 FFT 的频偏估计算法捕获概率对比图

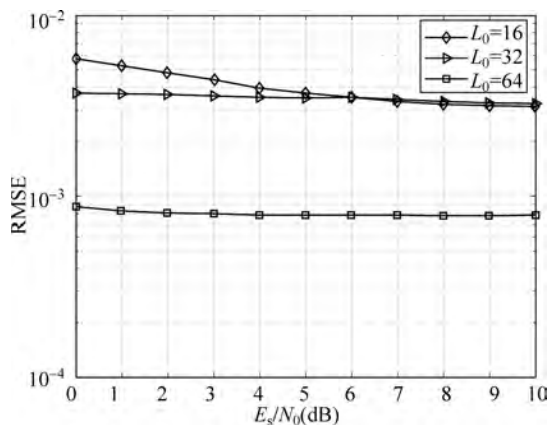


图 3-48 R&B 算法在不同导频长度下的 RMSE 性能

2) 频偏旋转

(1) 旋转与重叠(Rotate&Overlap, R&O)。

R&O 算法通过将导频序列分段后进行频偏旋转,将旋转后的序列再进行 FFT 运算,以此提高频谱分辨率。首先,将长为 L_0 的导频序列分为 R 段,则每一小段导频序列包含 L_0/R 个符号,其次,对每一段导频序列去调制后的信号 $\mathbf{z} = \{z_l\}, l=1, 2, \dots, L_0/R$, 进行 R 次频偏旋转得

$$\mathbf{z}_r = \mathbf{z} e^{-j2\pi f_r T_s}, \quad r=1, 2, \dots, R$$

其中, f_r 为第 r 次旋转的频偏量,其表达式为

$$f_r = \frac{r}{RT_s N_{\text{fft}}} \quad (3-96)$$

最后,对旋转后的序列 \mathbf{z}_r 进行 $N_{\text{fft}} = T_b/T_s \cdot L_0/R$ 点 FFT,得到

$$Z_{k,r}(f_r) = \text{FFT}(\mathbf{z}_r, N_{\text{fft}}), \quad k=1, 2, \dots, N_{\text{fft}} \quad (3-97)$$

根据式(3-97)中 $Z(k)$ 的峰值谱线位置,由式可得到 R&O 算法的频偏估计值。

$$\hat{f}_d = \frac{k_{\max}}{T_s N_{\text{fft}}} + \frac{r_{\max}}{RT_s N_{\text{fft}}}, \quad (k_{\max}, r_{\max}) = \underset{k,r}{\text{argmax}}\{Z(k,r)\} \quad (3-98)$$

相比于原 FFT 算法,由于 R&O 算法在估计结果上多了式(3-98)等号右端的第二项,因此提高了频谱分辨率。

图 3-49 给出了不同 L_0 条件下, R&O 算法的估计性能。采用 QPSK 调制,导频序列 L_0 分别为 16、32、64 符号,旋转次数 R 为 4 次,归一化频偏 $\Delta f T_s$ 为 0.45。由图 3-49 可知, R&O 算法的估计范围可达到符号速率的一半。随着导频序列长度的增加, R&O 算法的均方根误差不断降低,即估计精度不断提高。由图 3-49 可以看出,当 L_0 过小时, R&O 算法的估计精度很差,这是由于导频序列过短,将导频序列分段后,每小段导频所含有用信息太少,使算法整体的估计结果不可靠,因此估计性能较差。

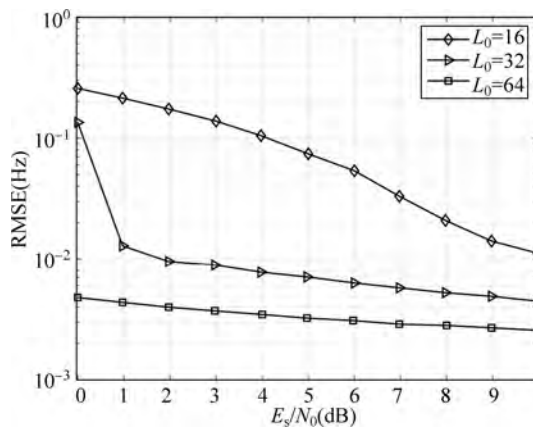


图 3-49 R&O 算法在不同导频长度时的估计性能

(2) 旋转与平均(Rotate&Average, R&A)。

不同于 R&O 算法, R&A 算法在将导频序列分段旋转的基础上做了改进,对经过旋转 FFT 运算后的序列取平均值。如 R&O 算法,在旋转并进行 FFT 运算后,对 FFT 后序列 $Z(k,r)$ 取 R 的平均值得

$$\bar{Z}_k = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R Z_{k,r}(f_r)$$

则 R&A 算法对频偏的估计结果为

$$\hat{f}_d = \frac{k_{\max}}{T_s N_{\text{fft}}} + \frac{r_{\max}}{RT_s N_{\text{fft}}} \quad (3-99)$$

其中, $k_{\max} = \operatorname{argmax}_k \bar{Z}_k$, $r_{\max} = \operatorname{argmax}_r Z_{k,r} |_{k=k_{\max}}$ 。与 R&O 算法不同, r_{\max} 和 k_{\max} 的选择并不是由 FFT 后的序列 $Z(k,r)$ 的幅度最大值决定的, 而是由 $Z(k,r)$ 及取均值后的 \bar{Z}_k 共同决定的。式(3-99)等号右端第二项可看作是对 FFT 算法频偏估计值的进一步校正, 提高了 FFT 算法的估计精度。

同样仿真条件下, 图 3-50 给出了 L_0 不同时 R&A 算法的估计性能, 与 R&O 算法相同, R&A 算法的估计范围可达到符号速率的一半, 且随着导频序列长度的增加, 均方根误差逐渐降低, 即估计性能不断改善。因此 R&O 及 R&A 算法适用于对估计范围有较高要求且导频序列长度不受限的通信系统中。

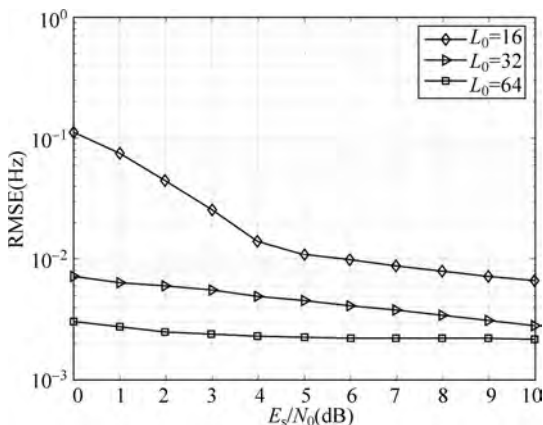


图 3-50 R&A 算法在不同导频长度下的均方根误差

(3) 旋转周期图算法 (Rotated Periodogram Algorithm, RPA)。

R&O 及 R&A 算法均能对 FFT 算法的栅栏效应有所改善, 且当导频序列足够长时, R&O 及 R&A 算法的估计性能较好, 但考虑到频谱有限, 为保证频谱利用率要求系统中插入的导频序列越短越好。当 L_0 长度受限时, 再将其分为多段, 则每小段导频序列过短, 导致每小段导频序列所含有的有用信息非常少, 估计性能并不理想。文献[19]中提出的 RPA 算法对导频序列不分段的情况下进行多次旋转, 然后对旋转后的序列分别做 FFT 计算, 相当于对导频序列做多次 FFT, 提高了频谱分辨率。RPA 算法首先对接收到的导频序列 $\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_k\}$, $k=1, 2, \dots, L_0$ 做 R 次频偏旋转, 如式

$$\mathbf{z}_r = \mathbf{z} e^{-j2\pi f_r T_s}, \quad r=1, 2, \dots, R$$

对频偏旋转后的序列 \mathbf{z}_r 做 $N_{\text{fft}} = T_b/T_s \cdot L_0$ 点 FFT, 则

$$Z'_k(f_r) = \text{FFT}(\mathbf{z}_r, N_{\text{fft}}), \quad k=1, 2, \dots, N_{\text{fft}}$$

关于旋转次数 R 取平均有

$$\bar{Z}_k = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R Z'_k(f_r)$$

则频偏估计值为

$$\hat{f}_d = \frac{k_{\max}}{T_s N_{\text{fft}}} + \frac{r_{\max}}{T_s N_{\text{fft}}}$$

其中, $k_{\max} = \operatorname{argmax}_k \bar{Z}_k$, $r_{\max} = \operatorname{argmax}_r Z_r^r |_{k=k_{\max}}$ 。当导频长度不受限时 R&A 算法通过将导频分块旋转可以获得更多的观测数据, 频偏估计性能优于 RPA 算法, 但在导频长度受限的通信系统中, 由于 RPA 算法是对整段导频进行频偏旋转, 故而具有更优异的性能。

图 3-51 给出了在 L_0 不同条件下 RPA 算法的均方根误差, 对比图 3-51 与图 3-49、图 3-50 可知, RPA 算法在相同条件下均方根误差要低于以上两种算法, 即性能更好。由于 RPA 算法不对导频序列进行分段, 在相同的旋转次数下, RPA 的计算量更大。

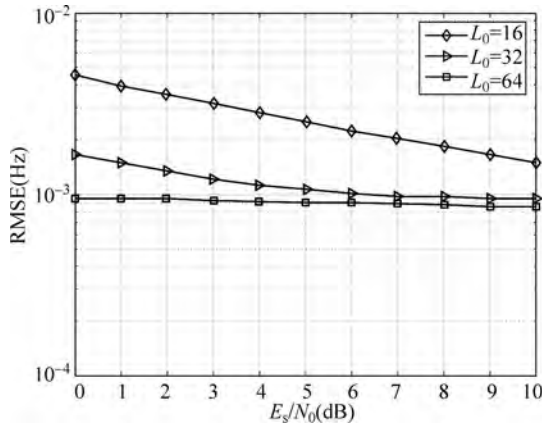


图 3-51 RPA 算法在不同导频长度下的均方根误差

3) 插值算法

(1) 二次插值。

对导频序列 $\mathbf{z} = \{z_k\}, k = 1, 2, \dots, L_0$ 进行 FFT 得到序列 $Z = \{Z(k), k = 1, 2, \dots, N_{\text{fft}}\}$, 当频谱分辨率 f_0 较大时, 估计精度很低。设峰值谱线处的索引值为整数 \hat{k} , 则 FFT 算法的频偏估计值为 $\hat{f}_d = \hat{k} f_0, f_0 = 1/(N_{\text{fft}} T_s)$ 。当采样速率 T_s 固定不变, f_0 的大小主要取决于 N_{fft} , 由于 FFT 算法的计算量主要取决于 N_{fft} , 因此不能通过无限制增大 N_{fft} 来提高 FFT 算法的估计精度。系统实际频偏 Δf 通常会处于两条谱线之间, 即 $\Delta f = k/(N_{\text{fft}} T_s), k$ 是一个实数, 峰值谱线左右两条谱线也包含频偏信息, 即 \hat{k} 与 k 的差值。利用峰值谱线的左右两条谱线对 \hat{k} 进行纠正, 由文献[20]可知插值计算公式:

$$\Delta \hat{k} = \frac{|Z(\hat{k} + 1)| - |Z(\hat{k} - 1)|}{|Z(\hat{k} + 1)| + |Z(\hat{k} - 1)|} \quad (3-100)$$

对导频序列 \mathbf{z} 做 $N_{\text{fft}} = T_b/T_s \cdot L_0$ 点 FFT, 则频谱分辨率 $f_0 = f_s/N_{\text{fft}} = T_b L_0, T_b$ 为符号速率。在峰值谱线处的索引值 \hat{k} 正确时, 峰值谱线与实际频偏值的距离不大于 $\pm T_b L_0$, 且峰值谱线左右两条谱线的距离也是 $\pm T_b L_0$, 则峰值谱线左右的谱线一定在频谱周期图主瓣内, 即 $\pm 2T_b L_0$ 。 $\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x)/\pi x$ 为内插函数, 则峰值谱线两侧的谱线的

sinc 函数值分别为 $\text{sinc}((k - (\hat{k} + 1))/2)$ 和 $\text{sinc}((k - (\hat{k} - 1))/2)$ 。主瓣内 sinc 函数值为正,则可对式(3-100)改写为:

$$\begin{aligned} \frac{|Z(\hat{k} + 1)| - |Z(\hat{k} - 1)|}{|Z(\hat{k} + 1)| + |Z(\hat{k} - 1)|} &= \frac{|\text{sinc}[(k - (\hat{k} + 1))/2]| - |\text{sinc}[(k - (\hat{k} - 1))/2]|}{|\text{sinc}[(k - (\hat{k} + 1))/2]| + |\text{sinc}[(k - (\hat{k} - 1))/2]|} \\ &= \frac{\text{sinc}[(k - (\hat{k} + 1))/2] - \text{sinc}[(k - (\hat{k} - 1))/2]}{\text{sinc}[(k - (\hat{k} + 1))/2] + \text{sinc}[(k - (\hat{k} - 1))/2]} \\ &= k - \hat{k} \\ &= \Delta k \end{aligned} \quad (3-101)$$

其中, k 是实际频偏值所对应的峰值的准确位置。由式(3-101)可知 $\Delta\hat{k}$ 是对 \hat{k} 的无偏补偿,则二次插值算法的系统频偏的表达式为

$$\hat{f}_d = (\hat{k} + \Delta\hat{k}) \cdot f_0$$

载波频偏估计的修正克拉美罗界^[11]为

$$T_s \times \text{MCRB}(f) = \frac{3}{2\pi^2 L_0^3} \frac{1}{E_s/N_0} \quad (3-102)$$

由式(3-101)可知, L_0 越大,估计性能越好。同样大小的 L_0 , FFT 算法采用的 N_{fft} 越小,即频谱分辨率越低时,二次插值算法的优点越明显。设系统条件相同,图 3-52 给出了插值量 Δk 不同时,二次插值算法的均方根误差曲线。由图 3-52 可知,二次插值算法具有和 FFT 算法相同的频偏估计范围,且相对于 FFT 算法,估计性能有所改善。由式(3-99)可知相对于 FFT 算法二次插值算法所带来的计算量的增加仅为两次加法运算和一次乘除运算。

(2) Rife&Jane 算法^[21]。

不同于二次插值算法, Rife&Jane 算法利用峰值谱线和次大谱线的幅度比值来校正 FFT 算法的频偏估计值,即估计 Δk 的大小。和 FFT 算法相同, Rife&Jane 算法首先对导频序列 $\mathbf{z} = \{z_k\}$, $k = 1, 2, \dots, L_0$ 进行 N_{fft} 点的 FFT, 得到傅里叶变换的序列 $\mathbf{Z} = \{Z(k)\}$, $k = 1, 2, \dots, N_{\text{fft}}$ 。利用峰值谱线的索引值 \hat{k} 可对系统频偏粗估计得 $\hat{f}'_d = \hat{k}f_0$ 。当系统实际频偏不是 f_0 的整数倍时, $Z(k)$ 在主瓣内将包含两条谱线。将峰值谱线和第二大谱线的幅度分别记为 Z_1 和 Z_2 , 第二大谱线的索引值记为 \hat{k}_2 , $\hat{k}_2 = \hat{k} \pm 1$, 则 $Z_1 = |Z(\hat{k})|$, $Z_2 = |Z(\hat{k} \pm 1)|$, 将谱线的幅度比记为 α , 则 $\alpha = Z_2/Z_1$, 系统实际频偏 f_d 与 FFT 的估计值 f'_d 的相对差值 Δk 为:

$$\Delta k = \frac{\Delta f - \hat{k}f_0}{f_0} \quad (3-103)$$

由幅度比 α 可得到 Δk 的估计值为

$$\Delta k = \pm \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

则 Rife&Jane 算法的频偏估计值为

$$f_d = (\hat{k} + \Delta\hat{k})f_0 \quad (3-104)$$

若谱线次大值位于峰值的右侧,则式(3-104)中等号右侧取加号,若位于左侧则取减号。

利用上式对频偏进行插值运算,计算简单,复杂度较低。信噪比 SNR 较大时,旁瓣的幅度必定比次大谱线的幅度小,插值方向无误,Rife&Jane 插值算法有较高的精确度。但 SNR 较小或 $|\Delta k|$ 较小时,由于噪声的影响次大谱线的幅度可能小于 FFT 主瓣另一侧的旁瓣的幅度,导致插值方向相反,频偏估计出现误差。为了抑制旁瓣的幅度,可在傅里叶变换之前对导频数据进行加窗运算。加窗处理后使主瓣变宽,且使得峰值谱线两侧的次大谱线更易区分。

(3) Quinn 算法

Quinn 算法和二次插值类似,在 FFT 算法的基础上利用离散谱线中的幅度最大的峰值谱线及其左右两侧的谱线对 FFT 算法的频偏估计值进行校正,不同的是,Quinn 算法利用次大谱线和峰值谱线的 FFT 系数之比的实部来进行频偏估计。设导频序列经过 FFT 后峰值谱线的索引值为 m 、 $m-1$ 及 $m+1$ 分别为位于峰值谱线左右两侧的谱线,则其中一条为次大谱线。令次大谱线 $Z_{m\pm 1}$ 与峰值谱线 Z_m 的 FFT 系数之比的实部为 α_1 、 α_2 ,即

$$\alpha_1 = \text{Re}\{Z_{m-1}/Z_m\} \quad (3-105)$$

$$\alpha_2 = \text{Re}\{Z_{m+1}/Z_m\} \quad (3-106)$$

其中, $\text{Re}\{\cdot\}$ 表示取实部。分别计算 $k_1 = \alpha_1/(1-\alpha_1)$, $k_2 = \alpha_2/(1-\alpha_2)$, 则 Quinn 算法的频率插值为

$$\Delta \hat{k} = \begin{cases} k_2, & k_1 > 0, k_2 > 0 \\ k_1, & \text{其他} \end{cases} \quad (3-107)$$

用 φ_1 、 φ_2 和 φ_3 表示序列 $Z = \{Z(k)\}$, $k = 1, 2, \dots, N_{\text{fft}}$ 的峰值谱线、次大值谱线、峰值谱线另一侧谱线的相位。忽略噪声影响,有

$$\varphi_1 - \varphi_2 \approx \pi \quad (3-108)$$

$$\varphi_1 - \varphi_3 \approx 0$$

当系统实际频偏大于 FFT 算法频偏估计值 mf_0 时,次大值频谱位于峰值频谱的右侧,由式(3-105)和式(3-106)可知 $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, 则 k_1 、 k_2 均小于零,则 Quinn 算法的频率插值为 $\Delta \hat{k} = k_1 < 0$; 若系统实际频偏小于 mf_0 , 则次大值谱线位于峰值谱线的左侧,由式(3-105)和式(3-106)可知 $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$, 则 k_1 、 k_2 均为正值,此时,算法的频率插值为 $\Delta \hat{k} = k_2 > 0$ 。因此,系统实际频偏大于或小于 mf_0 , 式(3-106)均能得到正确插值。

当系统实际频偏与 mf_0 相差很小时,由式(3-103)可知, Δk 很小,则此时峰值谱线左右两侧的谱线和峰值谱线的幅度比十分接近,即

$$\frac{|Z_{m-1}|}{|Z_m|} \approx \frac{|Z_{m+1}|}{|Z_m|} \quad (3-109)$$

由式(3-109)可知,此时 Rife&Jane 算法可能出现插值方向错误。对于 Quinn 算法,利用相位信息而非次大值谱线和峰值谱线的幅度比来判断插值方向,由式(3-108)可知, Z_{m-1} 和 Z_{m+1} 的相位相差 π , 因此与 Rife&Jane 算法相比,不容易出现如 Rife&Jane 算法一般在受噪声干扰的情况下出现差值方向的错误。

由于插值类基于 FFT 的改进算法需要用到峰值谱线与其左右两边的次大值谱线,若系统实际频偏很小,峰值谱线为第一根谱线,或系统实际频偏很大,峰值谱线为最后一根谱线,此时峰值谱线只有右侧谱线并没有左侧谱线或右侧谱线,即出现插值类算法不可用的情况。

为改善这种插值算法不可用的情况,可适当提高频谱分辨率,即降低 f_0 的值来改善 FFT 算法的性能,但增大频谱分辨率也意味着计算量的增加,这与插值类算法在不增加计算量的基础上提高估计精度、改善频谱泄漏的思想矛盾。在实际的仿真实验中若出现峰值谱线为第一根或最后一根频谱的情况,则不进行插值计算,仅将 FFT 算法的频偏估计值作为插值算法的频偏估计值。

图 3-52 给出了以上插值算法在系统归一化频偏 $\Delta f T_s$ 不同时的均方根误差曲线。仿真采用导频前置的帧结构,其中导频序列 L_0 为 64 符号,采用 QPSK 调制,傅里叶变换点数 N_{fft} 为 256,频偏分辨率 f_0 为 390.625Hz。由图 3-52 可知,当 $\Delta f T_s$ 为 0.45 时,系统实际频偏的位置 k 为 115.2,则 $|\Delta k|$ 的值为 0.2, $|\Delta k|$ 值较小,此时 Rife&Jane 算法由于插值方向错位导致估计性能不稳定,Rife&Jane 算法性能最差,Quinn 算法最优,二次插值算法介于两者之间;当系统归一化频偏 $\Delta f T_s$ 为 0.4 时,系统实际频偏的位置 k 为 102.4,则 $\Delta f T_s$ 的值为 0.4, $\Delta f T_s$ 的值接近 0.5,此时 Rife&Jane 算法的估计精度有所提升且更稳定。

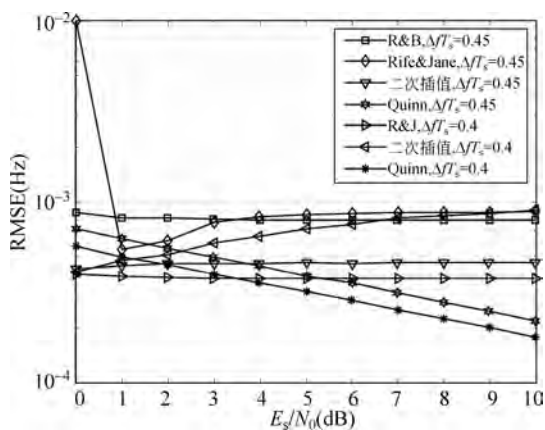


图 3-52 不同插值算法的 RMSE 性能对比^[22]

由于频偏估计的均方根误差是一个统计平均值,无法反映出单次估计的结果,表 3-4 统计了 100 000 次循环中 Rife&Jane、二次插值算法、Quinn 算法与 R&B 算法在信噪比 SNR=0dB、SNR=5dB, $\Delta f T_s=0.45$ 时,各个算法的均方根误差在不同分布范围内的统计次数。

表 3-4 不同算法归一化残留频偏分布范围对比

算法	信噪比	$<3.0 \times 10^{-3}$	$3.0 \times 10^{-3} \sim 5.0 \times 10^{-3}$	$5.0 \times 10^{-3} \sim 7.0 \times 10^{-3}$	$>7.0 \times 10^{-3}$
		R&B	SNR=0dB	0	100 000
	SNR=5dB	0	100 000	0	0
Rife&Jane	SNR=0dB	98 304	0	1469	227
	SNR=5dB	99 996	0	4	0
二次插值	SNR=0dB	94 240	5651	109	0
	SNR=5dB	99 904	96	0	0
Quinn	SNR=0dB	99 985	15	0	0
	SNR=5dB	100 000	0	0	0

由表 3-4 可以看出,在信噪比 $SNR=0\text{dB}$ 时,R&B 算法会有主瓣内次大谱线的幅度小于旁瓣幅度的情况,导致插值出现偏差,相对于 R&B 算法,二次插值、Rife&Jane 及 Quinn 算法的归一化剩余频偏小于 3×10^{-3} 。但由于噪声干扰,Rife&Jane 算法仍会出现插值有误的情况,当 SNR 增大到 5dB 时,二次插值、Quinn 及 Rife&Jane 算法在估计精度高于 R&B 算法的同时仅有极少次的归一化剩余频偏大于 3×10^{-3} 。

4) 复杂度分析

表 3-5 仅给出了复加和复乘运算的运算量,由于除了对导频序列进行 FFT 外,各算法的计算量中包含的实数运算极少,因此表中忽略了实数运算、取峰值频谱幅度运算以及求最大值运算。由文献[23]可知,R&B 算法的计算量包含 $N_{\text{fft}}\log_2 N_{\text{fft}}/2$ 复乘和 $N_{\text{fft}}\log_2 N_{\text{fft}}$ 复加以及 N_{fft} 次取模值运算。每一次复乘包含四次乘法运算和两次加法运算,每次取模运算包含一次加法和两次乘法运算,搜索 $|Z(k)|$ 的最大值需要 N_{fft} 次比较。 N_{fft} 为傅里叶变换点数,则 R&B 算法的计算量包括 $N_{\text{fft}}\log_2 N_{\text{fft}}/2$ 复乘和 $N_{\text{fft}}\log_2 N_{\text{fft}}$ 复加。

相对于 R&B 算法,R&O、R&A 及 RPA 算法的计算量主要是由于对导频序列进行的 R 次旋转及多次的傅里叶变换,二次插值、Rife&Jane 及 Quinn 算法相对于以上频谱旋转类算法,计算量的增加很少,且主要来源于插值量 $\Delta\hat{k}$ 的计算。忽略极少次的实数运算,表 3-5 给出了以上算法的计算量。

由表 3-5 可以看出,RPA 算法由于不对导频序列分段直接进行频偏旋转,因此运算量最大。R&O 和 R&A 算法的区别不大,仅在于是否对每小段导频序列的 FFT 变换结果取了平均值,因此两者的计算量一样。插值类算法的运算量远小于旋转类算法,二次插值、Rife&Jane 以及 Quinn 算法的计算量均与 R&B 算法的计算量相同。

表 3-5 FFT 改进算法的运算量对比^[22]

算 法	复 加 运 算	复 乘 运 算
R&O	$RN_{\text{fft}}^2\log_2 N_{\text{fft}}$	$N_{\text{fft}}(RN_{\text{fft}}\log_2 N_{\text{fft}}+L_0)/2$
R&A	$RN_{\text{fft}}^2\log_2 N_{\text{fft}}+R$	$N_{\text{fft}}(RN_{\text{fft}}\log_2 N_{\text{fft}}+L_0)/2$
RPA	$RN_{\text{fft}}^2\log_2 N_{\text{fft}}+R$	$N_{\text{fft}}(RN_{\text{fft}}\log_2 N_{\text{fft}}+RL_0)/2$
Rife&Jane	$N_{\text{fft}}\log_2 N_{\text{fft}}$	$(N_{\text{fft}}\log_2 N_{\text{fft}})/2$
二次插值	$N_{\text{fft}}\log_2 N_{\text{fft}}$	$(N_{\text{fft}}\log_2 N_{\text{fft}})/2$
Quinn	$N_{\text{fft}}\log_2 N_{\text{fft}}$	$N_{\text{fft}}\log_2 N_{\text{fft}}$

3.3 载波相位同步技术

本节主要介绍载波相位同步技术,包括数据辅助载波相位同步技术、基于判决引导的载波相位同步技术、非数据辅助载波相位同步技术和编码辅助载波相位同步技术,并对以上相位同步技术进行仿真和算法性能比较。

3.3.1 非数据辅助载波相位同步

本节讨论数据符号未知情况下载波相位同步问题。相比于数据辅助载波相位同步技术,非数据辅助载波相位同步不依赖于已知符号数据信息,不受恶劣通信环境下符号判决错

误的影响,即使在低信噪比条件下也能实现载波同步。

1. 闭环非数据辅助载波相位同步

假设接收信号已经实现理想的载波频率同步和定时同步,无噪声基带信号可表示为

$$s(t) = e^{j(2\pi ft + \theta)} \sum_i c_i g(t - iT - \tau)$$

其中,已知传输延时 τ 和频率偏移 f ,未知量 θ 和符号数据 $\{c_i\}$ 的联合似然函数为

$$\Lambda(\mathbf{r} | \tilde{f}, \tilde{\theta}) = \exp \left\{ \frac{1}{N_0} \int_0^{T_0} \text{Re}[r(t) \tilde{s}^*(t)] dt - \frac{1}{2N_0} \int_0^{T_0} |\tilde{s}(t)|^2 dt \right\} \quad (3-110)$$

其中, $\mathbf{c} = \{c_i\}$, 且

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= e^{j(2\pi ft + \theta)} \sum_i \tilde{c}_i g(t - iT - \tau) \\ \int_0^{T_0} |\tilde{s}(t)|^2 dt &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{c}_k \tilde{c}_m^* h[(k-m)T] \\ \int_0^{T_0} \text{Re}[r(t) \tilde{s}^*(t)] dt &= \sum_{k=0}^{N-1} \text{Re}\{c_k^* x(k) e^{j\theta}\} \end{aligned} \quad (3-111)$$

其中, $N = T_0/T$ 仍表示观测间隔内的符号周期数。 $h(t) = g(t) * g(-t)$, $*$ 表示卷积操作。 $x(k)$ 是匹配滤波器在 $t = kT + \tau$ 时刻的输出,则

$$x(k) \triangleq [r(t) e^{-j2\pi ft}] * g(-t)$$

为简化问题分析过程,假设

$$h(kT) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (3-112)$$

由于 $h(kT)$ 满足奈奎斯特条件,式(3-111)可简化为

$$\int_0^{T_0} |\tilde{s}(t)|^2 dt = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 \quad (3-113)$$

将式(3-113)和式(3-112)代入式(3-110),有

$$\Lambda(\mathbf{r} | \tilde{\theta}, \tilde{\mathbf{c}}) = \exp \left\{ \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Re}\{x(k) \tilde{c}_k^* e^{-j\tilde{\theta}}\} - \frac{1}{2N_0} \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{c}_k|^2 \right\} \quad (3-114)$$

在式(3-114)右边乘以一个独立于 θ 和 $\{c_i\}$ 的正常数不会影响求极值结果,假设这一常数为

$$C = \exp \left\{ \frac{1}{2N_0} \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 \right\}$$

则式(3-114)可表示为

$$\Lambda(\mathbf{r} | \tilde{\theta}, \tilde{\mathbf{c}}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2N_0} \sum_{k=0}^{N-1} | \{x(k) e^{-j\tilde{\theta}}\} - \tilde{c}_k |^2 \right\} \quad (3-115)$$

考虑到数据符号独立等概率分布,信号能量可表示为 $C_2/2 = E\{|\tilde{c}_i|^2\}/2$ (证明过程参见文献[2]的附录 2. A), 则信噪比是 $E_s/N_0 = C_2/(2N_0)$, 可得

$$2N_0 = \frac{C_2}{E_s/N_0} \quad (3-116)$$

将式(3-116)代入式(3-115), 则

$$\Lambda(\mathbf{r} | \tilde{\theta}, \tilde{\mathbf{c}}) = \exp \left\{ -\frac{E_s}{C_2 N_0} \sum_{k=0}^{N-1} | \{x(k) e^{-j\tilde{\theta}}\} - \tilde{c}_k |^2 \right\}$$

将上式中的求和项改写为乘积形式:

$$\Lambda(\mathbf{r} | \tilde{\theta}, \tilde{\mathbf{c}}) = \prod_{k=0}^{N-1} \exp\left\{-\frac{E_s}{C_2 N_0} |\{x(k)e^{-j\tilde{\theta}}\} - \tilde{c}_k|^2\right\}$$

为了消除未知参数 $\{\tilde{c}_k\}$ 对计算的影响,将上式的每一个乘积项 $\exp\left\{-\frac{E_s}{C_2 N_0} |\{x(k)e^{-j\tilde{\theta}}\} - \tilde{c}_k|^2\right\}$ 对 $\{\tilde{c}_k\}$ 进行平均运算,若调制信号形式为 M 进制,用 $\{P_m, m=1, 2, \dots, M-1\}$ 表示 M 个信息符号,在一个符号周期内, \tilde{c}_k 是 $\{P_m, m=1, 2, \dots, M-1\}$ 中的任意一个。取平均的结果为

$$\Lambda(\mathbf{r} | \tilde{\theta}) = \prod_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \exp\left\{-\frac{E_s}{C_2 N_0} |\{x(k)e^{-j\tilde{\theta}}\} - P_m|^2\right\} \right\} \quad (3-117)$$

则 θ 的估计结果 $\hat{\theta}$ 是似然函数取最大值得到的。但是上式的最大值计算十分困难,仅能在低信噪比和高信噪比两种特殊情况下进行近似求解,下面分别进行介绍。

1) 高信噪比情况

在信噪比较高的情况下,式中的求和项依赖于 $|x(k)e^{-j\tilde{\theta}} - P_m|^2$,因此为了简化运算,令:

$$\hat{m}_k = \arg\left\{ \min_{0 \leq m \leq M-1} \{|x(k)e^{-j\tilde{\theta}} - P_m|^2\} \right\}$$

且

$$\hat{c}_k = P_{\hat{m}_k}$$

则式(3-117)简化为

$$\Lambda(\mathbf{r} | \tilde{\theta}) \approx \left(\frac{1}{M}\right)^N \exp\left\{-\frac{E_s}{C_2 N_0} \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)e^{-j\tilde{\theta}} - \hat{c}_k|^2\right\}$$

因此问题转化为最小化 $\sum_{k=0}^{N-1} |x(k)e^{-j\tilde{\theta}} - \hat{c}_k|^2$, 或者等价于使如下定义的 $F(\tilde{\theta})$ 函数取最大值:

$$F(\tilde{\theta}) = \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re}\{\hat{c}_k^* x(k)e^{-j\tilde{\theta}}\} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{c}_k|^2$$

由于星座图的旋转对称性,任意信号星座点可表示为(每一符号数据都有 M 个星座点与之对应) $\{c_k e^{-j2\pi m/M}, m=0, 1, 2, \dots, M-1\}$, $\hat{c}_k = c_k e^{-j2\pi m/M}$, 则

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{c}_k|^2 \approx \sum_{k=0}^{N-1} |c_k e^{-j2\pi m/M}|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

因此, $\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{c}_k|^2$ 与 θ 无关,对 $F(\tilde{\theta})$ 求导取最大值的过程可忽略 $\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{c}_k|^2$ 项

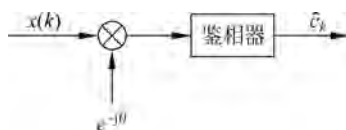
$$\frac{d}{d\tilde{\theta}} F(\tilde{\theta}) = \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Im}\{\hat{c}_k^* x(k)e^{-j\tilde{\theta}}\}$$

令等式的右边为零,可得到载波相位估计结果。

据此可以构造误差信号,则

$$e(k) = \operatorname{Im}\{\hat{c}_k^* x(k)e^{-j\tilde{\theta}}\}$$

可由误差信号构造 Costas 环路以实现当前相位估计值的更新。 \hat{c}_k 的示意图如图 3-53 所示。

图 3-53 \hat{c}_k 的示意图

关于此部分的深入研究可参见文献[37]。

2) 低信噪比情况

为简化分析过程,本节以 PSK 调制为例,说明在低信噪比下简化的非数据辅助的相位估计方法,其结果可推广到其他多种调制方式。记 M 进制的 PSK 调制的星座点为 $\{\tilde{c}_k = e^{j2\pi m/M}\}$, $m=0,1,\dots,M-1$,式(3-117)似然函数可表示为

$$\Lambda(\mathbf{r} | \tilde{\theta}) = C \prod_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \exp \left\{ -\frac{2E_s}{N_0} \operatorname{Re} \{ x(k) e^{-j\tilde{\theta}} e^{j2\pi m/M} \} \right\} \right\}$$

其中, C 是一个独立于 θ 的正常数。为了简化运算,对似然函数取对数且省略常数 $\ln C$,可得

$$\ln \Lambda(\mathbf{r} | \tilde{\theta}) = \sum_{k=0}^{N-1} \ln \left\{ \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \exp \left\{ -\frac{2E_s}{N_0} \operatorname{Re} \{ x(k) e^{-j\tilde{\theta}} e^{j2\pi m/M} \} \right\} \right\}$$

为了运算方便,取 M 为偶数,由于

$$e^{j2\pi(m+M/2)/M} = -e^{j2\pi m/M}$$

则

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \frac{2E_s}{N_0} \operatorname{Re} \{ x(k) e^{-j\tilde{\theta}} e^{j2\pi m/M} \} \right\} + \exp \left\{ \frac{2E_s}{N_0} \operatorname{Re} \{ x(k) e^{-j\tilde{\theta}} e^{j2\pi(m+M/2)/M} \} \right\} \\ &= 2 \cosh \left\{ -\frac{2E_s}{N_0} \operatorname{Re} \{ x(k) e^{-j\tilde{\theta}} e^{j2\pi m/M} \} \right\} \\ \ln \Lambda(\mathbf{r} | \tilde{\theta}) &= \sum_{k=0}^{N-1} \ln \left\{ \frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M/2-1} \cosh \left\{ \frac{2E_s}{N_0} \operatorname{Re} \{ x(k) e^{-j\tilde{\theta}} e^{j2\pi m/M} \} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (3-118)$$

对式(3-118)求导数可得

$$\frac{d}{d\tilde{\theta}} \ln \Lambda(\mathbf{r} | \tilde{\theta}) = \frac{2E_s}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sum_{m=0}^{M/2-1} \operatorname{Im} \{ X_m(k, \tilde{\theta}) \} \sinh \left\{ \frac{2E_s}{N_0} \operatorname{Re} \{ X_m(k, \tilde{\theta}) \} \right\}}{\sum_{m=0}^{M/2-1} \cosh \left\{ \frac{2E_s}{N_0} \operatorname{Re} \{ X_m(k, \tilde{\theta}) \} \right\}} \quad (3-119)$$

其中, $X_m(k, \tilde{\theta}) = x(k) e^{-j\tilde{\theta}} e^{j2\pi m/M}$ 。上式是对数似然函数的通用表达,没有严格遵循信号星座和信噪比条件的现状。但由此可以看出给出 BPSK 和 MPSK 的必要性。

(1) BPSK。

当信噪比足够小时,式(3-119)中的 $\sinh(x)$ 和 $\cosh(x)$ 项近似为 $\sinh(x) \approx x$ 和 $\cosh(x) \approx 1$,忽略与计算最大值无关的项,式(3-119)变为

$$\frac{d}{d\tilde{\theta}} \ln \Lambda(\mathbf{r} | \tilde{\theta}) = \sum_{k=0}^{N-1} I(k, \tilde{\theta}) Q(k, \tilde{\theta}) \quad (3-120)$$

其中, $I(k, \tilde{\theta})$ 和 $Q(k, \tilde{\theta})$ 是 $x(k) e^{-j\tilde{\theta}}$ 对应的同相项和正交项

$$x(k) e^{-j\tilde{\theta}} = I(k, \tilde{\theta}) + jQ(k, \tilde{\theta}) \quad (3-121)$$

对式(3-120)的使用方法如图 3-54 所示。

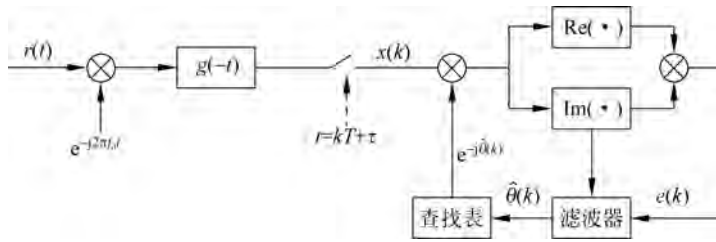


图 3-54 低信噪比下采用 BPSK 调制的非数据辅助载波相位估计流程

图 3-54 给出了 BPSK 的载波相位估计流程,与图 3-65 中基于判决引导的相位估计流程类似,也是一种反馈相位估计算法。定义误差函数:

$$e(k) = I(k, \hat{\theta})Q(k, \hat{\theta})$$

相位估计量的更新式为

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma e(k)$$

通过在观测周期对 $e(k)$ 的求和运算,在误差闭环负反馈作用下 $e(k)$ 会逐渐趋近于零,滤波器最终将输出估计相位。

(2) MPSK。

当信噪比足够小时,与 BPSK 中的近似不同, $\sinh(x)$ 和 $\cosh(x)$ 项近似为 $\sinh(x) \approx x - \frac{x^3}{3}$ 和 $\cosh(x) \approx 1$,忽略与计算最大值无关的项,则式(3-119)近似表示为

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \ln \Lambda(\mathbf{r} | \tilde{\theta}) &= \frac{2}{M} \left(\frac{2E_s}{N_0} \right)^2 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M/2-1} [\operatorname{Re}\{X_m(k, \tilde{\theta})\} \operatorname{Im}\{X_m(k, \tilde{\theta})\}] - \\ &\quad \frac{2}{3M} \left(\frac{2E_s}{N_0} \right)^4 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M/2-1} [\operatorname{Re}\{X_m(k, \tilde{\theta})\}]^3 \operatorname{Im}\{X_m(k, \tilde{\theta})\} \end{aligned} \quad (3-122)$$

由于

$$\operatorname{Re}\{X_m(k, \tilde{\theta})\} = \frac{1}{2} x(k) e^{-j\theta} e^{j2\pi m/M} + \frac{1}{2} x^*(k) e^{j\theta} e^{-j2\pi m/M} \quad (3-123)$$

$$\operatorname{Im}\{X_m(k, \tilde{\theta})\} = \frac{1}{2j} x(k) e^{-j\theta} e^{j2\pi m/M} - \frac{1}{2j} x^*(k) e^{j\theta} e^{-j2\pi m/M} \quad (3-124)$$

将式(3-123)和式(3-124)代入式(3-122),可以发现等式右边的第一项为零。注意到当 $M > 2$ 时,有

$$\sum_{m=0}^{M/2-1} e^{j4\pi m/M} = 0$$

代入式(3-122),可进一步简化为

$$\frac{d}{d\theta} \ln \Lambda(\mathbf{r} | \tilde{\theta}) = - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M/2-1} [\operatorname{Re}\{X_m(k, \tilde{\theta})\}]^3 \operatorname{Im}\{X_m(k, \tilde{\theta})\} \quad (3-125)$$

利用式(3-125)的右边项定义误差函数:

$$e(k) = \sum_{m=0}^{M/2-1} [\operatorname{Re}\{X_m(k, \tilde{\theta})\}]^3 \operatorname{Im}\{X_m(k, \tilde{\theta})\}$$

相位估计的更新表达式为

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma e(k)$$

MPSK 的载波相位估计流程如图 3-55 所示。同样,通过闭环负反馈作用可使 $e(k)$ 趋近于零。

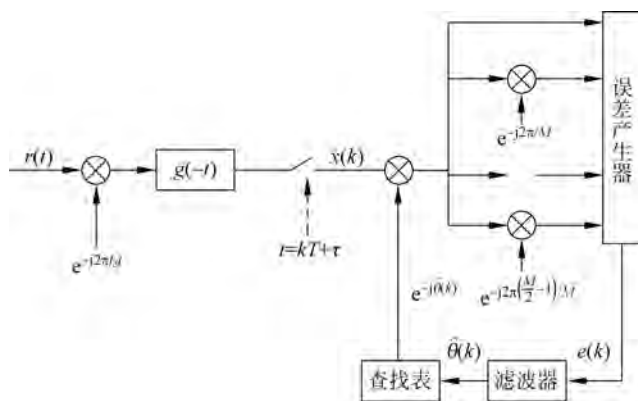


图 3-55 低信噪比下采用 MPSK 调制的非数据辅助载波相位估计流程

3) 通用锁相环技术

通过简化以上非数据辅助载波相位同步技术环路结构,就得到了锁相环结构,如图 3-56 所示。

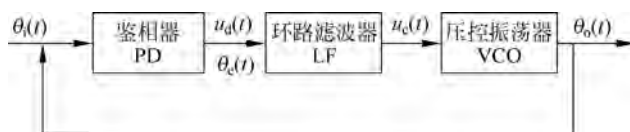


图 3-56 通用锁相环结构框图

锁相环(Phase Lock Loop)是一个能够跟踪输入信号相位的闭环自动控制系统。它具有载波跟踪特性、调制跟踪特性、低门限特性以及易于集成等优点,因此普遍应用于载波提取、频率合成、调制解调、视频声频解码等无线电技术的各个领域。

锁相环是通过相位负反馈控制,使系统输出信号相位锁定在输入信号的相位上。锁相环由鉴相器(Phase Detector, PD)、环路滤波器(Loop Filter, LF)和压控振荡器(Voltage Controlled Oscillator, VCO)3 个基本部件组成^[29]。

在环路开始工作时,通常输入信号的频率与压控振荡器未加控制电压时的振荡频率是不同的。两信号之间的相位差经鉴相器变为电压信号,通过控制压控振荡器产生不同的频率信号,通过不断地反馈比较输入信号与该信号的相位差值使二者相位达到一致,最终使整个环路达到稳定状态。此时,输入信号和压控振荡器输出信号之间的频差为零,相位差不再随时间变化,误差控制电压为一固定值,这时环路就进入所谓“锁定”状态。以上就是环路工作的大致过程。

鉴相器是一个相位比较部件,用来检测输入信号相位 $\theta_i(t)$ 和反馈信号相位 $\theta_o(t)$ 之间的相位差 $\theta_e(t)$ 。输出的误差信号 $u_d(t)$ 与相差信号 $\theta_e(t)$ 之间存在如下关系:

$$u_d(t) = f[\theta_e(t)]$$

鉴相器存在多种类型,可以分为两类^[4]:一类是相乘器电路,它是把输入信号波形与输出信号波形的乘积进行平均,从而获得直流的误差输出。这类鉴相器通常称为模拟鉴相器,其线性区较小,约为 $\pi/6$ 。正弦鉴相器即为该类的代表。

另一类是序列电路,它的输出电压是输入信号过零点与反馈电压过零点之间时间差的函数。其输出只与波形的边沿有关,适用于方波或通过限幅的正弦波输入,常用数字电路构成,称为数字鉴相器。它的线性鉴相范围较宽,可达 2π 。鉴相范围是衡量鉴相器性能优劣的重要指标,鉴相范围越宽,鉴相器的性能越好。

表 3-6 鉴相算法及特性^[3]

鉴相算法	频率误差表达式	应用环境
$\text{sign}(I_e Q_e)$	$\sin(\theta_e)$	高信噪比时使用最佳,运算量较低
$I_e Q_e$	$\sin(2\theta_e)$	低信噪比时使用最佳,运算量适中
Q_e/I_e	$\tan(\theta_e)$	高低信噪比时次最佳,运算量较高
$\arctan(Q_e/I_e)$	θ_e	高低信噪比时最佳,运算量较高

最常用的正弦鉴相器可以用乘法器实现,参见图 3-57,具有如下特性:

$$u_d(t) = K_d \sin[\theta_e(t)]$$

式中, K_d 为鉴相器增益,乘法器输出的高频项 $[2\omega_0 + \theta_1(t) + \theta_2(t)]$ 由后面的环路滤波器给消除,因此,不考虑该高频项。

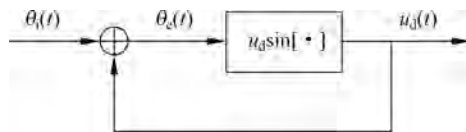


图 3-57 鉴相器原理框图

(1) 锁相环的性能。

锁相环分为窄带和宽带锁相环两种。假设输入信号中加入了噪声且携带的信息包含在频率或相位中,锁相环的任务是重构原始信号,并尽可能消除噪声的影响。此时 PLL 可以看作是让信号通过、让噪声滤除的滤波器,通过很窄的带宽可以剔除大量噪声的影响。当锁相环的带宽很大时,PLL 有快速响应能力,可以作为一个伺服机构。锁相环的带宽常定义为噪声带宽,即常说的环路噪声带宽,定义如下:

$$B_L = \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$$

对于理想二阶(有源比例积分滤波器)环路,其环路噪声带宽为

$$B_L = \frac{\omega_n}{8\xi} (1 + 4\xi^2)$$

环路的噪声带宽反映了环路对噪声的抑制作用,噪声带宽越小,环路越窄,环路对噪声的抑制能力越强。环路噪声带宽越宽,锁定时间越快。工程上,环路噪声带宽不超过参考频率的 $1/10$ 。

(2) 锁相环的指标。

锁相环的捕获和跟踪性能指标有同步带、稳态相差、捕捉带、快捕带、锁定时间等。锁相

环的同步带指在锁定状态下,输入频率缓慢变化,压控振荡器可以跟踪的范围。理想二阶环的同步带为无穷大。捕捉带是指在环路失锁的状态下,环路通过牵引能自行锁定的最大频差。理想二阶环路的捕捉带为:

$$\Delta\omega_{\max} = 1.8\omega_n(\xi + 1)$$

快捕带是指在环路捕捉过程中,不产生频率牵引现象,相位差在一定范围内可以进行锁定的最大频差。

针对理想二阶环路,对于不同的输入形式,其稳态相差如表 3-7 所示。

表 3-7 不同环路滤波器的环路相关函数^[4]

相关函数	RC 积分滤波器	无源比例积分滤波器	有源比例积分滤波器
相位阶跃	0	0	0
频率阶跃	$\Delta\omega/k$	$\Delta\omega/k$	0
频率斜升	∞	∞	$R\tau_1/k$

由此可知,理想二阶环路可以跟踪频率阶跃,且稳态误差为 0,而对于频率斜升信号,则稳态误差不为 0,不适用于对多普勒成分复杂信号的跟踪。锁定时间是指环路从失锁状态下进行跟踪,达到稳定状态的时间。锁定时间与环路带宽、噪声大小、积分时间相关。环路带宽越大,锁定时间越短,积分时间越长,环路更新时间越长,在某种程度上会加大锁定时间。

常用锁相环路有:

(1) 平方环。

对于双边带抑制载波 PAM 信号、MPSK 信号等调制方式,接收信号的表达式为

$$\begin{aligned} r(t) &= s(t) + n(t) \\ &= A(t)\cos[2\pi f_c t + \varphi(t)] + n(t) \end{aligned}$$

其中, $A(t)$ 表示符号信息; $\varphi(t)$ 是载波相位; $n(t)$ 是加性噪声; f_c 是载频。由于 $A(t)$ 是双极性独立等概率分布的,因此 $s(t)$ 是抑制载波信号。对 $r(t)$ 求平方可得

$$y(t) = s^2(t) + 2s(t)n(t) + n^2(t) \quad (3-126)$$

因为调制信号是一个循环平稳随机过程,所以 $s^2(t)$ 是一个循环平稳随机过程, $s^2(t)$ 的数学期望是

$$E[s^2(t)] = \frac{1}{2}E[A^2(t)] + \frac{1}{2}E[A^2(t)]\cos(4\pi f_c t + 2\varphi)$$

平方信号经过一个中心频率为 $2f_c$ 的带通滤波器,再通过二分频,则可以恢复出载频信号。由于滤波器带宽不能太窄,否则将引起严重的相移,因此所恢复出的载频信号中会有接收信号的残余分量,造成同步性能损失。所以大多数解调器都采用锁相环获得频偏为 $2f_c$ 的信号。由于锁相环的环路滤波器带宽比前级带通滤波器的带宽要窄得多,因此可以获得性能较好的载频信号。载频信号的恢复过程如图 3-58 所示。

输入锁相环的信号经鉴相器、环路滤波器得到 VCO 控制电压,等效鉴相器输出为

$$K_d = K \sin 2\Delta\varphi$$

其中,相位误差为 $\Delta\varphi = \varphi - \hat{\varphi}$ 。平方律运算使得锁相环输入端的噪声增强,从而增加了相位误差的方差。式(3-126)的噪声分量 $2s(t)n(t)$ 、 $n^2(t)$ 在以 $2f_c$ 为中心的频带内有功率谱。由于环路带宽 B_L 远小于带通滤波器带宽 B_{BP} ,锁相环输入端的总噪声谱在环路带宽内可视

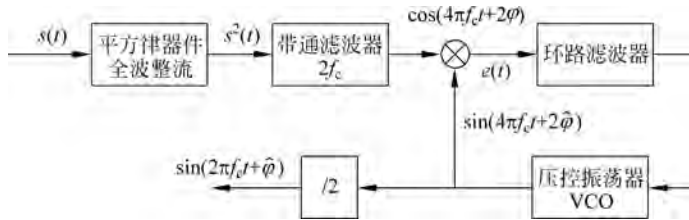


图 3-58 载频信号的恢复过程

为常数, 相位误差的方差可表示为

$$\sigma_{\varphi}^2 = 1/(\gamma_L S_L)$$

其中, S_L 被定义为平方律损失^[38,39], 表示为

$$S_L = \frac{1}{1 + \frac{B_{BP}/(2B_L)}{\gamma_L}} \quad (3-127)$$

其中, γ_L 为信噪比

$$\gamma_L = B_{BP}/(2B_L) \quad (3-128)$$

由式(3-127)可见, $S_L < 1$, 故 S_L^{-1} 表示相位误差方差的增加, 该相位误差是由信号的平方引起的。结合式(3-128)可知该损失为 3dB。在工程上不但用平方律法提取载波, 还有 M 次方律法, 将在下面进行详细介绍。显然乘方的次数越高, 引起的相位均方误差越大。需要注意的是, 上述载波同步方法的参考载波存在 $360^\circ/M$ 的相位模糊, 解决方法是在信号发射端采用差分编码, 在接收端采用差分解调或在相干解调之后采用差分译码。

(2) Costas 环。

Costas 环是二阶锁相环, 它的基本结构^[40]如图 3-59 所示。

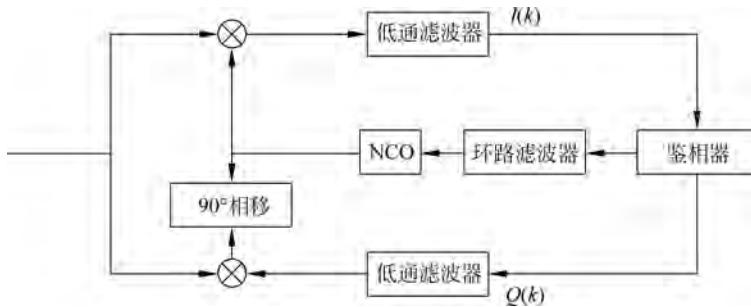


图 3-59 数字 Costas 环原理框图

设输入的卫星信号是 BPSK 调制的。输入信号经过 AD 采样后可以看作是一个离散数字序列。所以第 k 个采样时刻, I 路和 Q 路的信号表示分别为

$$S_I(k) = U_i m(k) \cos[\omega_c k + \theta_i(k)] \quad (3-129)$$

$$S_Q(k) = U_i m(k) \sin[\omega_c k + \theta_i(k)] \quad (3-130)$$

其中, $m(k)$ 的大小是 ± 1 , ω_c 为输入载波角频率, $\theta_i(k)$ 为初始相位, U_i 为输入信号的幅度。数字压控振荡器 NCO 输出信号表达式见式(3-131), 经过 90° 相移后输出的信号见式(3-132)。

$$u_{o1}(k) = \cos[\omega_o k + \theta_o(k)] \quad (3-131)$$

$$u_{o2}(k) = \cos[\omega_o k + \theta_o(k)] \quad (3-132)$$

其中, ω_o 为 NCO 输出信号的载波角频率, $\theta_o(k)$ 为 NCO 输出信号的初始相位。

假设以 NCO 输出的频率作为基准频率, 可以定义式(3-133)。I 路和 Q 路的信号表示分别见式(3-134)和式(3-135)。

$$\theta_1(k) = (\omega_c - \omega_o)k + \theta_i(k) = \Delta\omega k + \theta_i(k) \quad (3-133)$$

$$S_1(k) = U_i m(k) \cos[\omega_o k + \theta_1(k)] \quad (3-134)$$

$$S_Q(k) = U_i m(k) \sin[\omega_o k + \theta_1(k)] \quad (3-135)$$

输入信号与 NCO 输出信号分别相乘再低通滤波后可得

$$I(k) = \frac{1}{2} m(k) U_i \cos\theta_e(k)$$

$$Q(k) = \frac{1}{2} m(k) U_i \sin\theta_e(k)$$

$$\theta_e(k) = \theta_1(k) - \theta_o(k)$$

得到 $I(k)$ 和 $Q(k)$ 后, 使用表 3-6 所列鉴相算法就可以得到相位估计值。

(3) 锁频锁相结合技术。

从以上介绍的锁频环和锁相环结构可知, 锁频环具有相对较宽的环路带宽、适用于信号同步初期的载波频率捕获环节, 而锁相环具有相对较高的同步精度适用于信号同步后期的载波跟踪环节。因此根据高动态、低信噪比下环路跟踪特点的分析, 采用锁频加锁相结合的方式达到既能跟踪动态信号, 同时降低跟踪误差, 提高跟踪精度的效果。锁频加锁相结合的框图如图 3-60 所示。

图 3-60 中输入的带频偏及频率变化过程的信号经锁频环输出后调整锁相环 VCO 的中心频率, 这样进入到锁相环的频偏较小, 锁相环的环路噪声带宽可以做到很窄, 因此可以在较低噪声的情况下使用。经锁相环进行调整后的输出送给下一轮的锁频环的 VCO, 图 3-60 中锁频环和锁相环之间的预检积分时间需呈倍数关系。

2. 开环非数据辅助载波相位同步

闭环估计方法引起反馈结构存在估计时间长的问题, 不利于突发传输模式下的数字卫星信号接收。下面以 PSK 信号为例介绍直载波相位开环估计方法。

重写对数似然函数表达式:

$$\ln\Lambda(r | \tilde{\theta}) = \sum_{k=0}^{N-1} \ln T(k, \tilde{\theta}) \quad (3-136)$$

$$T(k, \tilde{\theta}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \exp\left\{\frac{2E_s}{N_0} \operatorname{Re}\{x(k) e^{-j\tilde{\theta}} e^{j2\pi m/M}\}\right\} \quad (3-137)$$

利用

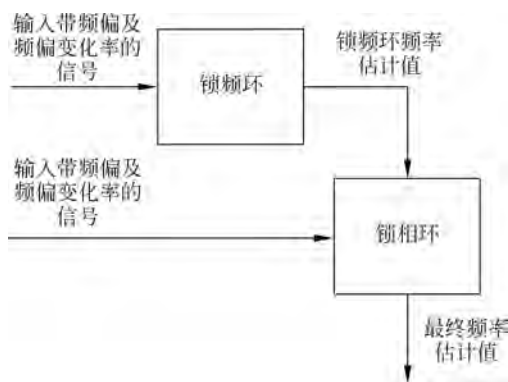


图 3-60 锁频锁相结合方式^[41]

$$2\text{Re}\{x(k)e^{-j\tilde{\theta}}e^{j2\pi m/M}\} = \frac{1}{2}x(k)e^{-j\tilde{\theta}}e^{j2\pi m/M} + \frac{1}{2}x^*(k)e^{j\tilde{\theta}}e^{-j2\pi m/M}$$

由于

$$\begin{aligned} & \exp\left\{\left[\frac{2E_s}{N_0}\text{Re}\{x(k)e^{-j\tilde{\theta}}e^{j2\pi m/M}\}\right]^p\right\} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{E_s}{N_0}\right)^p \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} x^q(k) [x^*(k)]^{(p-q)} e^{j(p-2q)\tilde{\theta}} e^{-j2\pi m(p-2q)/M} \end{aligned} \quad (3-138)$$

将式(3-138)代入式(3-137),可得

$$T(k, \tilde{\theta}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{E_s}{N_0}\right)^p \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} x^q(k) [x^*(k)]^{(p-q)} e^{j(p-2q)\tilde{\theta}} A(p-2q) \quad (3-139)$$

$$\text{其中, } A(p-2q) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j2\pi m(p-2q)/M}.$$

注意: 除了 $p-2q=lm, l=0, \pm 1, \pm 2, \dots, A(p-2q)=0$, 将这一结构用于式(3-139)可得

$$T(k, \tilde{\theta}) = 1 + \frac{1}{M!} \left(\frac{E_s}{N_0}\right)^M \text{Re}\{x^M(k)e^{-jM\tilde{\theta}}\} \quad (3-140)$$

将式(3-140)代入式(3-136), 并利用 $\ln x \approx 1+x$, 忽略无关项, 可得

$$\ln \Lambda(r | \tilde{\theta}) \approx \text{Re}\left\{e^{-jM\tilde{\theta}} \sum_{k=0}^{N-1} x^M(k)\right\}$$

则载波相位估计的表达式可写为

$$\hat{\theta} = \frac{1}{M} \arg\left\{\sum_{m=0}^{N-1} x^M(k)\right\} \quad (3-141)$$

非数据辅助载波相位开环估计的流程如图 3-61 所示。

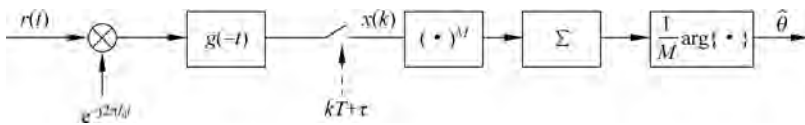


图 3-61 非数据辅助载波相位开环估计流程图

这是熟悉的 M 次方同步器, 框图如图 3-61 所示。式(3-141)非常适用于数字应用环境。由于 \arg 函数的取值范围为 $[-\pi, \pi]$, 因此该算法估计范围为 $[-\pi/M, \pi/M]$ 。这对应于相位估计中的 M 重相位模糊问题, 可采用差分编解码去除。

由于对任何 PSK 调制 $c_k^M=1$, 所以

$$x^M(k) = e^{jM\theta} + N(k) \quad (3-142)$$

其中, $N(k)$ 是零均值噪声项, 包括信号与噪声和噪声与噪声的乘积项。通过 M 次方操作, 调制信息已被剔除, 再通过对式(3-142)在观测间隔内取平均可以实现对 $N(k)$ 的平滑滤波, 最终得到近似于 $e^{jM\theta}$ 的滤波结果。图 3-62 是利用 M 次方律法对 QPSK 调制信号进行相位估计的仿真结果。对于频率残差对估计结果的影响, 分析表明, 其结果和前几节介绍的数据辅助载波相位估计方法得到的结论是类似的。图 3-62 中估计结果不受滚降系数影响, 是因为仿真假设满足奈奎斯特条件。如图 3-62 所示, 在高信噪比条件下该算法估计方差可达到 MCRB, 但是在中低信噪比条件下该算法表现不佳。针对这一问题, A. J. Viterbi &

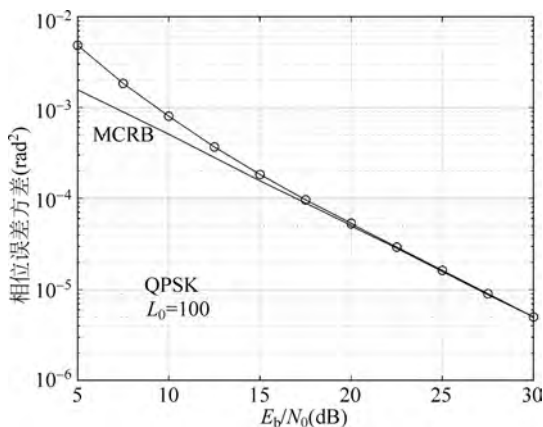


图 3-62 非数据辅助载波相位估计方差与信噪比关系的仿真结果

A. M. Viterbi 提出了 V&V 算法^[42]。该算法是 M 次方律法的一种变形扩展,研究了去除 MPSK 信号中调制信息的非线性方法,并在不同的剩余频差和 SNR 条件下给出了相应的最佳非线性处理。首先将式 $x(k)$ 写作 $x(k) = \rho(k)e^{j\phi(k)}$,并将 $x^M(k)$ 代入式(3-141),可得

$$y(k) = F[\rho(k)]e^{jM\phi(k)} \quad (3-143)$$

其中, $F[\rho(k)]$ 是 $\rho(k)$ 的实非线性函数。由此可得

$$\hat{\theta} = \frac{1}{M} \arg \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} F[\rho(k)]e^{jM\phi(k)} \right\}$$

当 $F[\rho(k)] = \rho^M(k)$ 时, V&V 算法等价于 M 次方同步器,但研究发现,当 $F[\rho(k)]$ 取小于 M 次的阶数,比如 $F[\rho(k)] = \rho^2(k)$ 或者 $F[\rho(k)] = 1$ 时,根据信噪比和星座点数不同 V&V 算法可以实现更好的估计性能。例如, $E_s/N_0 = 6$ dB, QPSK 调制方式下相较于 MCRB, $F[\rho(k)] = \rho^4(k)$ 的估计方差损失 4 dB,而 $F[\rho(k)] = 1$ 和 $F[\rho(k)] = \rho^2(k)$ 的估计方差损失分别是 3 dB 和 2.6 dB。

还可将 V&V 算法扩展至频偏估计领域,设 $\theta = \omega_0 + \omega_1 k$, $\omega_0 = M\theta_0$, $\omega_1 = 2\pi fT$,对应的最小二乘估计器为

$$[\hat{f}, \hat{\theta}] = \underset{f, \theta}{\operatorname{argmin}} J(f, \theta)$$

$$J(f, \theta) = \sum_{k=0}^{N-1} |y(k) - Ce^{jM(2\pi fTk + \theta)}|^2$$

其中, C 为设计参数, T 为符号周期。对上式求导并令其为零可得 (f, θ) 的估计式:

$$\hat{f} = \underset{f}{\operatorname{argmax}} \frac{1}{L_0} \left| \sum_{k=0}^{N-1} y(k) e^{-jM \cdot 2\pi fTk} \right|^2 \quad (3-144)$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{M} \arg \left\{ \left| \sum_{k=0}^{N-1} y(k) e^{-jM \cdot 2\pi \hat{f}Tk} \right|^2 \right\} \quad (3-145)$$

事实上,若认为非线性变换后的结果 $y(k)$ 是一个噪声中的复正弦信号,则式(3-144)给出的估计式与文献[43]中给出的单频信号的最大似然频率估计方法是等价的。可以证明,式(3-144)与式(3-145)是渐近无偏和一致估计式,并且在高 SNR 下是几乎渐近有效估计^[44]。式(3-144)中的求和项实际上对应着 N 点序列 $y(k)$ 的傅里叶变换,在实际应用时通

常用 DFT 来计算,即

$$\hat{\omega}_1 = \frac{2\pi}{N_1} \operatorname{argmax} \left| \sum_{k=0}^{N-1} y(k) \cdot e^{-j\frac{2\pi km}{N_1}} \right|^2$$

为了获得较高的频率分辨率,需要取较大的 N 。这样即使是利用了 FFT 算法,所需的运算量也是相当可观的。另外,当数据观察长度较短时,DFT 的频谱泄漏现象会比较严重,这将导致估计结果容易受到噪声的影响。

以上分析均是基于载波频率参数理想同步的前提下,对于存在载波频偏情况下的讨论可参见文献[42],结果与数据辅助下的载波相位同步类似,退化主要表现为两种形式:

- (1) 与数据辅助载波相位估计一样,相位估计方差会随着频偏 $|f_d|$ 的增加而增加;
- (2) 相位估计值会偏移观测间隔中心点 $2\pi m M f_d T$, m 表示符号周期数。

不同的是同等条件下相位估计偏差小于数据辅助载波相位估计偏差 M 倍,这是由于 M 次方律操作引起的。

另外给出 QAM 调制信号的估计过程,设 QAM 信号为 $c_k = a_k + jb_k$, $c_k = a_k + jb_k$ 和 $c_k = a_k + jb_k$ 是均值为零且相互独立的随机变量,其二阶矩和四阶矩分别是 $E\{a_i^2\} = E\{b_i^2\} = C_2$, $E\{a_i^4\} = E\{b_i^4\} = C_4$,对于匹配滤波器输出信号 $x(k) = c_k e^{j\theta} + n(k)$,它的四次方的数学期望为

$$E[x^4(k)] = 2(C_4 - 3C_2^2)e^{j4\theta}$$

由于 $(C_4 - 3C_2^2) > 0$, 所以有如下相角等式:

$$\operatorname{arg}\{E[x^4(k)]\} = 4\theta$$

当利用 $x^4(k)$ 的采样平均值近似期望值 $E[x^4(k)]$ 时,可得到相位估计结果:

$$\hat{\theta} = \operatorname{arg}\left\{ \sum_{k=0}^{L_0-1} x^4(k) \right\} / 4$$

在高信噪比下,上式估计结果可达到 MCRB^[2]。对于一般 QAM 调制,它的估计方差会随着星座点数的增加远远偏离于 MCRB。关于频偏对 QAM 调制的影响可参见文献[45]。

3.3.2 数据辅助载波相位同步

数据辅助载波相位同步是指利用接收信号中已知的数据符号信息(导频)辅助进行载波相位估计,并将估计结果应用于后续数据段的载波相位偏移的校正,以消除载波相位对数据符号判决的影响。

假设经混频得到的基带信号可表示为

$$r(t) = s(t) + n(t) = e^{j(2\pi f_d t + \theta)} \sum_i c_i g(t - iT - \tau) + n(t) \quad (3-146)$$

其中, $n(t)$ 为高斯加性噪声,实部和虚部相互独立均服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$; f_d 是频率偏移, θ 是待估计载波初始相位, τ 是传输信道延时, $\{c_i\}$ 是已知数据符号, T 是符号周期, $g(t)$ 是脉冲成形滤波函数。为了简化估计过程,假设参数 τ 、 f_d 已知,针对待估计未知量 θ 建立似然函数:

$$\begin{aligned} L(r | \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r(t)-s(t))^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(r(t) - A e^{j(2\pi f_d t + \theta)})^2\right\} \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} |r(t) - c_k e^{j(2\pi f_d t + \theta)}|^2 &= |r(t)|^2 + |c_k|^2 - 2\operatorname{Re}\{r(t) \cdot c_k e^{j(2\pi f_d t + \theta)}\} \\ |r(t) - s(t)|^2 &= |r(t)|^2 + |s(t)|^2 - 2\operatorname{Re}\{r(t) \cdot s^*(t)\} \end{aligned}$$

去掉常数项、相位无关项和已知项后可得

$$\Lambda(r|\theta) = \exp\left\{\frac{1}{\sigma^2} \int_0^{T_0} \operatorname{Re}\{r(t)s^*(t)\} dt\right\} \quad (3-147)$$

对式(3-147)取对数可得对数似然函数

$$\ln\Lambda(r|\theta) = \frac{1}{\sigma^2} \operatorname{Re}\left\{\int_0^{T_0} r(t)s^*(t) dt\right\} \quad (3-148)$$

将式(3-146)代入式(3-148)右边积分项:

$$\int_0^{T_0} r(t)s^*(t) dt = e^{-j\theta} \sum_i c_i^* \int_0^{T_0} r(t) e^{-j2\pi f_d t} \cdot g(t - iT - \tau) dt$$

考虑到匹配滤波特性,上式可表达为

$$\int_0^{T_0} r(t)s^*(t) dt = e^{-j\theta} \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* x(k)$$

其中, $N = T_0/T$, T 是符号周期; $x(k)$ 是在 $kT + \tau$ 时刻的波形采样值。

式(3-148)可表示为

$$\Lambda(r|\theta) = \operatorname{Re}\left\{e^{-j\theta} \sum_{i=0}^{N-1} c_i^* x(k)\right\}$$

由于对数函数的单调性,对上式取极值可得相位估计公式:

$$\hat{\theta} = \arg\left\{\sum_{k=0}^{N-1} c_k^* x(k)\right\} \quad (3-149)$$

其中, $\arg\{\cdot\}$ 表示取相位。图 3-63 给出了以上 ML 相位估计的流程图。

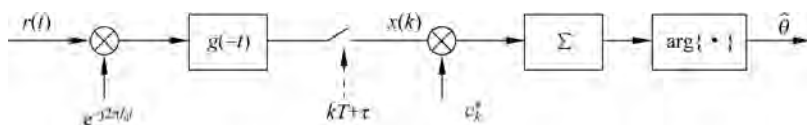


图 3-63 ML 载波相位估计流程图

1. 载波相位估计的性能分析

根据 3.3.1 节的最大似然估计算法,当信噪比足够大并且 $g(t) * g(-t) \triangleq h(t)$ (理想匹配滤波器)时,估计量可以获得达到克拉美罗界的估计精度。其中,

$$h(kT) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

根据第 2 章中的同步估计理论,理想同步下克拉美罗界等于修正克拉美罗界。我们只需证明式(3-149)可达到修正克拉美罗界:

$$\text{MCRB}(\theta) = \frac{1}{2L_0 \cdot E_s/N_0}$$

考虑匹配滤波器的输出:

$$x(t) = e^{j\theta} \sum_i c_i h(t - iT - \tau) + n(t)$$

其中,噪声项为

$$n(t) \triangleq [\omega(t)e^{-j2\pi ft}] * g(-t)$$

易知, $n(t)$ 的实部和虚部相互独立, 且对应功率谱密度均为 N_0 , 信号能量 $E_s = C_2/2$, $C_2 = E[|c_i|^2]$ (参见文献[2]附录 2. A)。故

$$N_0 = \frac{C_2}{2E_s/N_0} \quad (3-150)$$

在 $kT + \tau$ 时刻对 $x(t)$ 采样, 可得

$$x(k) = e^{j\theta} c_k + n(k) \quad (3-151)$$

将式(3-151)两边同乘以 c_k^* , 可得

$$c_k^* x(k) = e^{j\theta} [|c_k|^2 + c_k^* n'(k)] \quad (3-152)$$

其中, $n'(k) = n(k)e^{-j\theta}$, $n'(k)$ 的实部和虚部是零均值且相互独立的随机变量, 功率谱密度都是 N_0 。将式(3-152)代入相位估计公式(3-149)

$$\hat{\theta} = \arg\{e^{j\theta} (1 + N_R + jN_I)\} \quad (3-153)$$

其中,

$$N_R + jN_I = \frac{\sum_{k=0}^{L_0-1} c_k^* n'(k)}{\sum_{k=0}^{L_0-1} |c_k|^2}$$

当 $N_R \ll 1$ 和 $N_I \ll 1$ 时, $\arctan N_I \approx N_I$, 式(3-153)可近似为

$$\hat{\theta} \approx \theta + N_I$$

由于 N_R, N_I 均值为零, 可知 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计。估计方差为

$$\text{var}\{\hat{\theta} - \theta\} = E\{N_I^2\} = \frac{N_0 C_2}{L_0} E\left\{\frac{1}{C_2^2}\right\} \quad (3-154)$$

其中, \bar{C}_2 是 $|c_k|^2$ 的算术平均, 表示为

$$\bar{C}_2 = \frac{1}{L_0} \sum_{k=0}^{L_0-1} |c_k|^2$$

将式(3-150)代入式(3-154), 可得式(3-154)的变换形式:

$$\text{var}\{\hat{\theta} - \theta\} = \frac{C_2^2}{2L_0 \cdot E_s/N_0} E\left\{\frac{1}{\bar{C}_2^2}\right\} \quad (3-155)$$

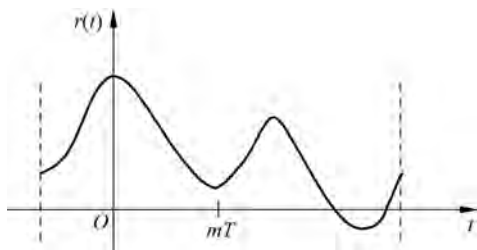
随着观测时长 T_0 和数目 L_0 的增加, 算术平均 \bar{C}_2^2 趋近于期望平均 C_2^2 , 式(3-155)可近似为

$$\text{var}\{\hat{\theta} - \theta\} = \frac{1}{2L_0 \cdot E_s/N_0}$$

由此可知, 基于 ML 的载波相位估计的方差达到了 MCRB。

2. 频率残差对载波相位估计的影响

上面关于相位估计误差的分析是基于观测点起始位置在时间原点的假设。但是在实际应用中, 将时间原点定位于观测间隔的中间点更具一般性。因此, 假设观测间隔中间点作为时间原点 $t = mT$, 如图 3-64 所示。

图 3-64 以 $t=mT$ 为中心的观测间隔

为了简化估计过程,我们进一步假设符号周期数为偶数值。由此可得相位 θ 的最大似然估计:

$$\hat{\theta} = \arg \left\{ \frac{1}{L_0} \sum_{k=m-(L_0-1)/2}^{m+(L_0-1)/2} c_k^* x(k) \right\} \quad (3-156)$$

为了简化分析过程,假设系统调制方式采用相移键控调制 (PSK), 残留频差 $\Delta f = \hat{f}_d - f_d$ 远小于 $1/T$, 匹配滤波满足奈奎斯特条件。因此有

$$x(t) = [r(t) e^{-j2\pi\hat{f}_d t}] * g(-t)$$

将式(3-146)代入上式可得

$$x(t) = e^{j\theta} \sum_i c_i [e^{j2\pi f_d t} g(t - iT - \tau)] * g(-t) + n(t)$$

根据假设条件 $g(t - iT - \tau)$ 主要取值在 $kT + \tau$ 的附近小范围内并且 $|f_d T| \ll 1$, 可将 $e^{j2\pi f_d t}$ 近似为 $e^{j2\pi f_d T}$ 。由此可得

$$x(t) = e^{j\theta} \sum_i c_i e^{j2\pi f_d T} h(t - iT - \tau) + n(t)$$

在 $kT + \tau$ 时刻的采样值为

$$x(k) = c_k e^{j\theta} e^{j2\pi k f_d T} + n(k)$$

由于 $|c_k|^2 = 1$, 则

$$c_k^* x(k) = e^{j\theta} [e^{j2\pi k f_d T} + n'(k)]$$

其中, $n'(k) \triangleq n(k) c_k^* e^{-j\theta}$ 。最终代入式(3-156)可得相位估计:

$$\hat{\theta} = \arg \left\{ e^{j\theta} \left[\frac{1}{L_0} \sum_{k=m-(L_0-1)/2}^{m+(L_0-1)/2} e^{j2\pi k f_d T} + N_R + jN_I \right] \right\} \quad (3-157)$$

其中,

$$N_R + jN_I \triangleq \frac{1}{L_0} \sum_{k=m-(L_0-1)/2}^{m+(L_0-1)/2} n'(k)$$

由于

$$\frac{1}{L_0} \sum_{k=m-(L_0-1)/2}^{m+(L_0-1)/2} e^{j2\pi k f_d T} = \frac{\sin(\pi f_d L_0 T)}{N \sin(\pi f_d T)} e^{j2\pi m f_d T}$$

式(3-157)可改写为

$$\hat{\theta} = \arg \left\{ e^{j(2\pi m f_d T + \theta)} (1 + V_R + jV_I) \right\} \quad (3-158)$$

其中,

$$\begin{cases} V_R \triangleq N_R \cdot e^{-j2\pi m f_d T} \left/ \frac{\sin(\pi f_d L_0 T)}{N \sin(\pi f_d T)} \right. \\ V_I \triangleq N_I \cdot e^{-j2\pi m f_d T} \left/ \frac{\sin(\pi f_d L_0 T)}{N \sin(\pi f_d T)} \right. \end{cases}$$

V_R 和 V_I 是均值为零的随机变量, 方差为

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{2L_0 \cdot E_s / N_0} \left/ \left[\frac{\sin(\pi f_d L_0 T)}{N \sin(\pi f_d T)} \right]^2 \right.$$

设信噪比足够高, $V_R \ll 1, V_I \ll 1$, 由式(3-158)可推知

$$\hat{\theta} \approx \theta + 2\pi m f_d T + V_I \quad (3-159)$$

由于观测间隔的时间原点取为中间点, 所以由上式得到的相位估计是有偏的。估计的方差为

$$\text{var}\{\hat{\theta} - \theta\} = \frac{1}{2L_0 \cdot E_s / N_0} \left/ \left[\frac{\sin(\pi f_d L_0 T)}{N \sin(\pi f_d T)} \right]^2 \right. \quad (3-160)$$

由于 $\frac{\sin(\pi f_d L_0 T)}{L_0 \sin(\pi f_d T)} < 1$, 因此它的方差大于 MCRB。由式(3-159)和式(3-160)可知, 当估计时间点定位在观察间隔的非起始位置时, 估计值会受载波频率残差的影响。

3.3.3 基于判决反馈的载波相位估计技术

1. 硬判决反馈载波相位同步

3.3.2 节讨论的数据辅助的载波相位估计算法是开环前向结构。当数据符号未知时, 一种实现载波相位估计的方法是利用数据符号的抽样判决结果, 构建基于数字锁相环的判决反馈载波同步架构, 称为基于判决反馈的载波相位估计技术, 这种闭环结构适用于小频偏或者无频偏只存在载波相位偏移的情况, 其算法应用的前提条件是输入信号已实现定时同步。

1) 反馈结构中的相位模糊问题

假设载波频率偏移和符号延迟已实现理想同步, 式(3-149)中给出的已知量 c_k 用符号估计值 \hat{c}_k 代替得到的相位估计表达式为

$$\hat{\theta} = \arg \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \hat{c}_k^* x(k) \right\} \quad (3-161)$$

但是这里存在一个问题, 就是由未知载波初始相位引起的相位模糊问题, 参见式(3-151), 由于初始相位的存在会引起判决结果的相位偏移。相位偏移示意图如图 3-65 所示。

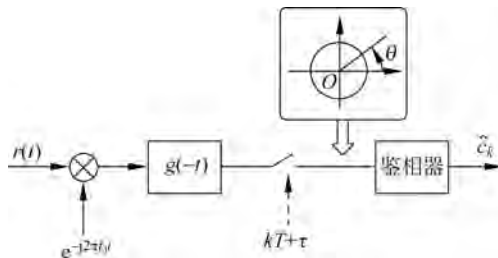


图 3-65 相位偏移示意图

以 QPSK 调制为例,初始相位 $\theta = \pi/4$ 。若满足奈奎斯特条件,则

$$x(k) = c_k e^{j\pi/4} + n(k)$$

在这种条件下,判决结果正好落在 c_k 和 $c_k e^{j\pi/2}$ 的判决区域分界线上,致使判决结果被判为 c_k 和 $c_k e^{j\pi/2}$ 的概率各为 50%。由此所得的判决结果可表示为

$$\hat{c}_k = c_k u(k) + c_k e^{j\pi/2} [1 - u(k)]$$

式中, $u(k)$ 是一个取值为 0 或者 1 的随机变量,代入式(3-151)可得

$$\sum_{k=0}^{N-1} \hat{c}_k^* x(k) = e^{j\pi/4} \sum_{k=0}^{N-1} u(k) + e^{-j\pi/4} \sum_{k=0}^{N-1} [1 - u(k)]$$

考虑到噪声的随机性,为了简化分析过程省略了噪声项。从上式可看出,所得判决结果是一个随机量,已经失去了进行相位估计的意义。因此,如果采用基于判决反馈的载波相位估计方法进行相位同步,则必须首先解决载波初始相位带来的相位模糊问题。下面介绍两种相关算法。

2) 方法 1

采用闭环结构,使用前一段 N 点符号值估计当前 N 点符号值的相位,即

$$\hat{\theta}(k) = \arg \left\{ \sum_{l=k-N}^{k-1} \hat{c}_l^* x(l) \right\}$$

环路结构如图 3-66 所示。

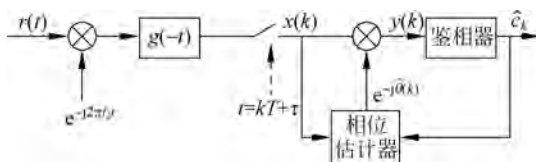


图 3-66 相位恢复环路示意图

一次反馈过程是首先将前一鉴相结果 $\hat{\theta}(k)$ 作用于 $x(k)$,再将旋转后的 $x(k)$ 送入鉴相器,此时鉴相器输入的残留相位偏差为 $\theta - \hat{\theta}(k)$ 。经多次反馈迭代后, $\theta - \hat{\theta}(k)$ 趋近于 0,也即 $\hat{\theta}(k)$ 最终会稳定在真实 θ 附近。

虽然使用前一观测间隔内的 N 点信号的相位估计值校正当前时刻采样值中的相位偏差,可以解决由初始相位引起的星座点位置旋转所带来的误判决问题,但是 $\hat{\theta}(k)$ 也可能最终稳定于 $\theta + k \frac{2\pi}{M}$ 处,其中 M 为调制阶数。以 QPSK 为例, $M = 4$,反馈环的作用结果是 $\hat{\theta}(k)$ 趋近于 $\theta, \theta + \frac{\pi}{2}, \theta + \pi, \theta + \frac{3\pi}{2}, \dots$ 。这种相位模糊是由信号的旋转对称性决定的,只采用方法 1 无法消除,需要使用差分编码解决。

3) 方法 2

同样采用闭环结构,但是方法 2 是基于当前观测间隔内的数据进行相位估计的,其基本思想是采用回归方法计算似然函数导数零值点以得到似然函数的最大值。环路结构如图 3-67 所示。

对数似然函数的导数为

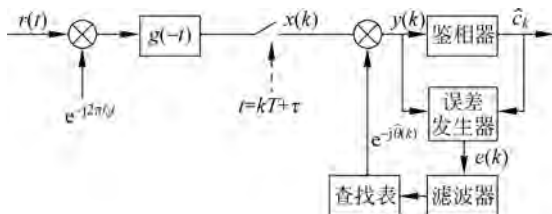


图 3-67 Costas 相位跟踪环

$$\frac{d}{d\theta} \ln \Lambda(r | \theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \text{Im} \{ c_k^* x(k) e^{-j\theta} \}$$

当导数为零时,对应 θ 为估计结果 $\hat{\theta}$ 。由此可得图 3-67 中的误差函数产生器为^[37]

$$e(k) = \sum_{k=0}^{N-1} \text{Im} \{ c_k^* x(k) e^{-j\hat{\theta}(k)} \} \tag{3-162}$$

则误差输出 $e(k)$ 趋近于零时, $\hat{\theta}(k)$ 将趋近于 $\theta(k)$ 。

如图 3-67 所示,误差输出 $e(k)$ 经滤波器的递推算算法,得到 $\theta(k)$ 的估计值 $\hat{\theta}(k)$ 。滤波器的传递函数为

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma e(k) \tag{3-163}$$

式中, γ 是可调整的步长参数。在查找表中存储 $e^{-j\hat{\theta}(k)}$ 。利用对应关系 $\hat{\theta}(k) \rightarrow e^{-j\hat{\theta}(k)}$ 可获得映射结果 $e^{-j\hat{\theta}(k)}$ 。将该结果与采样信号 $x(k)$ 相乘,从而消除 $x(k)$ 中的附加初始相位 $\theta(k)$,消除未知载波相位对数据检测判决的影响。可知,上述载波相位估计流程是一个闭环反馈的过程。

4) 捕获和跟踪特性

为了进一步研究相位的捕获特性,首先定义误差信号 $e(k)$ 的数学期望值为相位误差发生器的 S 曲线,即

$$S(\varphi) \triangleq E \{ e(k) | \varphi \}$$

其中, $\varphi \triangleq \theta - \hat{\theta}$,在实验中 $S(\varphi)$ 可在开环情况下通过测量一定观测时间间隔内误差信号的平均值获得。开环结构示意图如图 3-68 所示。

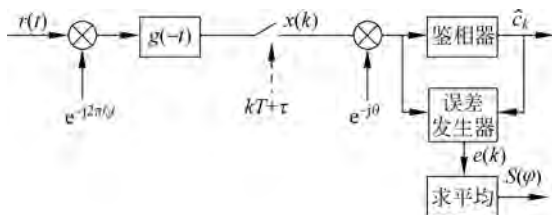


图 3-68 S 曲线测试示意图

增加环路噪声分量,相位误差可表示为

$$e(k) = S[\theta - \hat{\theta}(k)] + N(k)$$

代入式(3-163),可得迭代公式,即

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma S[\theta - \hat{\theta}(k)] + \gamma N(k)$$

图 3-69 描述了载波相位的闭环结构,其中数字滤波器由虚线框出。不考虑环路噪声的情况下,当 $S[\theta - \hat{\theta}(k)] = 0$ ($\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}_{eq}$ = 常数) 时,环路达到稳定状态。对应 S 曲线示意图如图 3-70 所示。

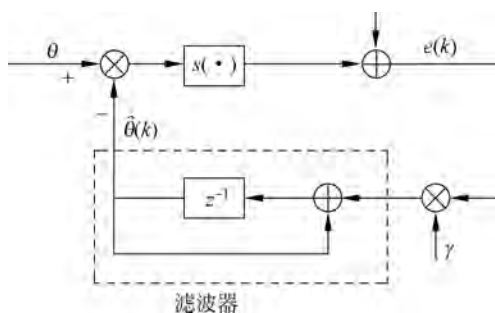


图 3-69 锁相环路等效模型

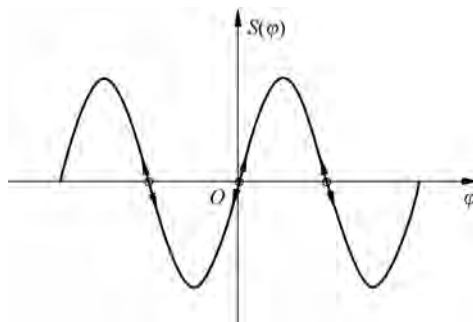


图 3-70 稳态和非稳态零值点

根据环路结构,只有在 $S(\varphi)$ 与 φ 成正比的零值点(正斜坡) $S(\varphi)$ 会逐渐收敛于零值点,环路才能达到稳定状态;在 $S(\varphi)$ 与 φ 成反比的零值点处,由于负反馈作用, $S(\varphi)$ 会向背离零值点的方向变化(如图 3-70 中的箭头所示),环路无法达到稳态。

以 QPSK 调制方式为例分析这种相位估计方法的捕获跟踪特性。匹配滤波器的输出为

$$x(k) = c_k e^{j\theta} + n(k) \tag{3-164}$$

检测判决输入为

$$\begin{aligned} y(k) &= c_k e^{j(\theta - \hat{\theta})} + n'(k) \\ &= c_k e^{j\varphi} + n'(k) \end{aligned}$$

式中, $n'(k) = n(k) e^{-j\hat{\theta}}$ 。在信噪比较高时,检测判决输出为

$$\hat{c}_k = c_k e^{jm(\varphi)\pi/2} \tag{3-165}$$

由于 QPSK 各符号之间的相位误差在 $\pm \frac{\pi}{4}$ 之间,故 $m(\varphi)$ 是整数且满足^[46]

$$\left| \varphi - m(\varphi) \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{4}$$

将式(3-164)和式(3-165)代入误差信号式(3-162)中,由于 $|c_k|^2 = 1$,可得

$$e(k) = \sin \left[\varphi - m(\varphi) \frac{\pi}{2} \right] + \text{Im} \{ c_k^* n(k) e^{-j[\theta + m(\varphi)\pi/2]} \}$$

式中,第 2 项是一个零均值随机变量,因此上式取期望可得

$$S(\varphi) \approx \sin \left[\varphi - m(\varphi) \frac{\pi}{2} \right]$$

图 3-71 给出了有噪声和无噪声情况下的无编码 QPSK 调制系统的 S 曲线^[2]。

如图 3-71 所示,在 $(-\pi, \pi]$ 范围内, S 曲线存在 4 个稳态过零点,只有 $\varphi = 0$ 时才能得到正确的相位估计结果。但是根据 $S(\varphi)$ 的值无法判决是哪一个稳态零点,这就导致在 $(-\pi,$

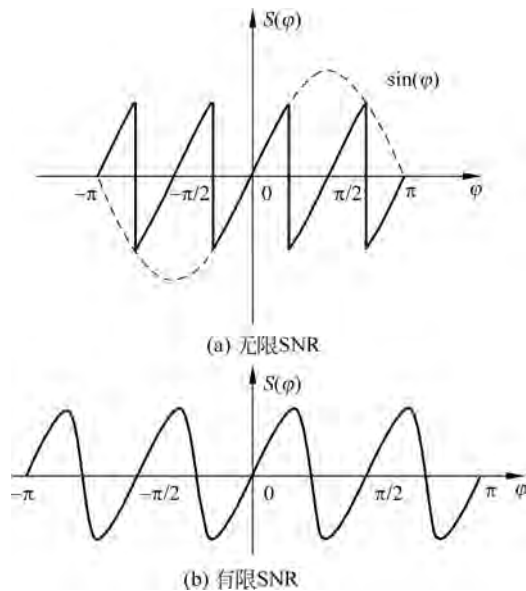


图 3-71 无编码 QPSK 的 S 曲线

π]范围内存在四重相位模糊问题。由此可见,方法 2 同样存在调制方式引起的相位模糊问题,只有误差 φ 在 $(-\pi/4, \pi/4]$ 内才能保证判决的正确性。此外,根据直接判决原理可知,当 $y(k)$ 处于判决边界时噪声项会对判决结果产生关键影响。从图 3-71 可看出,在噪声作用下 $S(\varphi)$ 的曲线的不连续处会被弱化平滑。

需要注意的几点:

(1) 以上是针对 QPSK 调制方式的分析,不难得知,在 $(-\pi, \pi]$ 范围内 S 曲线的稳态过零点数是与调制方式有关的,对于 8PSK,其在 $(-\pi, \pi]$ 范围内的稳态过零点数 8,以此类推,可以得到其他阶数调制方式的过零点数,并绘制 S 曲线。

(2) “环路挂起”现象:这是 Costas 环中存在的一个问题,经常出现在相位捕获阶段。假设相位估计初始值位于非稳态零点附近,随着环路反馈作用 $S(\varphi)$ 将向稳态过零点移动。但是由于此时扰动量 $S[\theta - \hat{\theta}(k)]$ 过小,环路主要受噪声项的影响。这就造成 $\hat{\theta}(k)$ 会在一段时间内一直徘徊在初始值附近。虽然在反馈作用下 $\hat{\theta}(k)$ 最终会跳出非稳态过零点范围,但这一现象会使捕获时间过长。这对于实时性信号处理要求较高的系统是不允许存在的。关于锁相环路挂起问题的深入讨论参见文献[47]。

(3) “跳周”现象:是指当(开环或闭环)环路收敛,相位估计 $\hat{\theta}(k)$ 在真实相位 θ 波动时,受噪声项影响产生的大的相位偏移使 $\hat{\theta}(k)$ 脱离真实相位 θ ,转到邻近稳态点 $\theta + 2\pi/M$,也可以理解为由瞬时强噪声干扰造成的相位模糊。这是在环路设计中应该避免的问题。关于“跳周”现象的深入研究参见文献[48]。

2. 软判决反馈载波相位同步

传统的判决引导载波相位同步采用符号硬判决,这种方法在低信噪比下的性能随着符号判决可靠性的下降而恶化。为了减小判决错误造成的影响,相关学者提出采用发送符号的 MMSE 估计代替符号硬判决^[31]。下面,首先推导非数据辅助模式中的 MMSE 符号判决

的规则。第 k 个发送符号 c_k 的 MMSE 估计可以表示为

$$\hat{c}_{k\text{MMSE}} = \sum_{i=0}^{M-1} c_k P(c_k = \alpha_i | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$$

式中, $P(c_k | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ 表示给定参数 $\boldsymbol{\theta} = (\tau, \theta)^T$ 时符号 c_k 的后验概率, M 为调制信号星座几何的大小。利用贝叶斯公式, $P(c_k | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ 可重新表示为

$$P(c_k | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{\{\mathbf{c}\} \setminus c_k} \Pr(\mathbf{c} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\sum_{\{\mathbf{c}\} \setminus c_k} p(\mathbf{y} | \mathbf{c}, \boldsymbol{\theta}) P(\mathbf{c})}{\sum_{\mathbf{c}} p(\mathbf{y} | \mathbf{c}, \boldsymbol{\theta}) P(\mathbf{c})} \quad (3-166)$$

式中, $p(\mathbf{y} | \mathbf{c}, \boldsymbol{\theta})$ 为条件似然函数, $P(\mathbf{c})$ 为符号序列 $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_{K-1}]$ 的先验概率, $\{\mathbf{c}\} \setminus c_k$ 表示除 c_k 以外 \mathbf{c} 中的变量。

对于非数据辅助模式, 可以假设发送的符号独立同分布。因此, 符号序列的概率为

$$P(\mathbf{c}) = \frac{1}{M^K}, \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbf{C}^K \quad (3-167)$$

式中, K 为序列 \mathbf{c} 的长度, \mathbf{C}^K 表示 \mathbf{c} 的 M^K 种可能的组合所构成的几何。联合概率密度函数 $p(\mathbf{y} | \mathbf{c}, \boldsymbol{\theta})$ 可以表示为

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{c}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_k p(y_k | c_k, \boldsymbol{\theta}) \quad (3-168)$$

将式(3-167)和式(3-168)代入式(3-166)可得

$$P(c_k | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{p(y_k | c_k, \boldsymbol{\theta})}{\sum_{c_k} p(y_k | c_k, \boldsymbol{\theta})}$$

因此, 在非数据辅助模式中, 符号 c_k 的 MMSE 估计表示为

$$\hat{c}_{k\text{MMSE}} = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} c_k p(y_k | c_k = \alpha_i, \boldsymbol{\theta})}{\sum_{i=0}^{M-1} p(y_k | c_k = \alpha_i, \boldsymbol{\theta})} \quad (3-169)$$

以 QPSK 调制信号为例, 数据符号的 MMSE 估计表示为

$$\hat{c}_{k\text{MMSE, QPSK}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\text{Re}\{y_k\}}{\sigma^2}\right) + j \tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\text{Im}\{y_k\}}{\sigma^2}\right) \right] \quad (3-170)$$

显然, 符号的 MMSE 估计是调制集内星座点的加权平均, 其加权系数等于对应的后验概率。与传统的符号硬判决对应, 可以将式给出的符号估计称为“符号软判决”, 其判决值可以不属于调制星座集合, 除非某个星座点的后验概率为 1。与符号软判决相比, 传统的硬判决可以定义为

$$\hat{c}_{k\text{MAP}} = \underset{c_k \in \mathbf{C}}{\text{argmax}} \Pr(c_k | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) \quad (3-171)$$

式中, \mathbf{C} 为调制星座集合。式(3-171)为符号的最大后验概率估计, 该判决将最小化符号错误概率。由于符号软判决需要计算双曲正切 \tanh 函数, 因此其计算复杂度高于符号硬判决。

1) 软判决反馈载波相位同步及其理论性能分析

假设已经获得理想的载波频率和符号定时同步, 匹配滤波器的输出信号表示为

$$r_k = c_k e^{j\theta} + n_k \quad (3-172)$$

式中, $c_k = c_k^1 + jc_k^Q$ 表示由比特 $[b_{k,1}, b_{k,2}, \dots, b_{k,M}]$ 映射得到的第 k 个发送符号, 并且 $E\{|c_k|^2\} = 1$, θ 表示未知的载波相位, M 为调制集合的大小, $\{n_k = n_k^1 + jn_k^Q\}$ 表示零均值的复高斯白噪声, 其实部和虚部相互独立, 并且方差均为 σ^2 。对于 MPSK 调制, $c_k = e^{j\psi_i}$, $\psi_i \in \Psi_M$, Ψ_M 为 M 进制的调制集。

研究判决反馈载波相位同步环路, 其相位误差检测器的输出表示为^[2]

$$z_k(\varphi) = \text{Im}\{e^{-j\hat{\theta}_k} r_k \hat{c}_k^*\} = \text{Im}\{y_k \hat{c}_k^*\} \quad (3-173)$$

式中, $\varphi = \theta - \hat{\theta}$ 为相位估计误差, $(\cdot)^*$ 表示复共轭操作, $y_k = r_k e^{-j\hat{\theta}_k}$ 表示对输入信号 r_k 的解旋转输出。

Gaudenzi 给出了非编码系统中, 式(3-173)中的 \hat{c}_k 采用符号硬判决时相位同步的理论性能分析结果^[49]。在本节中将考虑符号软判决的情况。

由式(3-172)可以发现, 相位偏差一方面降低了发送信号的幅度, 另一方面在“同相”和“正交”支路(I路和Q路)引入了串扰。定义有效信噪比为 $\gamma^{\text{eff}} = \cos^2 \varphi / 2\sigma^2(\varphi)$ 。对于 BPSK 调制, $\sigma^2(\varphi) = \sigma^2$; 对于 QPSK 调制, $\sigma^2(\varphi) = \sigma^2 + (\sin^2 \varphi) / 2$ 。显然, 当 $\varphi = 0$ 时, γ^{eff} 与“名义”信噪比 γ 相同。假设系统采用了理想的自动增益控制(Automatic Gain Control, AGC)环路和数据辅助信噪比估计, 则式(3-169)中的符号软判决在 BPSK 调制和 QPSK 调制下分别可以表示为

$$\hat{c}_{k\text{BPSK}} = \tanh\left(\frac{2\gamma^{\text{eff}} y_k}{\cos \varphi}\right) \quad (3-174)$$

$$\hat{c}_{k\text{QPSK}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\tanh\left(\frac{\sqrt{2}\gamma^{\text{eff}} y_k^I}{\cos \varphi}\right) + j \tanh\left(\frac{\sqrt{2}\gamma^{\text{eff}} y_k^Q}{\cos \varphi}\right) \right] \quad (3-175)$$

下面分析软判决反馈载波相位同步的开环特性和闭环跟踪性能。

2) 开环特性分析

开环特性(或称为 S 曲线)定义为: 在开环下($\hat{\theta}_k = 0$), 误差检测器输出信号的期望值, 表达式为

$$S_D(\varphi) = E\{z_k(\varphi) | \hat{\theta}_k = 0\} \quad (3-176)$$

将式(3-172)、式(3-173)代入式(3-176)可得

$$S_D(\varphi) = E\{c_k^1 \hat{c}_k^1 + c_k^Q \hat{c}_k^Q\} \sin \varphi + E\{c_k^Q \hat{c}_k^1 - c_k^1 \hat{c}_k^Q\} \cos \varphi + E\{\hat{c}_k^1 c_k^Q - \hat{c}_k^Q c_k^1\} \quad (3-177)$$

根据 MPSK 调制 I、Q 两路的正交性, 容易得到 $E\{\hat{c}_k^1 c_k^Q\}$ 和 $E\{\hat{c}_k^Q c_k^1\}$ 两项都为零。因此, 式(3-177)中的 S 曲线可以表示为

$$S_D(\varphi) = E\{c_k^1 \hat{c}_k^1 + c_k^Q \hat{c}_k^Q\} \sin \varphi + E\{c_k^Q \hat{c}_k^1 - c_k^1 \hat{c}_k^Q\} \cos \varphi$$

对 BPSK 调制, 式(3-177)进一步化简为

$$S_D(\varphi)_{\text{BPSK}} = E\{c_k^1 \hat{c}_k^1\} \sin \varphi \quad (3-178)$$

对 QPSK 调制, 由于有 $E\{c_k^1 \hat{c}_k^1\} = E\{c_k^Q \hat{c}_k^Q\}$ 和 $E\{c_k^Q \hat{c}_k^1\} = -E\{c_k^1 \hat{c}_k^Q\}$, 以及 $E\{\hat{c}_k^1 c_k^Q\} = E\{\hat{c}_k^Q c_k^1\}$, 因此其 S 曲线为

$$S_D(\varphi)_{\text{QPSK}} = 2E\{c_k^1 \hat{c}_k^1\} \sin \varphi + 2E\{c_k^Q \hat{c}_k^1\} \cos \varphi \quad (3-179)$$

对于式(3-174)和式(3-175)给出的符号软判决, 需要计算双曲正切函数, 因此在计算期

望值时无法获得积分的闭式解。Simon 研究了最佳接收机中的非线性函数及其近似方法^[50]。受其启发,可以对 tanh 函数进行如下分段线性化:

$$\tanh(x) \approx \begin{cases} 1, & 1 \leq x \\ x, & -1 < x < 1 \\ -1, & x \leq -1 \end{cases}$$

对于 BPSK 调制,其符号软判决近似表示为

$$\hat{c}_k^1 = \begin{cases} 1, & \frac{\gamma^{\text{eff}}[\cos(\varphi + \psi_i) + n_k^1]}{\cos(\varphi)} \geq 1 \\ \frac{\gamma^{\text{eff}}[\cos(\varphi + \psi_i) + n_k^1]}{\cos(\varphi)}, & -1 < \frac{\gamma^{\text{eff}}[\cos(\varphi + \psi_i) + n_k^1]}{\cos(\varphi)} < 1 \\ -1, & \frac{\gamma^{\text{eff}}[\cos(\varphi + \psi_i) + n_k^1]}{\cos(\varphi)} \leq -1 \end{cases} \quad (3-180)$$

对于 QPSK 调制,I 路的符号软判决近似表示为

$$\hat{c}_k^1 = \begin{cases} \sqrt{2}/2, & \frac{\sqrt{2}\gamma^{\text{eff}}[\cos(\varphi + \psi_i) + n_k^1]}{\cos(\varphi)} \geq 1 \\ \frac{\gamma^{\text{eff}}[\cos(\varphi + \psi_i) + n_k^1]}{\cos(\varphi)}, & -1 < \frac{\sqrt{2}\gamma^{\text{eff}}[\cos(\varphi + \psi_i) + n_k^1]}{\cos(\varphi)} < 1 \\ -\sqrt{2}/2, & \frac{\sqrt{2}\gamma^{\text{eff}}[\cos(\varphi + \psi_i) + n_k^1]}{\cos(\varphi)} \leq -1 \end{cases} \quad (3-181)$$

利用式(3-180)和式(3-181)中符号软判决的分段线性化,可以推导式(3-178)和式(3-179)中的 $E\{a_k^1 \hat{a}_k^1\}$ 和 $E\{a_k^Q \hat{a}_k^1\}$,推导过程参见文献[31]附录 C,其结果为

$$\begin{aligned} S_D(\varphi)_{\text{BPSK}} &= \left\{ \left(\frac{1}{2} + \gamma^{\text{eff}} \right) \operatorname{erf} \left[\frac{1}{2\sqrt{\gamma^{\text{eff}}}} + \sqrt{\gamma^{\text{eff}}} \right] - \left(\frac{1}{2} - \gamma^{\text{eff}} \right) \operatorname{erf} \left[\frac{1}{2\sqrt{\gamma^{\text{eff}}}} - \sqrt{\gamma^{\text{eff}}} \right] - \right. \\ &\quad \left. \frac{\sqrt{\gamma^{\text{eff}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\exp \left(-\frac{\left(\frac{1}{2} - \gamma^{\text{eff}} \right)^2}{\gamma^{\text{eff}}} \right) - \exp \left(-\frac{\left(\frac{1}{2} + \gamma^{\text{eff}} \right)^2}{\gamma^{\text{eff}}} \right) \right] \right\} \sin \varphi \\ S_D(\varphi) &= \frac{\sqrt{2}}{2} E \left\{ \hat{c}_k^1 \mid c_k^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, c_k^Q = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} (\sin \varphi + \cos \varphi) + \\ &\quad \frac{\sqrt{2}}{2} E \left\{ \hat{c}_k^1 \mid c_k^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, c_k^Q = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\} (\sin \varphi - \cos \varphi) \end{aligned} \quad (3-182)$$

其中, $E \left\{ \hat{c}_k^1 \mid c_k^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, c_k^Q = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$ 和 $E \left\{ \hat{c}_k^1 \mid c_k^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, c_k^Q = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$ 的表达式为

$$\begin{aligned} &E \left\{ \hat{c}_k^1 \mid c_k^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, c_k^Q = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\cos \left(\varphi \pm \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \varphi} \gamma^{\text{eff}} \right) \operatorname{erf} \left[\frac{\frac{\cos \varphi}{\sqrt{2}\gamma^{\text{eff}}} + \cos \left(\varphi \pm \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2}\sigma} \right] - \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\cos\left(\varphi \pm \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\varphi} \gamma^{\text{eff}} \right) \text{erf} \left[\frac{\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}\gamma^{\text{eff}}} - \cos\left(\varphi \pm \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sigma} \right] - \frac{\sigma\gamma^{\text{eff}}}{\sqrt{2}\pi\cos\varphi} \left[\exp\left(-\frac{\left[\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}\gamma^{\text{eff}}} - \cos\left(\varphi \pm \frac{\pi}{4}\right)\right]^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{\left[\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}\gamma^{\text{eff}}} + \cos\left(\varphi \pm \frac{\pi}{4}\right)\right]^2}{\gamma^{\text{eff}}}\right) \right] \quad (3-183)$$

式(3-182)和式(3-181)对 φ 求一阶偏导数并且计算其在 $\varphi=0$ 处的值,可得 BPSK 调制和 QPSK 调制相位误差检测器 S 曲线在原点处的斜率分别为

$$\frac{d}{d\varphi} \{S_D(\varphi)_{\text{BPSK}}\} \Big|_{\varphi=0} = \left(\frac{1}{2} + \gamma\right) \text{erf}\left(\sqrt{\gamma} + \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\right) - \left(\frac{1}{2} - \gamma\right) \text{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{\gamma}} - \sqrt{\gamma}\right) - \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\pi}} \left[\exp\left(-\frac{\left(\frac{1}{2} - \gamma\right)^2}{\gamma}\right) - \exp\left(-\frac{\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)^2}{\gamma}\right) \right] \quad (3-184)$$

和

$$\frac{d}{d\varphi} \{S_D(\varphi)_{\text{QPSK}}\} \Big|_{\varphi=0} = \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{\gamma-1}{\sqrt{2\gamma}}\right) + \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{\gamma+1}{\sqrt{2\gamma}}\right) + \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp\left(-\frac{(1+\gamma)^2}{2\gamma}\right) - \exp\left(-\frac{(1-\gamma)^2}{2\gamma}\right) \right] \quad (3-185)$$

3) 闭环性能分析

闭环性能表示在环路在稳态情况下($\hat{\theta}_k = \theta_k$)的相位估计抖动方差。令 d_k 为检测器输出的第 k 个相位误差的随机变化部分,即

$$d_k = z_k - E\{z_k\}$$

对一阶相位恢复环路,其稳态相位抖动方差为^[2]

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{S_f(0)}{K_d^2} 2B_L T_s \quad (3-186)$$

其中, K_d 为相位误差检测器 S 曲线在原点处的斜率, $S_f(0)$ 为 d_k 的功率谱密度的直流分量。由于 d_k 的功率谱密度是平坦的,可得 $S_f(0) = \text{var}(z_k)$ 。在相位同步的稳态情况下, $E\{z_k\} |_{\varphi=0} = 0$ 。因此,稳态下的 $\text{var}(z_k)$ 可以表示为

$$\text{var}(z_k) = E\{(\hat{c}_k^1 c_k^Q)^2 + (c_k^1 \hat{c}_k^Q)^2 + (\hat{c}_k^1 n_k^Q)^2 + (\hat{c}_k^Q n_k^1)^2 + 2(\hat{c}_k^1)^2 c_k^Q n_k^Q + 2c_k^1 n_k^1 (\hat{c}_k^Q)^2 - 2\hat{c}_k^1 \hat{c}_k^Q c_k^Q n_k^1 - 2c_k^1 \hat{c}_k^1 \hat{c}_k^Q n_k^Q - 2c_k^1 \hat{c}_k^1 c_k^Q \hat{c}_k^Q - 2\hat{c}_k^1 \hat{c}_k^Q n_k^1 n_k^Q\} |_{\varphi=0} \quad (3-187)$$

由于 $E\{2(\hat{c}_k^1)^2 c_k^Q n_k^Q\} = E\{2c_k^1 n_k^1 (\hat{c}_k^Q)^2\} = 0$, 式(3-187)可进一步简化为

$$\text{var}(z_k) = E\{(\hat{c}_k^1 c_k^Q)^2 + (c_k^1 \hat{c}_k^Q)^2 + (\hat{c}_k^1 n_k^Q)^2 + (\hat{c}_k^Q n_k^1)^2 - 2\hat{c}_k^1 \hat{c}_k^Q c_k^Q n_k^1 - 2c_k^1 \hat{c}_k^1 \hat{c}_k^Q n_k^Q - 2c_k^1 \hat{c}_k^1 c_k^Q \hat{c}_k^Q - 2\hat{c}_k^1 \hat{c}_k^Q n_k^1 n_k^Q\} |_{\varphi=0} \quad (3-188)$$

对 BPSK 调制,式(3-188)为

$$\text{var}(z_k)_{\text{BPSK}} |_{\varphi=0} = E\{(\hat{c}_k^1 n_k^Q)^2\} |_{\varphi=0} \quad (3-189)$$

对 QPSK 调制,式(3-188)为

$$\text{var}(z_k)_{\text{QPSK}} \Big|_{\varphi=0} = 2E\{(\hat{c}_k^1 c_k^Q)^2 + (\hat{c}_k^1 n_k^Q)^2\} \Big|_{\varphi=0} - 2[E\{c_k^1 \hat{c}_k^1\} + E\{\hat{c}_k^1 n_k^1\}]^2 \Big|_{\varphi=0} \quad (3-190)$$

$E\{c_k^1 \hat{c}_k^1\}$ 、 $E\{(\hat{c}_k^1 c_k^Q)^2\}$ 、 $E\{(\hat{c}_k^1 n_k^Q)^2\}$ 以及 $E\{\hat{c}_k^1 n_k^1\}$ 的推导过程参见文献[31]附录 C。将式(3-184)、式(3-185)和式(3-189)、式(3-190)代入式(3-186)可得软判决反馈载波相位同步的稳态抖动方差。

4) 仿真分析

为了验证软判决反馈载波相位同步性能分析的准确性,图 3-72 和图 3-73 分别给出了 BPSK 和 QPSK 调制在不同信噪比下相位误差检测器的 S 曲线。图 3-72 和图 3-73 中实线表示利用上节中解析表达式的计算结果,符号代表相应的仿真结果,并给出了 Gaudenzi 论文中导出的采用符号硬判决的结果^[49],以便于性能比较。

图 3-72 和图 3-73 中对符号软判决采用分段近似的理论分析结果与仿真完全一致,并且其 S 曲线与不采用近似的软判决仿真结果比较接近。采用软判决反馈的相位误差检测器,其 S 曲线幅度低于相应的硬判决检测器。从式(3-170)可以看出,符号软判决实际上是求符号的后验概率,因此软判决符号的幅度小于硬判决。最后,可以发现检测器 S 曲线的幅度随信噪比的降低而逐渐减小,这是因为低信噪比下符号判决可靠性下降。此外,当相位偏差大于 45° 或者小于 -45° 时, QPSK 信号的检测器输出为零。这是因为系统假设采用了数据辅助的信噪比估计算法,当存在 $\pm 90^\circ$ 相位模糊时,估计得到的信噪比非常低,因此软判决可靠性也随之下降。

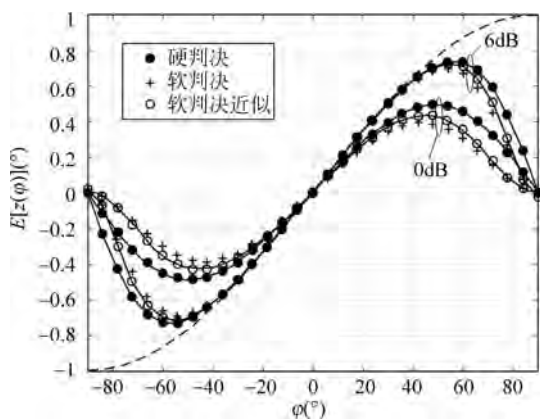


图 3-72 BPSK 调制符号软/硬判决反馈相位误差检测器的 S 曲线^[31]

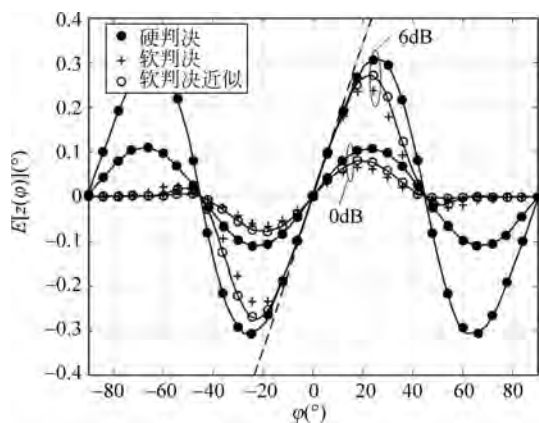


图 3-73 QPSK 调制符号软/硬判决反馈相位误差检测器的 S 曲线^[31]

图 3-74 和图 3-75 分别给出了 BPSK 调制和 QPSK 调制相位误差检测器 S 曲线在原点处的斜率。从图 3-74 和图 3-75 中可以看出,检测器 S 曲线的斜率随着信噪比的降低而逐渐减小。此外,采用软判决的检测器斜率小于硬判决检测器。

图 3-76 和图 3-77 分别给出了 BPSK 调制和 QPSK 调制的载波相位抖动方差,其归一化等效环路带宽 $B_L T_s$ 分别设为 2×10^{-4} 和 4×10^{-4} 。相应的 MCRB 也在图 3-76 如图 3-77 中给出。从图 3-76 和图 3-77 中可以发现,首先,理论分析和仿真结果是一致的。对符号软判决分段近似的理论分析结果与直接采样 \tanh 函数作为符号软判决的仿真结果几乎重合。这一方面说明了本节对相位同步闭环性能分析的闭合表达式是正确的;另一方面说明了在

软判决反馈相位同步中,对 \tanh 函数的分段近似所引入的误差很小。其次,从图 3-76 和图 3-77 中可以看出,随着信噪比的降低,判决错误逐渐增加,符号软/硬判决反馈载波相位同步的性能下降,其抖动方差偏离 MCRB。相对而言,QPSK 调制的判决错误比 BPSK 调制对信噪比的下降更加敏感,因此其抖动方差的性能恶化也更快。

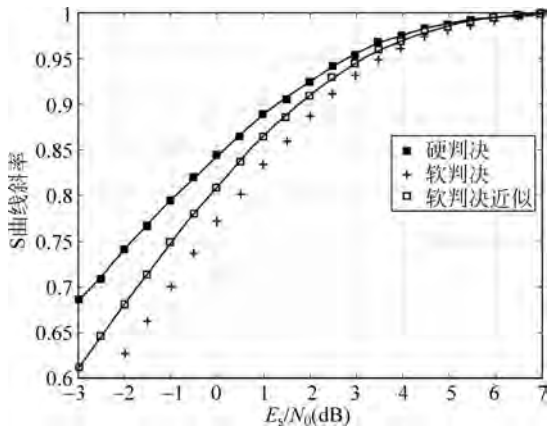


图 3-74 BPSK 调制符号软/硬判决反馈相位误差检测器 S 曲线的斜率^[31]

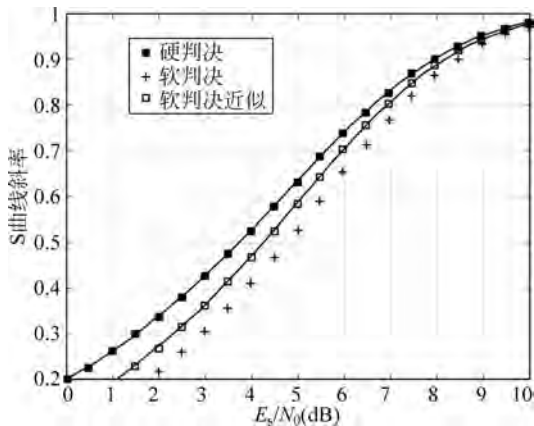


图 3-75 QPSK 调制符号软/硬判决反馈相位误差检测器 S 曲线的斜率^[31]

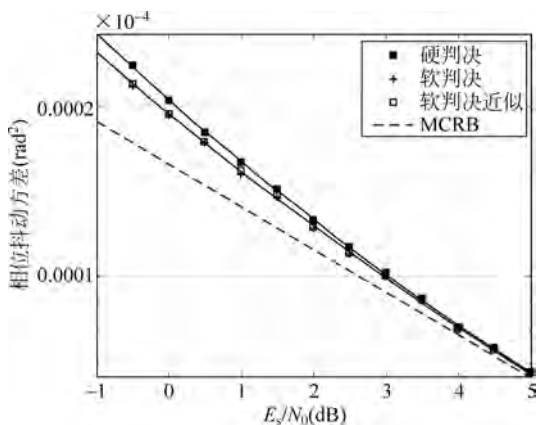


图 3-76 BPSK 调制符号软/硬判决反馈相位误差检测器的抖动方差

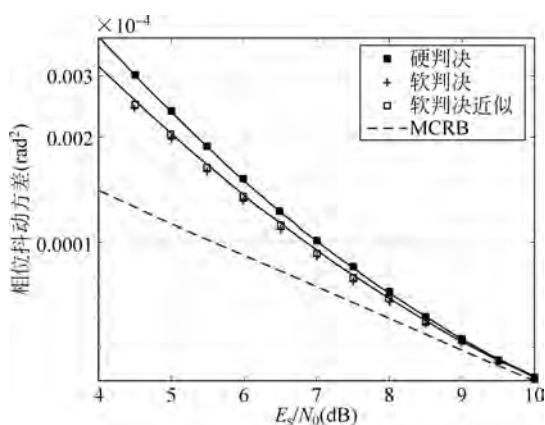


图 3-77 QPSK 调制符号软/硬判决反馈相位误差检测器的抖动方差

3.4 编码辅助载波同步算法

基于数据辅助的载波同步性能受限于导频的长度及导频的放置方式,在低信噪比条件下,要确保较高的估计精度必须使用大量的导频,这意味着较大的发送功率及较低的频带利用率,另外还存在估计精度较低、计算复杂度较高、低信噪比同步效果差等缺点。编码辅助的载波同步技术充分利用译码器的可靠软信息辅助载波同步过程,参数估计精度较高,适用于低信噪比环境。

编码辅助的载波同步算法是首先根据迭代译码输出结果对载波频率和相位进行细估计,然后将估计结果反馈回信号接收端对接收信号进行补偿。根据实现形式的不同,译码辅助迭代载波同步按照实现方式可以分为两种:一种是基于最大似然估计准则直接对未知参数进行估计^[51],包括 EM(Expectation Maximization,期望最大化)算法、梯度算法、APPA(A Prior Probability Aided)算法等;另一种是将译码输出信息与传统载波同步算法相结合,包括数据辅助联合编码辅助、锁相环联合编码辅助、因子图算法联合编码辅助、判决反馈联合编码辅助等。本节将对编码辅助载波同步算法进行介绍,并给出其适用场景。

针对传统同步技术在低信噪比(比特信噪比 4dB 以下^[52])环境下工作性能不佳的问题,基于译码辅助思想的载波同步算法由 M. Simon 首先提出^[53],并实现了低信噪比下的载波同步。

3.4.1 基于最大似然估计的编码辅助载波同步算法

1. EM 算法

EM 算法主要用于非完全数据参数估计,它是通过假设隐变量的存在,极大地简化了似然函数方程,从而解决了方程求解问题对于一些特殊的参数估计问题,利用 EM 算法可以较容易地实现^[54]。非完全数据参数估计有下面两种情况:第一,观测数据不完全,这是由于观测过程的局限性所导致;第二,似然函数不是解析的,或者似然函数的表达式过于复杂,从而导致极大似然函数的传统估计方法失效。

根据第 2 章参数估计理论,在理想定时同步条件下,用 \mathbf{r} 表示接收机接收到的随机序列, \mathbf{b} 表示未知参数,则对参数 \mathbf{b} 的最大似然估计可以表示为:

$$\hat{\mathbf{b}} = \underset{\tilde{\mathbf{b}}}{\operatorname{argmax}} \{ \ln p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{b}}) \} \quad (3-191)$$

其中, $\tilde{\mathbf{b}}$ 是 \mathbf{b} 的一个实验值,大部分情况下,对于该类方程是没有解析解的^[54]。因此常采用迭代方法比如 EM 算法求解最大似然估计问题。求解对数似然函数最大值等价于求解条件对数似然函数 $\ln p(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{b}})$ 的条件后验期望概率,即 $E_c[\log p(\mathbf{r} | \mathbf{c}, \mathbf{b}^{(l)}) | \mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}]$ 。

定义数据完备集为 $Z(\mathbf{r}) = \{ \mathbf{z} : \mathbf{z} = [\mathbf{r}^T, \mathbf{c}^T]^T \}$,其中 \mathbf{c} 为发送信息矢量, \mathbf{r} 为接收符号矢量。EM 算法的两步迭代过程可重写如下:

E-step(期望表达式构造过程):

$$Q(\mathbf{b}, \mathbf{b}^{(l)}) = \int_{Z(\mathbf{r})} p(\mathbf{z} | \mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) \log p(\mathbf{z} | \mathbf{b}) d\mathbf{z}$$

M-step(求期望最大值过程):

$$\mathbf{b}^{(l+1)} = \underset{\tilde{\mathbf{b}}}{\operatorname{argmax}} Q(\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{b}^{(l)})$$

在一定条件下^[55],经过反复迭代, $\mathbf{b}^{(l)}$ 收敛于参数 \mathbf{b} 的最大似然估计, l 表示迭代次数。设联合参数 $\mathbf{b} = f(\Delta f, \theta)$, Δf 、 θ 分别代表载波频偏和相偏,式(3-191)等号右边包括两项:

$$p(\mathbf{z} | \mathbf{b}) = p(\mathbf{r}, \mathbf{c} | \mathbf{b}) = p(\mathbf{r} | \mathbf{c}, \mathbf{b}) p(\mathbf{c} | \mathbf{b})$$

式中, \mathbf{c} 和 \mathbf{b} 是相互独立的,因此可以得

$$p(\mathbf{z} | \mathbf{b}) = p(\mathbf{r} | \mathbf{c}, \mathbf{b}) p(\mathbf{c})$$

则式(3-191)可以重写为

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{b}, \mathbf{b}^{(l)}) &= \int_{Z(r)} p(\mathbf{c} | \mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) \log p(\mathbf{r} | \mathbf{c}, \mathbf{b}) p(\mathbf{c}) d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbf{c}} p(\mathbf{c} | \mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) [\log p(\mathbf{r} | \mathbf{c}, \mathbf{b}) + \log p(\mathbf{c})] d\mathbf{c} \end{aligned}$$

由于 $\log p(\mathbf{c})$ 和 \mathbf{b} 的估计无关, 因此将其去掉后, 则 $Q(\mathbf{b}, \mathbf{b}^{(l)})$ 可表示为

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{b}, \mathbf{b}^{(l)}) &\propto \int_{\mathbf{c}} p(\mathbf{c} | \mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) \log p(\mathbf{r} | \mathbf{c}, \mathbf{b}^{(l)}) d\mathbf{c} \\ &= E_{\mathbf{c}} [\log p(\mathbf{r} | \mathbf{c}, \mathbf{b}^{(l)}) | \mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}] \end{aligned} \quad (3-192)$$

迭代译码器的输出通常可以提供逼近后验期望 $E_{\mathbf{c}}[\mathbf{c} | \mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}]$ 的软信息值, 很明显, 下面需要简化 $\log p(\mathbf{r} | \mathbf{c}, \mathbf{b}^{(l)})$ 项的表达式。假设 \mathbf{c} 是线性的, N 为符号 \mathbf{c} 的数目, 则有

$$\log p(\mathbf{r} | \mathbf{c}, \mathbf{b}^{(l)}) \propto \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} r_k c_k^* e^{-j(\theta+2\pi k \Delta f T)} \right\} \quad (3-193)$$

将式(3-193)代入式(3-192)可以得到载波频偏和相偏条件下, 式(3-191)的最终表达式:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{b}, \mathbf{b}^{(l)}) &\propto \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} r_k \left[\int_{\mathbf{c}} c_k^* p(\mathbf{c} | \mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) d\mathbf{c} \right] e^{-j(\theta+2\pi k \Delta f T)} \right\} \\ &\propto \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} r_k \left[\int_{\mathbf{c}} c_k p(\mathbf{c} | \mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) d\mathbf{c} \right]^* e^{-j(\theta+2\pi k \Delta f T)} \right\} \end{aligned} \quad (3-194)$$

定义

$$\eta_k(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) \triangleq \int_{\mathbf{c}} c_k^* p(\mathbf{c} | \mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) d\mathbf{c} = \sum_{\alpha_m \in C} \alpha_m P(c_k = \alpha_m | \mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)})$$

使式(3-191)的值最大化的一个解为

$$\Delta \hat{f}^{(l+1)} = \operatorname{argmax}_{\Delta f} \left| \sum_{k=0}^{N-1} r_k \eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) e^{-j(2\pi k T \Delta f^{(l+1)})} \right| \quad (3-195)$$

$$\hat{\theta}^{(l+1)} = \operatorname{arg} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} r_k \eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) e^{-j(2\pi k T \Delta f^{(l+1)})} \right\} \quad (3-196)$$

2. SP-EM 算法

文献[60]详细讨论了如何利用 SP(Sum Product)算法估计同步参数。重写似然函数 $p(\mathbf{r} | \mathbf{b})$ 为

$$p(\mathbf{r} | \mathbf{b}) \propto \sum_{\sim\{\mathbf{b}\}} p(\mathbf{r}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$$

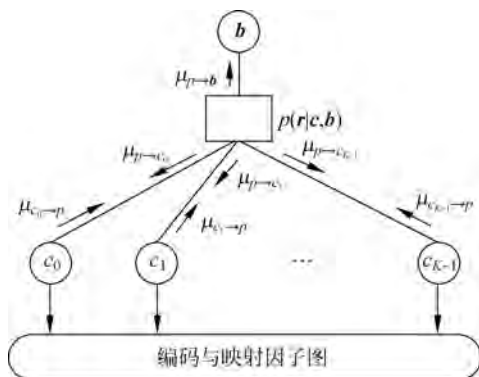
其中, $\sim\{\mathbf{b}\}$ 表示不对变量 \mathbf{b} 求和, 只对 \mathbf{c} 求和。其中将 $p(\mathbf{r}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$ 看作全局函数, 那么边缘函数 $p(\mathbf{r} | \mathbf{b})$ 或其近似值可由 SP 算法求得, 然后将 $p(\mathbf{r} | \mathbf{b})$ 最大化即可得到同步参数 \mathbf{b} 的估计值。注意

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) \propto p(\mathbf{r} | \mathbf{c}, \mathbf{b}) p(\mathbf{c})$$

因此函数 $p(\mathbf{r}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$ 的因子图可用图 3-78 表示。

用符号 $\mu_{c_k \rightarrow p}^{(m)}$ 表示第 m 次迭代中变量节点 c_k 传给因子节点 $p(\mathbf{r} | \mathbf{c}, \mathbf{b})$ 的消息, 相应地, $\mu_{c_k \rightarrow p}^{(m)}$ 为因子节点 $p(\mathbf{r} | \mathbf{c}, \mathbf{b})$ 传给变量节点 c_k 的消息。定义如下的消息更新规则: 在每次迭代中, 首先在编码和映射部分的因子图上应用 SP 算法更新 $\mu_{c_k \rightarrow p}^{(m)}$, 然后利用 $\mu_{c_k \rightarrow p}^{(m)}$ 来更新 $\mu_{c_l \rightarrow p}^{(m+1)}$ 。利用 SP 算法的更新规则, 消息 $\mu_{c_k \rightarrow p}^{(m)}$ 可以表示为

$$\mu_{p \rightarrow c_k}^{(m+1)}(c_k) \propto \sum_{\sim\{c_k\}} p(\mathbf{r} | \mathbf{c}, \mathbf{b}) \prod_{l \neq k} \mu_{c_l \rightarrow p}^{(m)}(c_l)$$


 图 3-78 函数 $p(\mathbf{r}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$ 的因子图

进一步地,同步参数代表的节点消息 $\mu_{p \rightarrow b}^{(m+1)}$ 可以表示为

$$\mu_{p \rightarrow b}^{(m+1)} \propto \sum_{\mathbf{c}} p(\mathbf{r} | \mathbf{c}, \mathbf{b}) \prod_l \mu_{c_l \rightarrow p}^{(m)}(\mathbf{c}_l) \quad (3-197)$$

因此可用消息 $\mu_{p \rightarrow b}^{(m+1)}$ 来近似 $p(\mathbf{r} | \mathbf{b})$,相应地用 $\mu_{p \rightarrow c_k}^{(m+1)} \mu_{c_k \rightarrow p}^{(m+1)}$ 近似 $p(c_k | \mathbf{b})$ 。求解 $\hat{\mathbf{b}}$ 和 \hat{c}_k 的问题分别等价于最大化消息 $\mu_{p \rightarrow b}^{(m+1)}$ 和 $\mu_{p \rightarrow c_k}^{(m+1)} \mu_{c_k \rightarrow p}^{(m+1)}$ 。

将式(3-197)改写成

$$\mu_{p \rightarrow b}^{(m+1)} \propto \sum_{\mathbf{c}} p(\mathbf{r} | \mathbf{c}, \mathbf{b}) p^{(m)}(\mathbf{c}) \quad (3-198)$$

其中, $p^{(m)}(\mathbf{c}) = \prod_l \mu_{c_l \rightarrow p}^{(m)}(c_l)$ 。对比式(3-198)和式(3-197),可以看出 $\mu_{p \rightarrow b}^{(m+1)}$ 和实际的似然函数具有相同的结构,唯一不同的是修正的先验信息 $p^{(m)}(\mathbf{c})$ 代替了实际的先验信息 $p(\mathbf{c})$ 。由 3.4.1 节可知,EM 算法可以用于最大似然估计。而式(3-198)也具有似然函数的结构,因此在每次 SP 算法迭代中,可以对式(3-198)用 EM 算法计算 $\hat{\mathbf{b}}^{(m)}$,SP-EM 算法由此而来。由于目标函数式(3-198)和式(3-197)结构上的相似性,两者的同步参数更新表达式是相同的,即式(3-198),而唯一不同的只是符号后验概率 $p^{(m)}(c_k | \mathbf{r}, \hat{\mathbf{b}}^{(m,n)})$ 的计算。注意到匹配滤波器的输出值对于符号检测是统计充分的,因此有

$$p^{(m)}(c_k | \mathbf{r}, \hat{\mathbf{b}}^{(m,n)}) = p^{(m)}(c_k | \mathbf{y}, \hat{\mathbf{b}}^{(m,n)})$$

其中, $\hat{\mathbf{b}}^{(m,n)}$ 为 SP 算法的第 m 次迭代中 EM 算法的第 n 次迭代时的同步参数估计值, \mathbf{y} 为匹配滤波器输出值 $y_k(\Delta f, \tau)$ 组成的矢量。

$$p^{(m)}(c_k | \mathbf{r}, \hat{\mathbf{b}}^{(m,n)}) \propto \sum_{\sim(c_k)} p(\mathbf{y} | \mathbf{c}, \hat{\mathbf{b}}^{(m,n)}) p^{(m)}(\mathbf{c})$$

利用 $p^{(m)}(\mathbf{c})$ 的定义

$$\begin{aligned} p^{(m)}(c_k | \mathbf{r}, \hat{\mathbf{b}}^{(m,n)}) &\propto \sum_{\sim(c_k)} \prod_l p(y_l | c_l, \hat{\mathbf{b}}^{(m,n)}) \mu_{c_l \rightarrow p}^{(m)}(c_l) \\ &\propto p(y_k | c_k, \hat{\mathbf{b}}^{(m,n)}) \mu_{c_l \rightarrow p}^{(m)}(c_l) \end{aligned}$$

其中, $p(y_k | c_k, \hat{\mathbf{b}}^{(m,n)})$ 可以通过计算高斯概率密度得到。

3. 梯度算法

文献[61]介绍了利用梯度来估计同步参数的算法,它的基本思想是按梯度的方向更新

似然函数 $\log p(\mathbf{r}|\mathbf{b})$ 。考虑有编码的情况,梯度算法可按式更新估计量:

$$\hat{\mathbf{b}}^{(l+1)} = \hat{\mathbf{b}}^{(l)} + \alpha^{(l)} (\nabla \log p(\mathbf{r}|\mathbf{c}, \mathbf{b}))_{\mathbf{b}=\hat{\mathbf{b}}^{(l)}}$$

其中, $\alpha^{(l)} > 0$, $(\nabla \log p(\mathbf{r}|\mathbf{c}, \mathbf{b}))_{\mathbf{b}=\hat{\mathbf{b}}^{(l)}}$ 是似然函数在点 $\mathbf{b}=\hat{\mathbf{b}}^{(l)}$ 的梯度。 $(\nabla \log p(\mathbf{r}|\mathbf{c}, \mathbf{b}))_{\mathbf{b}=\hat{\mathbf{b}}^{(l)}}$ 决定了更新的方向,而 $\alpha^{(l)}$ 决定了更新的步长。式(3-193)对待估参数求导得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \log p(\mathbf{r}|\mathbf{c}, \mathbf{b}) &= \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) \frac{\partial r_k(\tau)}{\partial \tau} e^{-j(2\pi k T \Delta f + \theta)} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial \Delta f} \log p(\mathbf{r}|\mathbf{c}, \mathbf{b}) &= \text{Im} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} k \eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) r_k(\tau) e^{-j(2\pi k T \Delta f + \theta)} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(\mathbf{r}|\mathbf{c}, \mathbf{b}) &= \text{Im} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} k \eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) r_k(\tau) e^{-j(2\pi k T \Delta f + \theta)} \right\} \end{aligned}$$

4. APPA 算法

APPA 算法利用 SISO 输出的对数似然比(Logistic Likelihood Ratio, LLR)信息估计出载波的相偏信息,反馈到相偏补偿模块,对信号相位进行补偿。图 3-79 给出了该算法的系统模型,图 3-80 是 APPA 算法的具体实现结构框图^[54]。

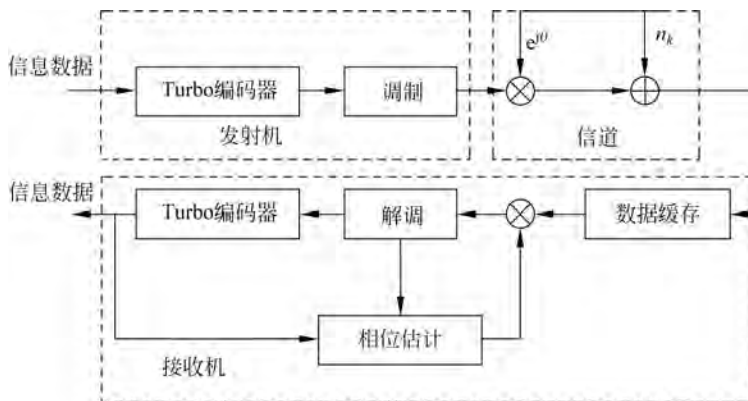


图 3-79 APPA 算法系统模型

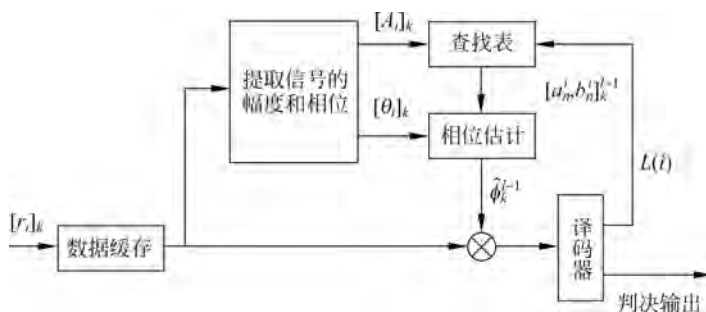


图 3-80 APPA 算法相位估计结构图

APPA 算法利用译码器输出的后验概率信息进行相位估计,该算法可以用两个步骤来描述:步骤一,从译码器输出的后验概率信息得到用于载波相位估计的对数似然函数(LLF);步骤二,对步骤一求得 LLF 做简化用于获得相位的最大似然估计。

第 k 个接收符号的表达式可以写成 $r_k = A_k \exp(j\theta_k)$, 其中 A_k 表示信号的幅度, θ_k 表示信号的相位, 由于载波相位误差和噪声的存在, 两个量都是变化的。根据文献[43], 假设信道是加性高斯白噪声信道(AWGN)噪声的功率是 σ^2 , 考查一个数据长度为 N 的数据块, 似然函数是待估计的载波相位信息的函数, 记为

$$\Lambda(\theta) = \exp \left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re}(r_k s_k^*(\theta)) \right] \quad (3-199)$$

其中, $s_k(\theta)$ 是第 k 个传输信号, 它是载波相位 θ 的函数。这里假设, 在一个数据块上, 相偏是固定且未知的。对于 MPSK 调制, 符号值可以用式表示为

$$s(m, \theta) = \exp \left[j \frac{2\pi m}{M} + \theta \right], \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3-200)$$

其中, M 是星座的大小。

利用统计的方法对所有数据的似然函数求平均, 假设迭代之后, 第 k 个信号的概率记为 $P_k(m)$, 因为在迭代译码系统中, 第一次迭代之前无可用的外信息, 所以在迭代之前信号的概率相等均为星座图上的概率, 即 $P_k(m) = 1/M$ 。在整个星座上对似然函数求平均, 则有

$$\Lambda(\theta) = \prod_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} P_k(m) \exp \left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re}(r_k s_k^*(\theta)) \right] \right\} \quad (3-201)$$

对式(3-201)取对数, 则 LLF 可以写为

$$\begin{aligned} \ln \Lambda(\theta) &= \prod_{k=0}^{N-1} \log \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} P_k(m) \exp \left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re}(r_k s_k^*(\theta)) \right] \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \ln \Lambda_k(\theta) \end{aligned} \quad (3-202)$$

其中, $\ln \Lambda_k(\theta)$ 定义为每个符号的对数似然函数:

$$\ln \Lambda_k(\theta) = \log \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} P_k(m) \exp \left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re}(r_k s_k^*(\theta)) \right] \right\} \quad (3-203)$$

译码外信息 L_k 定义为对数似然比:

$$L_k = \log \left(\frac{P(c_k = 1)}{P(c_k = 0)} \right)$$

对于二进制转移信道而言, $P(c_k = 1) + P(c_k = 0) = 1$, 因此可以从 L_k 计算出符号的先验概率^[44]:

$$\begin{cases} P(c_k = 1) = \frac{\exp(L_k)}{1 + \exp(L_k)} \\ P(c_k = 0) = \frac{1}{1 + \exp(L_k)} \end{cases} \quad (3-204)$$

在 BPSK 系统中, 发送的信号有两种情况, 即

$$\begin{aligned} s(0, \theta) &= -\exp(j\theta) \\ s(1, \theta) &= \exp(j\theta) \end{aligned}$$

因此, $P_k(m)$ 经过处理后, 可以由式(3-204)得到 BPSK 系统的第 k 个符号的对数似然函数(LLF), 即

$$\ln\Lambda_k(\theta) = \log \left\{ \operatorname{sech} \left(\frac{L_k}{2} \right) \times \left[\frac{L_k}{2} + \frac{A_k \cos(\theta - \theta_k)}{\sigma^2} \right] \right\}$$

对于 QPSK 调制信号, 其同相支路和正交支路的比特概率分别为 $P_k(u_m)$ 和 $P_k(c_m)$, 对应的外信息分别为 $L_u(k)$ 和 $L_c(k)$, 则 QPSK 符号概率

$$P_k(m) = P_k(u_m)P_k(c_m) \quad (3-205)$$

式(3-200)、式(3-204)、式(3-205)代入式(3-203)并经过化简可得 QPSK 信号的每个符号的对数似然函数为

$$\ln\Lambda_k(\theta) = \log \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{sech} \left(\frac{L_{uk}}{2} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{L_{ck}}{2} \right) \times \left[\cosh \left(\frac{A_k \cos(\theta - \theta_k)}{\sigma^2} - \frac{L_{uk}}{2} - \frac{L_{ck}}{2} \right) + \cosh \left(\frac{A_k \sin(\theta - \theta_k)}{\sigma^2} + \frac{L_{uk}}{2} - \frac{L_{ck}}{2} \right) \right] \right\}$$

在最大似然估计中, 式(3-199)取最大值的必要条件为:

$$\frac{d\ln\Lambda(\theta)}{d\theta} = 0 \quad (3-206)$$

如果将式(3-202)代入式(3-206), 然后再计算整个数据块的对数似然函数, 那么计算量将会非常大, 为此可以从式(3-202)的导数需要满足的条件直接计算, 为了解决这个问题, 将 LLF 扩展成傅里叶级数的形式:

$$\ln\Lambda(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ a_{0k} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{nk} \cos(n(\theta - \theta_k)) + b_{nk} \sin(n(\theta - \theta_k))] \right\} \quad (3-207)$$

其中, 傅里叶系数为

$$\begin{aligned} a_{nk} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\Lambda_k(\theta) \cos(n\theta) d\theta \\ b_{nk} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\Lambda_k(\theta) \sin(n\theta) d\theta \end{aligned} \quad (3-208)$$

其中, a_{nk} 和 b_{nk} 是第 k 个符号的傅里叶系数, 数据块的 LLF 是 N 个符号的 LLF 之和, 因此我们可以独立地计算每个符号的傅里叶系数。在实际的仿真中发现, 高次谐波的幅度是可以忽略不计的, 又因为求导的过程, 那么常数项 a_{0k} 也可以忽略, 最终, 可以通过忽略常数项和高次谐波来逼近 LLF:

对于 BPSK 调制而言, 傅里叶系数只有余弦形式。由于式(3-208)是周期偶函数且高次谐波比较小, 因此可近似为

$$\ln\Lambda_{\text{BPSK}}(\theta) \approx \sum_{k=0}^{N-1} [a_{0k} + a_{1k} \cos(\theta - \theta_k) + a_{2k} \cos(2\theta - 2\theta_k)]$$

忽略常数项 a_{0k} , 则上式可改写为

$$\begin{aligned} \ln\Lambda_{\text{BPSK}}(\theta) &\approx \sum_{k=0}^{N-1} [a_{1k} \cos(\theta - \theta_k) + a_{2k} \cos(2\theta - 2\theta_k)] \\ &= \omega_1 \cos(\theta - \theta_1) + \omega_2 \cos(2\theta - \theta_2) \end{aligned}$$

其中, ω_k 和 θ_k 是第 k 次谐波的幅度和相位。对于符号数为 N 的数据块有

$$\omega_1 \cos(\theta_1) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{1k} \cos(\theta_k)$$

$$\begin{aligned}\omega_1 \sin(\theta_1) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_{1k} \sin(\theta_k) \\ \omega_2 \cos(\theta_2) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_{2k} \cos(2\theta_k) \\ \omega_2 \sin(\theta_2) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_{2k} \sin(2\theta_k)\end{aligned}$$

对式(3-207)求导有

$$\frac{d \ln \Lambda_{\text{BPSK}}}{d\theta} = \omega_1 \sin(\theta - \theta_1) + 2\omega_2 \sin(2\theta - \theta_2) = 0$$

通常情况下,当 θ 接近用最大似然估计得到的相位值 $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ 时, $\theta - \theta_1$ 和 $2\theta - \theta_2$ 是非常小的,因此可以用 $\sin x \approx x$ 来逼近,即

$$\frac{d \ln \Lambda_{\text{BPSK}}}{d\theta} = \omega_1 (\theta - \theta_1) + 2\omega_2 (2\theta - \theta_2) = 0$$

由上式可以得到相偏的最大似然估计,则

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \frac{\omega_1 \theta_1 + 2\omega_2 \theta_2}{\omega_1 + 4\omega_2}$$

上面介绍的方法只能非常有限地降低计算的复杂度,因为傅里叶系数 $\{a_{1k}, a_{2k}\}$ 对于每个符号而言都是变化的,所以计算量仍然非常大。解决这个问题的一個方法是将 $\{a_{1k}, a_{2k}\}$ 的值做成一个查找表。

经过以上简化以后,可以通过线性和查找表的处理很容易得到 $\ln \Lambda_{\text{BPSK}}^k$,整个数据块LLF的只是单个符号的LLF的简单相加。这样,避免了非线性处理,计算的复杂度也大幅下降,而相位估计值也可以由LLF计算得到。

算法工作流程^[54]如下:

- (1) 参数初始化。设置最大迭代次数为 M ,且 $\hat{\theta}_0 = 0, \hat{\epsilon}_0 = 0, [y_i]_0 = [c_i]_0 \exp(-j\hat{\theta}_0)$ 。
- (2) 估计。用式(3-206)计算得到第 k 帧的误差信息 $\hat{\epsilon}_k = \hat{\theta}_{\text{ML}}$ 。
- (3) 补偿。用估计的相位补偿接收信号 $[y_i]_{k+1} = [c_i]_k \exp(-j\hat{\theta}_k)$ 。
- (4) 根据是否达到迭代次数决定执行下一次迭代。

5. 仿真分析

一般来说,由于 c_k 是随机变量,很难从理论上分析CA同步算法的性能,因此只能求助于仿真。为简化起见,假定定时误差已知,即仅存在频偏和相偏。对于EM、SP-EM算法来说,可以通过在频率区间上进行最大值搜索来估计频偏。

两个重要的参数为搜索窗口和搜索间隔。频率搜索窗口为算法可锁定的最大频率,可通过仿真得到。频率搜索间隔 Δf_p 应该满足 $\Delta f_p \leq \Delta f_{\text{max}}$,其中 Δf_{max} 为不影响译码器性能的最大频偏值,则频率搜索点 $\Delta f_i T$ 的取值由下式给出:

$$\Delta f_i T = i \cdot \Delta f_p T, \quad i \in \{-L, -L+1, \dots, L-1, L\} \quad (3-209)$$

在此取 $\Delta f_p = 5 \times 10^{-6}$, L 由最大频偏值决定。另外,梯度算法中的 $\alpha^{(n)}$ 是变量,但仿真表明, $\alpha^{(n)}$ 可取一个固定值 α ,对结果影响不大。在此取 $\alpha = 5 \times 10^{-4}$ 。

仿真采用码率为 $1/4$, 码长为 1200 的 LDPC 码, BPSK 调制^[56]。图 3-81 和图 3-82 分别为 $\text{SNR} = -3.5\text{dB}$ 时的鉴频和鉴相曲线。可以看出, SP-EM 算法的同步范围最大, 其次是 EM 算法, 梯度算法最小, 但三者相差不大。图 3-83 和图 3-84 分别为频偏和相偏估计的根均方差(Root Mean Square Error, RMSE) 曲线, 同步参数设为 $\Delta f T = 1 \times 10^{-4}$, $\theta = 30^\circ$ 。频偏和相偏估计的 RMSE 分别为 $\text{RMSE}(\Delta \hat{f} T) = \sqrt{E(\Delta \hat{f} T - \Delta f T)^2}$, $\text{RMSE}(\hat{\theta}) = \sqrt{E(\hat{\theta} - \theta)^2}$ 。从图 3-83 和图 3-84 中可知, 精度由高到低依次为 SP-EM 算法、EM 算法、梯度算法, SP-EM 算法和 EM 算法几乎没有差别, 且随 SNR 升高, 三者的频偏估计精度都逼近 MCRB 界, 相偏估计精度虽然距 MCRB 有一定距离, 但对译码性能影响较小。图 3-85 为 BER/FER(Bit Error Ratio/Frame Error Ratio) 曲线, 同步参数设为 $\Delta f T = 1 \times 10^{-4}$, $\theta = 30^\circ$ 。结论与同步范围、估计精度一致, 三者距理想同步很近, 在 BER 为 10^{-4} 时仅 0.2dB 性能损失。

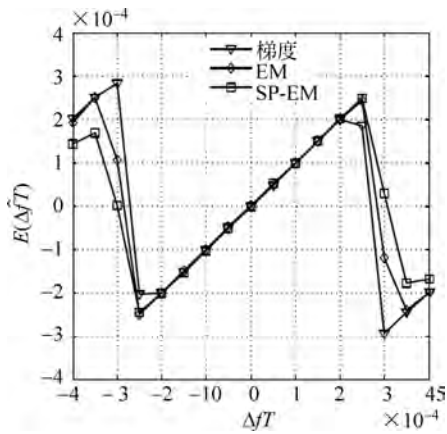
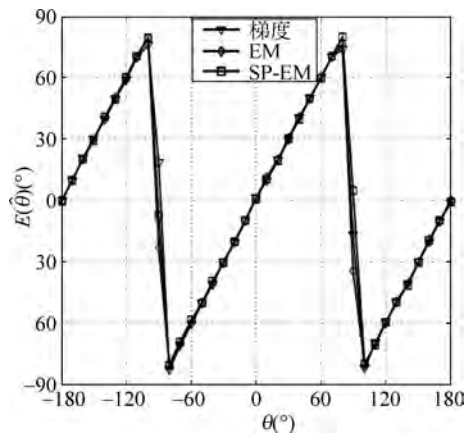
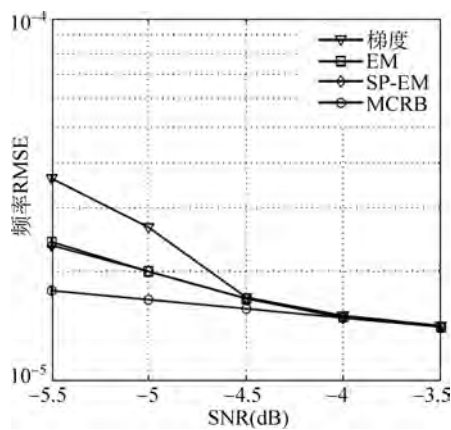
图 3-81 常用算法鉴频曲线, $\text{SNR} = -3.5\text{dB}$ ^[56]图 3-82 常用算法鉴相曲线, $\text{SNR} = -3.5\text{dB}$ 

图 3-83 常用算法的频率估计 RMSE 曲线

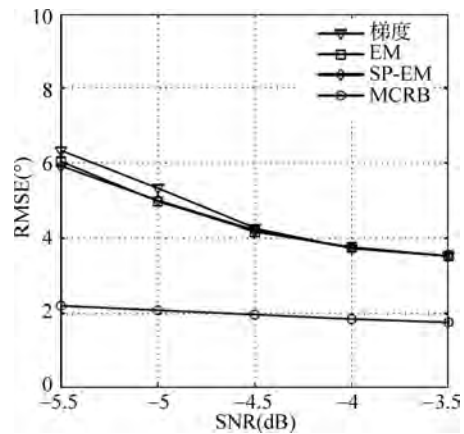


图 3-84 常用算法的相位估计 RMSE 曲线

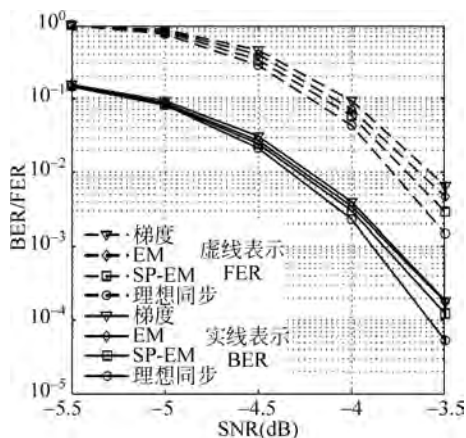


图 3-85 常用算法的 BER/FER 曲线

3.4.2 低复杂度编码辅助载波同步算法

1. 简化 EM 算法

根据 3.4.1 节的分析,在定时同步理想的情况下,基于 EM 算法的码辅助同步算法估计的同步参数值如式(3-195)和式(3-196),在第 l 次迭代时,需要在设定的频率范围内搜索,求得使函数最大的频偏值 $\Delta \hat{f}$ 作为频偏估计的结果,设频率搜索范围为: $[-\Delta f_{\max}, \Delta f_{\max}]$,搜索步长为 Δf_{temp} ,其中, Δf_{temp} 为算法可以捕获的最大频偏值。将估计得到的频偏代入式(3-196)即可求出相位值。基于算法的载波同步复杂度主要集中在以下两方面: Q 函数的计算;在设定的频率范围内频偏的搜索。因此,对于算法复杂度的简化主要从这两方面入手。

在低信噪比下,且纠错码码长较长时,EM 算法的同步范围有限,此时可采用最大似然搜索来估计频偏。回顾 3.4.1 节的内容,有

$$\Delta \hat{f}^{(l+1)} = \underset{\Delta f}{\operatorname{argmax}} \left| \sum_{k=0}^{N-1} r_k \eta_k^* (\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) e^{-j(2\pi k T \Delta f^{(l+1)})} \right| \quad (3-210)$$

$$\hat{\theta}^{(l+1)} = \operatorname{arg} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} r_k \eta_k^* (\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) e^{-j(2\pi k T \Delta f^{(l+1)})} \right\} \quad (3-211)$$

其中, $\Delta f_i T = i \cdot \Delta f_{\text{temp}} T (i \in -L, -L+1, \dots, L-1, L)$ 。将 Δf_i 依次代入式(3-210)中求模,选择模最大值对应的 Δf_i 作为第 $l+1$ 次的估计值 $\Delta \hat{f}^{(l+1)}$,然后将 $\Delta \hat{f}^{(l+1)}$ 代入式(3-211)求出对应的 $\hat{\theta}^{(l+1)}$ 。当码长很长时,频率搜索会引入很高的计算复杂度,而 $\hat{\theta}^{(l+1)}$ 可以通过查表给出,不会引入较高的复杂度。因此,整个 EM 算法的复杂度主要由式(3-210)决定。

在式(3-210)和式(3-211)中,后验均值 $\eta_k^* (\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)})$ 是通过译码器输出的软信息,即后验对数似然比 L_k 计算而来的。因此 L_k 的分布特性对同步参数的估计有重要影响。对于 BPSK 信号,有

$$\begin{cases} \log \frac{P(c_k = 1 | \mathbf{r}, \mathbf{b}^{(n)})}{P(c_k = -1 | \mathbf{r}, \mathbf{b}^{(n)})} = L_k \\ P(c_k = 1 | \mathbf{r}, \mathbf{b}^{(n)}) + P(c_k = -1 | \mathbf{r}, \mathbf{b}^{(n)}) = 1 \end{cases}$$

解方程组得

$$P(c_k = 1 | \mathbf{r}, \mathbf{b}^{(n)}) = \frac{e^{L_k}}{1 + e^{L_k}}$$

$$P(c_k = -1 | \mathbf{r}, \mathbf{b}^{(n)}) = \frac{1}{1 + e^{L_k}}$$

则

$$\eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) = \frac{e^{L_k} - 1}{e^{L_k} + 1} = \tanh(L_k) \quad (3-212)$$

L_k 是一个随机变量,其分布为类高斯分布; L_k 均值的绝对值与信噪比成正比关系;而方差与信噪比成反比关系^[56]。而后验均值是 L_k 的函数,因此也是一个随机变量。由式(3-212)可知后验均值与后验对数似然比 L_k 的关系是一个双曲正切函数,随着 L_k 的绝对值增大, $\eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)})$ 趋近 +1 或 -1。图 3-86 中的虚线表示 L_k 的分布。译码器迭代开始时, L_k 分布在 0 附近,取值较小;此时译码器还没收敛,译码准确性很低。随着迭代的进行,译码器输入的信噪比升高, L_k 均值的绝对值增大, L_k 的分布向坐标轴的两端移动;此时译码器逐渐收敛,译码准确性变高,可称此 L_k 区域为译码可靠区域。可对 L_k 定义一个门限 $L_{\text{threshold}}$,当 $L_k < L_{\text{threshold}}$ 时,为译码的不可靠区域;当 $L_k > L_{\text{threshold}}$ 时,为译码的可靠区域。很明显,随着迭代次数的增加, L_k 的分布向可靠区域靠拢, $\eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)})$ 的分布趋向于取值为 +1 与 -1 的二元分布。

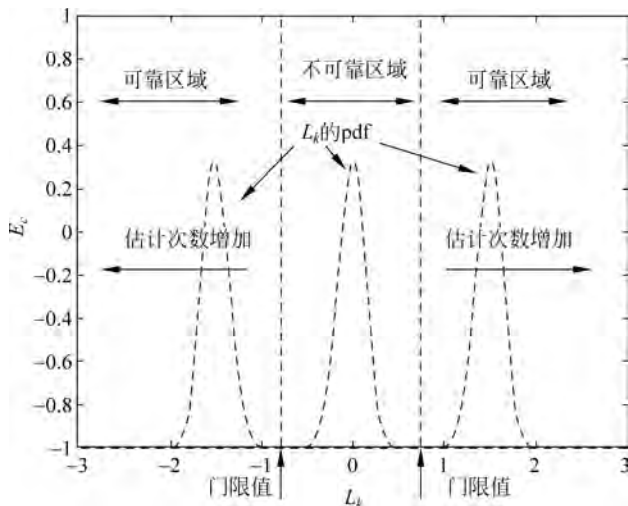


图 3-86 后验均值与后验对数似然比 L_k 的关系图

基于以上分析,现对 EM 算法做部分修改,以降低它的复杂度。一方面是减小每个频点求模的运算量;另一方面是减小频率搜索窗口^[56]。

(1) 定义简化的后验均值为

$$\eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) = \begin{cases} 1, & L_k > L_{\text{threshold}} \\ 0, & |L_k| \leq L_{\text{threshold}} \\ -1, & L_k < -L_{\text{threshold}} \end{cases} \quad (3-213)$$

即当后验信息在可靠区域时,可以对符号 c_k 进行硬判决,然后作为后验均值 $\eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)})$; 当后验信息不在可靠区域时,对后验均值 $\eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)})$ 进行置零处理。当译码迭代的次数较多,即译码和同步参数均趋于收敛时,式(3-210)可看作 DA 频偏估计,对符号 c_k 进行硬判决不会引入较大误差; 当译码迭代的次数较少,即译码和同步参数均没收敛时,对后验均值 $\eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)})$ 进行置零处理可以减少每个频点求模运算时符号 c_k 的数量。

从式(3-213)可以看出, $\eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)})$ 是一个只取 3 个值的随机变量。用符号 P 表示 $\eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)})$ 取非零值的概率, $P = P(E_c = 1) + P(E_c = -1)$, 则 $1 - P = P(E_c = 0)$ 。随着迭代的进行,译码和同步参数不断更新, P 趋于 1, 这说明后验信息趋于可靠区域。对后验均值按式(3-213)处理不但可以减少符号参与的点数,同时可以避免求解函数 $\tanh(\cdot)$, 这样可以降低求模运算的复杂度。

(2) EM 算法中频域搜索窗口的大小是一个固定值。在每次迭代时,更新的频率估计值通常很小,估计值由小到大收敛于真值,故可采用一个频率积分器,将对原始信号的频偏估计变为对解调后信号的频偏估计,这样待估计的频偏值逐渐变小,总的频偏估计量逐渐增大,直至收敛于最原始的频偏值^[58]。通过仿真可得,频域搜索窗口可以减小为原来固定窗口的 l 倍,即新的窗口可设为 $\lfloor L/l \rfloor$, 通常 l 可取 2~5。对于相位估计,也采用相同的处理方式,即引入一个相位积分器。通过引入频率积分器,大大降低了运算复杂度,结合对后验均值的简化,简化的 EM 载波同步算法为

$$\hat{\Delta f}^{(l)} = \underset{\Delta f_i}{\operatorname{argmax}} \left| \sum_{k=0}^{N-1} r_k^{(l-1)} \eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l-1)}) e^{-j(2\pi k T \Delta f_i)} \right| \quad (3-214)$$

$$\Delta f_i T = i \cdot \Delta f_{\text{temp}} T, \quad i \in \{-\lfloor L/l \rfloor, -\lfloor L/l \rfloor + 1, \dots, \lfloor L/l \rfloor - 1, \lfloor L/l \rfloor\}$$

$$\tilde{\theta}^{(l)} = \operatorname{arg} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} r_k^{(l-1)} \eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l-1)}) e^{-j(2\pi k T \Delta f^{(l)})} \right\}$$

$$\Delta f^{(l)} = \Delta f^{(l-1)} + \tilde{\Delta f}^{(l)}$$

$$\hat{\theta}^{(l)} = \hat{\theta}^{(l-1)} + \tilde{\theta}^{(l)}$$

注意, $\Delta f^{(0)} = 0, \tilde{\theta}^{(l)} = 0, r_k^{(0)} = r_k$ 。匹配滤波器输出的采样信号按如下方式更新:

$$r_k^{(l)} = r_k^{(l-1)} e^{-j(2\pi k T \Delta f^{(l)} + \tilde{\theta}^{(l)})}$$

另一种简化算法复杂度的方向为减少或避免最大化 Q 函数时的频率搜索,式(3-194)没有显式的解,故无法直接通过解方程来求同步参数。分别对式(3-194)中的未知参数求导

$$\frac{\partial Q(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{b}}^{(l-1)})}{\partial \Delta f} = \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} r_k \eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l-1)}) e^{-j(\theta + 2\pi k \Delta f T)} \right\}$$

$$\frac{\partial Q(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{b}}^{(l-1)})}{\partial \theta} = \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} r_k \eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l-1)}) e^{-j(\theta + 2\pi k \Delta f T)} \right\}$$

令导数等于 0, 两方程均为非线性方程, 上式经变形后可写为

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \left\{ e^{-j\theta} \sum_{k=0}^{N-1} k r_k \eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l-1)}) e^{-j2\pi k \Delta f T} \right\} = 0 \\ \operatorname{Im} \left\{ e^{-j\theta} \sum_{k=0}^{N-1} r_k \eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l-1)}) e^{-j2\pi k \Delta f T} \right\} = 0 \end{cases}$$

利用复矢量的相关性质,括号中的式子共轭相乘可得

$$\operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} r_k^* \eta_k^* (\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l-1)}) e^{-j2\pi k \Delta f T} \sum_{k=0}^{N-1} k r_k \eta_k^* (\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l-1)}) e^{-j2\pi k \Delta f T} \right\} = 0 \quad (3-215)$$

假设 $r_k \eta_k^* (\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l-1)}) = \lambda_k$, 式(3-215)可等效为

$$\operatorname{Im} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} k \lambda_m^* \lambda_k e^{j2\pi(m-k)\Delta f T} \right\} = 0 \quad (3-216)$$

通过这样的转换,将包含两个未知参数等式转化为式(3-216)的形式,其中仅含有一个未知参数,可以用泰勒级数进行近似。

$$\operatorname{Im} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} k \lambda_m^* \lambda_k \right\} e^{j2\pi(m-k)\Delta f T} \approx 1 + j2\pi(m-k)\Delta f T - \frac{1}{2}(j2\pi(m-k)\Delta f T)^2 + G + \dots$$

其中, G 表示无穷小量,若归一化频偏较小,可以用一阶泰勒级数进行近似,代入式(3-216)

$$\operatorname{Im} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} k \lambda_m^* \lambda_k (1 + j2\pi(m-k)\Delta f T) \right\} = 0$$

解方程可求得归一化频偏估计值

$$\Delta \hat{f}^{(l)} = \frac{\operatorname{Im} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^* \sum_{k=0}^{N-1} k \lambda_k \right\}}{2\pi T \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} m \lambda_m^* \sum_{k=0}^{N-1} k \lambda_k - \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^* \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \lambda_k \right\}} \quad (3-217)$$

用式(3-217)的显式解代替式(3-195)中搜索求最大值的步骤,可避免复杂的频偏搜索过程,简化算法复杂度。算法是一个迭代更新的过程,估计值随着迭代逐渐收敛于真实值,在用泰勒级数近似时,待估计参数值越小,由泰勒级数近似而引入的误差也越小,因此,考虑用第 l 次迭代得到的同步参数对接收信号补偿,则第 $l+1$ 次迭代估计的对象为补偿后的残差。采用此方法,同步参数的估计方程可写为

$$\Delta \hat{f}^{(l)} = \operatorname{argmax}_{\Delta f_i} \left| \sum_{k=0}^{N-1} r_k^{(l-1)} \eta_k^* (\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l-1)}) e^{-j(2\pi k T \Delta f_i)} \right|$$

$$\tilde{\theta}^{(l)} = \operatorname{arg} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} r_k^{(l-1)} \eta_k^* (\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l-1)}) e^{-j(2\pi k T \Delta f^{(l)})} \right\}$$

其中, $r_k^{(l)} = r_k^{(l-1)} e^{-j(2\pi k T \Delta f^{(l)} + \tilde{\theta}^{(l)})}$, 式(3-217)可改写为

$$\Delta \hat{f}^{(l)} = \frac{\operatorname{Im} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(n-1)*} \sum_{k=0}^{N-1} k \lambda_k^{(n-1)} \right\}}{2\pi T \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} m \lambda_m^{(n-1)*} \sum_{k=0}^{N-1} k \lambda_k^{(n-1)} - \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(n-1)*} \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \lambda_k^{(n-1)} \right\}}$$

其中, $\lambda_k^{(l-1)} = r_k^{(l-1)} \eta_k^* (\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l-1)})$ 。最终同步参数估计结果为每次 EM 迭代估计的累加 $\Delta \hat{f}_{\text{ca}} = \sum_{l=1}^L \Delta \hat{f}^{(n)}$, $\Delta \hat{\theta}_{\text{ca}} = \sum_{l=1}^L \Delta \hat{\theta}^{(n)}$, 其中, L 为 EM 最大迭代次数。

为评估简化 EM 载波同步算法的性能,首先分析了它的运算复杂度,并与原算法进行对比,然后给出其估计的 RMSE 曲线以及 BER 曲线。仿真采用码率为 1/12, 码长为 1200 的 LDPC-Hadamard 码。

(1) 复杂度分析^[56]。

原 EM 算法: 对于每一个频率点 Δf_i , 由式(3-210)可知, EM 算法需要 $2K$ 次乘法、

$K-1$ 次加法。设窗口的大小为 L , 共有 $2L+1$ 个频率点, 因此共需要 $2(2L+1)K$ 次乘法、 $(2L+1)(K-1)$ 次加法。简化 EM 算法: 对于每一个频率点 Δf_i , 由式(3-214)可知, 简化 EM 算法需要 $2KP$ 次乘法、 $2KP-1$ 次加法。而简化 EM 算法窗口大小为 $\lfloor L/l \rfloor$, 因此共需要 $2(2\lfloor L/l \rfloor+1)KP$ 乘法及 $(2\lfloor L/l \rfloor+1)(KP-1)$ 加法。

为衡量简化 EM 载波同步算法在运算复杂度方面的改善效果, 定义指标 η_1 、 η_2 , 分别表示简化算法与原算法的加法及乘法运算次数之比, 即:

$$\eta_1 = \frac{(2\lfloor L/l \rfloor+1)(KP-1)}{(2L+1)(K-1)} \approx \frac{P}{l}$$

$$\eta_2 = \frac{2(2\lfloor L/l \rfloor+1)KP}{2(2L+1)K} \approx \frac{P}{l}$$

从上面两个式子可以看出, η_1 和 η_2 均是 l 和 P 的函数, 而 l 和 P 均是统计量, 需通过仿真得到。在本节仿真中, l 可取 2, 即频率搜索窗口可减小一半; 而 P 和迭代次数、后验软信息门限、信噪比均有关。图 3-87 为 $\text{SNR}=-10\text{dB}$ 时, P 与门限和迭代次数的关系。从图 3-87 可以看出, 门限一定时, P 与迭代次数成正比, 当迭代次数较小时, P 增长很快, 当迭代次数为 10 次以后, P 增长缓慢。这是由于频偏相偏逐渐得到补偿, 译码准确度逐渐提高的原因。当译码和载波估计收敛时, P 也收敛于一固定值。另外可以看出, 门限越高, P 越大, 复杂度越低。图 3-88 为门限一定时, P 与信噪比和迭代次数的关系。可以看出, 信噪比越低, P 越小, 复杂度越低。

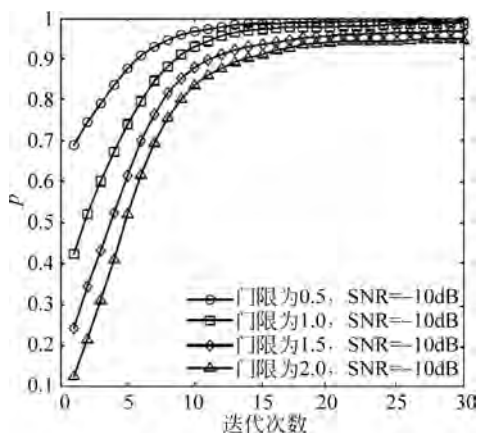


图 3-87 信噪比一定时, P 与门限和迭代次数的关系

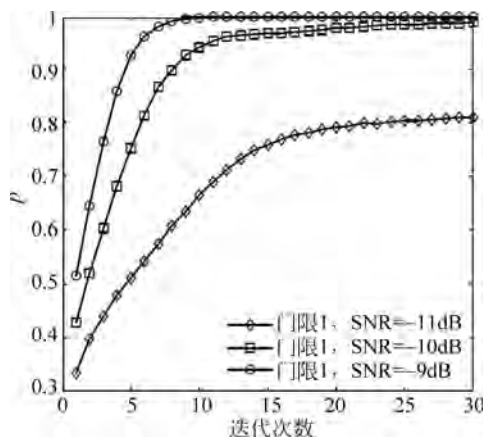


图 3-88 门限一定时, P 与门限和迭代次数的关系

(2) 同步性能分析^[56]。

图 3-89、图 3-90 和图 3-91 分别为频偏估计 RMSE 曲线、相偏估计 RMSE 曲线以及 BER 曲线, 仿真所用同步参数为 $\Delta fT=1 \times 10^{-4}$, $\theta=15^\circ$, 迭代次数上限为 20 次。

图 3-89 和图 3-90 表明门限值升高, 简化 EM 算法的频偏估计和相偏估计方差有小幅上升, 并与原 EM 算法有一定距离。这是因为门限值越高, 式(3-214)中参与估计的非零后验均值的点数越小, 但复杂度越低。而且, 从图 3-91 可知, 当门限值小于 2 时, 简化 EM 算法的 BER 曲线和原 EM 算法几乎重合; 当门限为 2 时, 性能也仅有 0.1dB 的损失, 但与理想同步的 BER 曲线有 0.25dB 的损失。因此在实际中需要在复杂度和性能之间折中, 只要

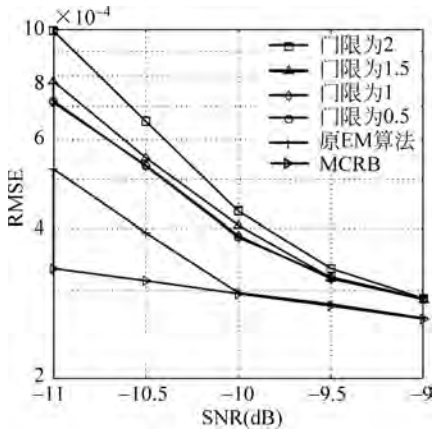


图 3-89 简化 EM 算法的频率估计 RMSE 曲线

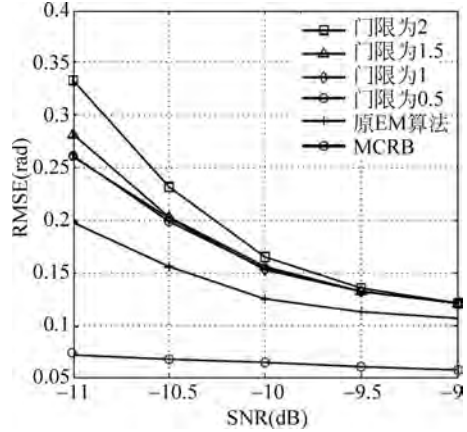


图 3-90 简化 EM 算法的相位估计 RMSE 曲线

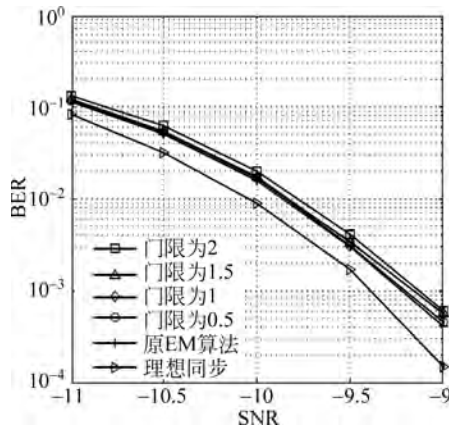


图 3-91 简化 EM 算法的 BER 曲线

门限不过高,性能损失很小,复杂度会有很大改善。

2. 基于相关的 CA 载波同步

从 CA ML 估计的推导过程可以看出,当符号 c_k 为已知时,CA ML 估计变成了 DA ML 估计。所以对于 CA ML 估计算法来说,当译码器收敛时,即符号 c_k 从未知变成已知时,CA ML 估计收敛于 DA ML 估计。因此在 CA ML 算法的每一次迭代中,可以利用后验均值消除信号中的调制信息,然后用已有的 DA ML 估计方法去估计同步参数。

利用后验均值消除信号中的调制信息,即

$$z_k^n = r_k \eta_k^* = e^{j(2\pi k \Delta f T + \theta)} + n_k \eta_k^*$$

则 DA 频率估计算法可用于 CA 频偏估计。文献[57]最早利用这种思想进行频偏估计,其提出的基于相关的 CA 频率估计算法为

$$\hat{\Delta f}^{(n+1)} T = \frac{1}{2\pi d} \arg \left\{ \sum_{k=0}^{K-d-1} (z_k^n)^* z_{k+d}^n \right\} \quad (3-218)$$

其中, $d = K/2$ 为相关步长。其对应 DA 估计方差为

$$E[(\hat{\Delta f} - \Delta f)^2 T^2] = \frac{2}{\pi^2 K^3} \left(\frac{1}{\text{SNR}} + \frac{1}{2\text{SNR}^2} \right)$$

文献[57]针对 $\text{SNR} > 0\text{dB}$ 的情况提出了相同的方法,步长 $d = K/3$ 。估计方差

$$E[(\hat{\Delta f} - \Delta f)^2 T^2] = \frac{27}{16\pi^2 K^3} \left(\frac{1}{\text{SNR}} + \frac{1}{2\text{SNR}^2} \right)$$

由于式(3-218)只利用了采样信号的一个相关值,即步长 $d = K/2$ 或 $K/3$ 的相关值,因此在低信噪比环境下,此算法的估计精度很差。为有效地抵抗大噪声对同步的影响,需利用多个相关值进行估计,相应算法为

$$\hat{\Delta f}^{(n+1)} T = \frac{1}{2\pi D} \arg \left\{ \sum_{k=0}^{K/2-1} \sum_{m=K/2}^{K-1} (z_k^n)^* z_m^n \right\} \quad (3-219)$$

其中, $D = K/2$ 可看作平均相关步长。其对应的 DA 估计方差为

$$E[(\hat{\Delta f} - \Delta f)^2 T^2] = \frac{2}{\pi^2 K^2} \left(\frac{1}{K \text{SNR}} + \frac{1}{K^2 \text{SNR}^2} \right)$$

以上基于相关 CA 频率估计算法对应的相位估计为

$$\hat{\theta}^{(n+1)} = \arg \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} z_k e^{-j2\pi k \hat{\Delta f}^{(n+1)} T} \right\}$$

可以看出,基于相关的 CA 载波同步算法只是在式(3-210)和式(3-211)上稍做修改,即用已有的 DA 频率估计算法来实现 CA 频率估计。只要 DA 频率估计器能正常工作,即估计方差在一定范围内,那么 CA 同步算法在经过一定迭代次数后,估计器和译码器均能趋于收敛。

为方便比较,称式(3-218)和式(3-219)所代表频率估计算法为单相关 CA 算法和多相关 CA 算法。仿真仍然采用(1/12, 1200)的 LDPC-Hadamard 码。图 3-92 为频偏估计 RMSE 曲线,图 3-93 为式(3-218)和式(3-219)所对应的相偏估计 RMSE 曲线,图 3-94 为 BER 曲线。仿真所用同步参数为 $\Delta f T = 5 \times 10^{-5}$, $\theta = 15^\circ$,迭代次数上限为 20 次。从图 3-94 可以看出,式(3-219)的估计精度远高于式(3-218),同时具有更低的 BER,其距理想同步有 0.2dB 左右的损失。

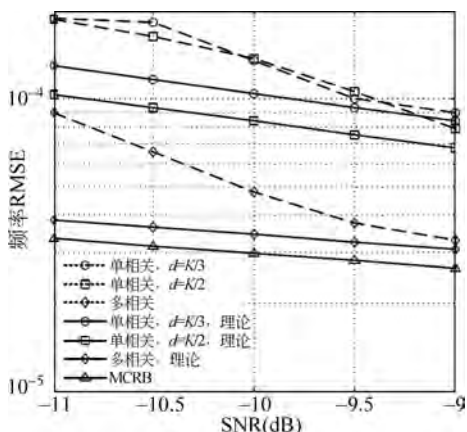


图 3-92 基于相关的 CA 载波同步算法的频偏估计 RMSE 曲线

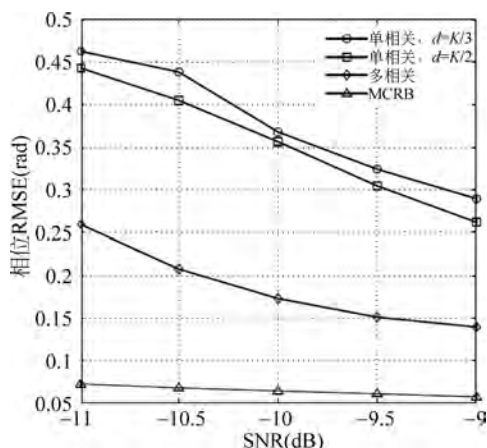


图 3-93 基于相关的 CA 载波同步算法的相偏估计 RMSE 曲线

3. 基于级数近似的 CA 载波同步

由于式(3-210)没有显式表达式,故可对似然函数或其导数进行线性化处理,从而得到

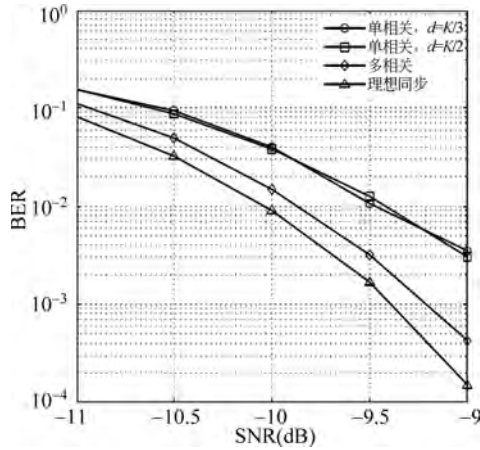


图 3-94 基于相关的 CA 载波同步算法的 BER 曲线

具有显式表达式的频偏估计式。接下来给出两种具体的方法。

方法 1: 先求 LLF 的导数, 将 $\sin(\cdot)$ 函数用其麦克劳林级数展开式的线性项简化。首先将 $r_k \eta_k^*(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{b}}^{(n)})$ 表示成极坐标的形式, 即

$$r_k \eta_k^*(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{b}}^{(n)}) = A_k \exp(j\theta_k)$$

其中, $A_k = |r_k \eta_k^*(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{b}}^{(n)})|$, $\theta_k = \angle r_k \eta_k^*(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{b}}^{(n)})$, 那么式(3-210)变为

$$\text{LLF} \approx \sum_{k=0}^{K-1} A_k \cos[\theta_k - (2\pi k \Delta f T + \theta)]$$

分别对 $\Delta f T$ 、 θ 求偏导并令其为 0, 得方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{LLF}}{\partial \Delta f T} = 2\pi \sum_k k A_k \sin[\theta_k - (2\pi k \Delta f T + \theta)] = 0 \\ \frac{\partial \text{LLF}}{\partial \theta} = \sum_k A_k \sin[\theta_k - (2\pi k \Delta f T + \theta)] = 0 \end{cases} \quad (3-220)$$

当 $\theta_k - (2\pi k \Delta f T + \theta)$ 足够小的时候, $\sin(\cdot)$ 函数可用其麦克劳林级数展开式的线性项近似, 式(3-220)可近似为

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{LLF}}{\partial \Delta f T} = 2\pi \sum_k k A_k [\theta_k - (2\pi k \Delta f T + \theta)] = 0 \\ \frac{\partial \text{LLF}}{\partial \theta} = \sum_k A_k [\theta_k - (2\pi k \Delta f T + \theta)] = 0 \end{cases} \quad (3-221)$$

解式(3-221)可得

$$\begin{aligned} \Delta \hat{f}^{(n)} T &= \frac{1}{2\pi} \frac{a_1 a_5 - a_3 a_4}{a_2 a_5 - a_3^2} \\ \hat{\theta}^{(n)} &= \frac{a_2 a_4 - a_1 a_3}{a_2 a_5 - a_3^2} \end{aligned} \quad (3-222)$$

其中, $a_1 = \sum_k k A_k \theta_k$, $a_2 = \sum_k k^2 A_k$, $a_3 = \sum_k k A_k$, $a_4 = \sum_k A_k \theta_k$, $a_5 = \sum_k A_k$ 。

另外, 也可以先将对数似然函数中的 $\cos(\cdot)$ 函数线性化处理, 然后再对 LLF 求导, 得

到的结果与式(3-222)相同。

方法 2: 将 LLF 按二元麦克劳林级数展开, 并简化之。

首先, 将接收信号 r_k 表示成极坐标形式, 即 $r_k = |r_k| \exp(j\varphi_k)$, 其中 $\varphi_k = \angle r_k$ 。为简化, 记 $B_k = |r_k| \eta_k^*(r, \hat{\mathbf{b}}^{(n)})$, $x = 2\pi\Delta fT$, $y = \theta$, 则对数似然函数式改写为

$$\text{LLF} \approx \sum_k B_k \cos[\varphi_k - (kx + y)]$$

按二元函数的 n 阶麦克劳林展开式将它展开为

$$\begin{aligned} \text{LLF} \approx & \underbrace{\sum_k B_k \cos(\varphi_k)}_{\text{第一项}} + x \underbrace{\sum_k kB_k \sin(\varphi_k)}_{\text{第二项}} + y \sum_k B_k \sin(\varphi_k) \\ & - \frac{1}{2} \left[x^2 \sum_k k^2 B_k \cos(\varphi_k) + 2xy \sum_k B_k \cos(\varphi_k) + y^2 \sum_k B_k \cos(\varphi_k) \right] \\ & + \cdots + G(j) + \cdots + R_n \end{aligned} \quad (3-223)$$

其中, $G(j)$ 为展开式的第 j 项, 是关于 x 、 y 的高次幂, R_n 为拉格朗日余项。因为 $x = 2\pi\Delta fT$ 非常小, 且当 $y = \theta$ 足够小时, 式(3-223)中的 $G(j)$ 和 R_n 可以忽略掉, 即简化为

$$\begin{aligned} \text{LLF} \approx & \sum_k B_k \cos(\varphi_k) + x \sum_k kB_k \sin(\varphi_k) + y \sum_k B_k \sin(\varphi_k) - \\ & \frac{1}{2} \left[x^2 \sum_k k^2 B_k \cos(\varphi_k) + 2xy \sum_k B_k \cos(\varphi_k) + y^2 \sum_k B_k \cos(\varphi_k) \right] \end{aligned}$$

分别对 x 、 y 求偏导并令它们为 0, 得方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{LLF}}{\partial x} \approx \sum_k kB_k \sin(\varphi_k) - x \sum_k k^2 B_k \cos(\varphi_k) - y \sum_k kB_k \cos(\varphi_k) = 0 \\ \frac{\partial \text{LLF}}{\partial y} \approx \sum_k B_k \sin(\varphi_k) - x \sum_k kB_k \cos(\varphi_k) - y \sum_k B_k \cos(\varphi_k) = 0 \end{cases} \quad (3-224)$$

解式(3-224), 并将 x 、 y 换算成 ΔfT 、 θ , 可得

$$\begin{aligned} \Delta \hat{f}^{(n)} T &= \frac{1}{2\pi} \frac{b_1 b_5 - b_3 b_4}{b_2 b_5 - b_3^2} \\ \hat{\theta}^{(n)} &= \frac{b_2 b_4 - b_1 b_3}{b_2 b_5 - b_3^2} \end{aligned} \quad (3-225)$$

其中, $b_1 = \sum_k kB_k \sin(\varphi_k)$, $b_2 = \sum_k k^2 B_k \cos(\varphi_k)$, $b_3 = \sum_k kB_k \cos(\varphi_k)$, $b_4 = \sum_k B_k \sin(\varphi_k)$, $a_5 = \sum_k B_k \cos(\varphi_k)$ 。

这两种方法均得到了最大似然频偏估计的显式表达式。用式(3-222)或式(3-225)得到频偏和相偏的估计值后, 补偿接收信号, 反馈给译码器进行下一次迭代译码和同步。随着迭代次数的增加, 译码和同步趋于收敛。为方便, 称式(3-222)和式(3-225)表示的算法分别为级数算法 1 和级数算法 2。

对于基于级数近似的 CA 载波同步算法的仿真采用的编码方式不变。仿真所用同步参数为 $\Delta fT = 5 \times 10^{-5}$, $\theta = 15^\circ$ 。图 3-95 为频偏估计 RMSE 曲线, 图 3-96 为相偏估计 RMSE 曲线, 图 3-97 为 BER 曲线。从图 3-95~图 3-97 中可以看出, 算法 2 的精度要高于算法 1, 两者的同步参数精度都在译码器的收敛范围之内, BER 曲线距理想同步有 0.2dB。

下面就该算法的同步范围、估计精度、BER 性能进行仿真。仿真采用(1/12, 1200)的 LDPC-Hadamard 编码方式。为简化分析,从 3 类方法中各选了一种具有代表性的算法,分别为简化 EM 算法(门限为 1)、相关算法 2、级数算法 2。图 3-98 和图 3-99 分别为 SNR = -9dB 时,3 种算法的鉴频和鉴相曲线。可以看出,级数算法 2 和简化 EM 算法的同步范围差不多,都比相关算法 2 的范围大,但 3 种算法的同步范围都不大。图 3-100、图 3-101 和图 3-102 分别为 $\Delta fT = 5 \times 10^{-5}$, $\theta = 15^\circ$ 时,3 种算法的估计精度。可见,在相同的同步范围以内,级数算法 2 与简化 EM 算法的精度相当,相关算法 2 的精度稍差。BER 曲线也有相似的结论,不过 3 种算法的 BER 性能距理想同步最多只有 0.2dB 损失,可见,这几种方法都能有效地进行载波同步。

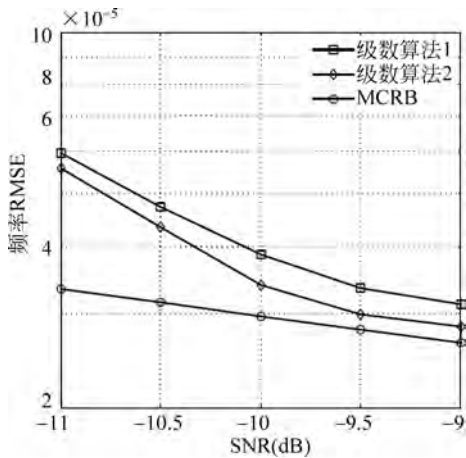


图 3-95 基于级数近似的 CA 载波同步算法的频偏估计 RMSE 曲线

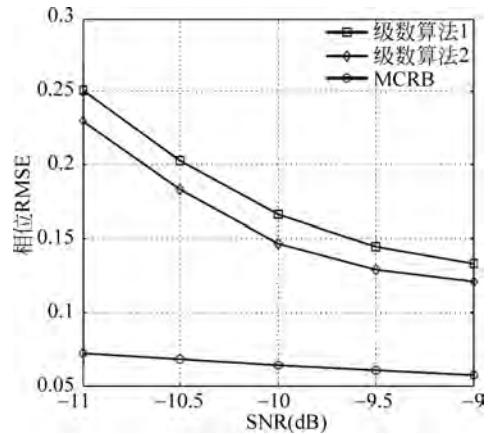


图 3-96 基于级数近似的 CA 载波同步算法的相偏估计 RMSE 曲线

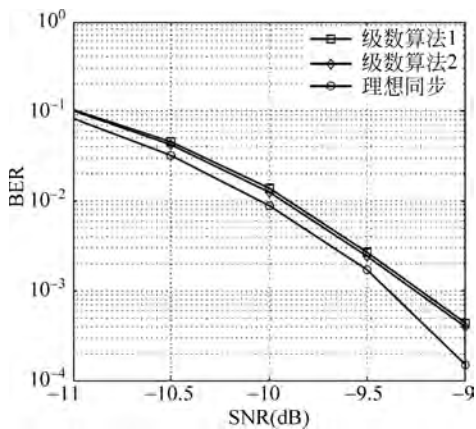


图 3-97 基于级数近似的 CA 载波同步算法的 BER 曲线

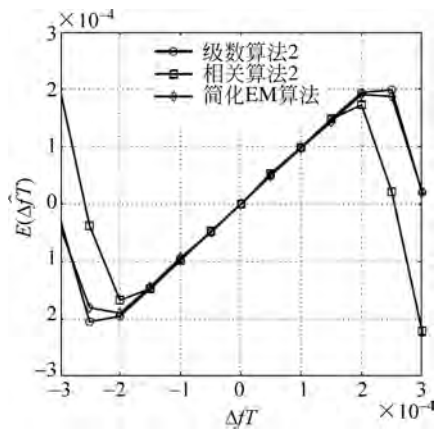


图 3-98 3 种算法的鉴频曲线

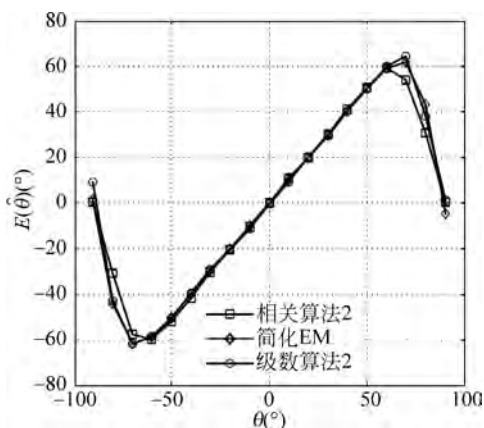


图 3-99 3 种算法的鉴相曲线

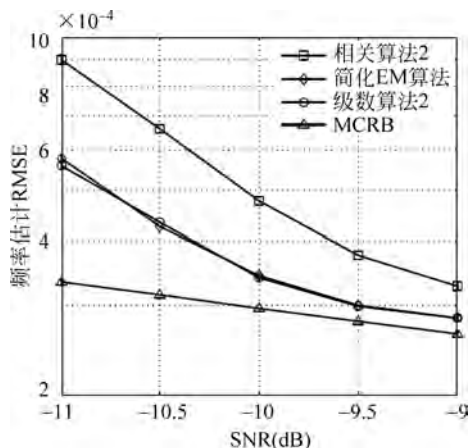


图 3-100 3 种算法频率估计 RMSE 曲线

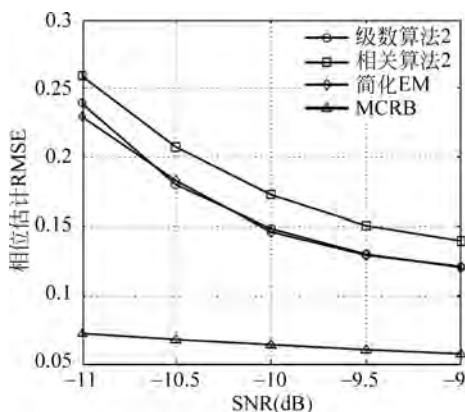


图 3-101 3 种算法相位估计 RMSE 曲线

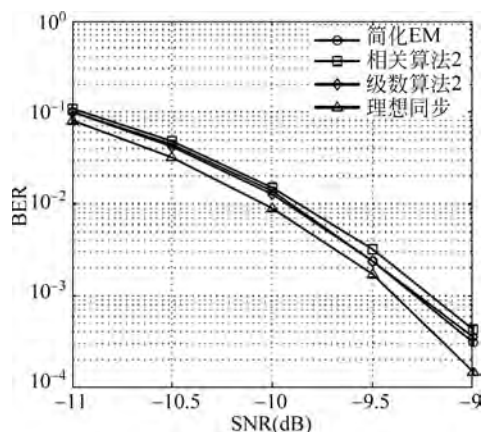


图 3-102 3 种算法 BER 曲线

3.4.3 联合编码辅助载波同步算法

1. 数据辅助联合编码辅助载波同步

本节将讨论数据辅助联合编码辅助载波同步技术,首先利用数据辅助载波同步算法对频偏和相偏进行粗估计,经过初步补偿后,信号中残留的频偏和相偏已在 CA 同步算法的估计范围之内。选择简化 EM 算法作为精同步算法,并将导频辅助引入到此算法中,则大频偏大相偏情况下的载波同步算法可分为如下几步:

第一步,用导频粗估计。

利用式(3-81)或式(3-85)进行频率粗估计,即

$$\Delta \hat{f}_{\text{coarse}} T = \frac{1}{2\pi D} \arg \left\{ \sum_{k \in \text{Pilot}_{\text{pre}}} r_k^* r_{k+D} + \sum_{k \in \text{Pilot}_{\text{mid}}} r_k^* r_{k+D} \right\}$$

或者

$$\Delta \hat{f}_{\text{coarse}} T = \frac{1}{2\pi D} \arg \left(\sum_{k \in P_3} r_k \sum_{k \in P_1} r_k^* + \sum_{k \in P_4} r_k \sum_{k \in P_2} r_k^* \right)$$

然后再进行相位粗估计

$$\hat{\theta}_{\text{coarse}} = \arg \left\{ \sum_{k \in L_{\text{Pilot}}^{\text{pre}}} r_k e^{-j2\pi k \Delta \hat{f} T} \right\}$$

补偿接收信号

$$r_k = r_k e^{-j(2\pi k \Delta \hat{f} T + \hat{\theta}_{\text{coarse}})}$$

第二步,导频联合编码精估计(简化 EM 算法,见 3.4.2 节):

$$\hat{\Delta f}^{(l)} = \underset{\Delta f_i}{\operatorname{argmax}} \left| \underbrace{\sum_{k=L_N^{\text{Data}}} r_k^{(l-1)} E_c[\mathbf{c}_k^* | \mathbf{r}^{(l-1)}, \mathbf{b}^{(l-1)}] e^{-j(2\pi k T \Delta f_i)}}_{\text{CA}} + \underbrace{\sum_{k=L_N^{\text{Pilot}}} r_k^{(l-1)} e^{-j(2\pi k T \Delta f_i)}}_{\text{DA}} \right|$$

$$\Delta f_i T = i \cdot \Delta f_{\text{temp}} T, \quad i \in \{-\lfloor L/l \rfloor, -\lfloor L/l \rfloor + 1, \dots, \lfloor L/l \rfloor - 1, \lfloor L/l \rfloor\}$$

$$\tilde{\theta}^{(l)} = \arg \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} r_k^{(l-1)} E_c[\mathbf{c}_k^* | \mathbf{r}^{(l-1)}, \mathbf{b}^{(l-1)}] e^{-j(2\pi k T \Delta f^{(l)})} \right\}$$

$$\Delta f_{\text{Fine}}^{(l)} = \Delta f_{\text{Fine}}^{(l-1)} + \tilde{\Delta f}^{(l)}$$

$$\hat{\theta}_{\text{Fine}}^{(l)} = \hat{\theta}_{\text{Fine}}^{(l-1)} + \tilde{\theta}^{(l)}$$

注意, $\Delta f^{(0)} = 0, \tilde{\theta}^{(l)} = 0, r_k^{(0)} = r_k$ 。匹配滤波器输出的采样信号按如下方式更新:

$$r_k^{(l)} = r_k^{(l-1)} e^{-j(2\pi k T \Delta \tilde{f}^{(l)} + \tilde{\theta}^{(l)})}$$

第三步,总的频偏和相偏估计量为

$$\Delta f_{\text{Total}}^{(l)} T = \Delta f_{\text{Coarse}}^{(l)} T + \Delta f_{\text{Fine}}^{(l-1)} T$$

$$\hat{\theta}_{\text{Total}}^{(n)} = \hat{\theta}_{\text{Coarse}} + \hat{\theta}_{\text{Fine}}^{(n)}$$

(1) 低信噪比下的仿真结果(0dB 左右)。[56]

仿真采用码率为 1/4,码长为 1200 的 LDPC 码。图 3-103 和图 3-104 导频数 $N=120$, $\text{SNR}=-3.5\text{dB}$ 时,DA 联合 CA 估计算法的鉴频和鉴相曲线。可以看出,由于 PP 结构中两端的导频相距很远,同步范围仅比单纯 CA 同步(未用导频)的同步范围稍大。而 PMP 结构的同步范围明显比纯 CA 同步范围大很多,并且大约是 PP 结构的 2 倍多,与理论分析一

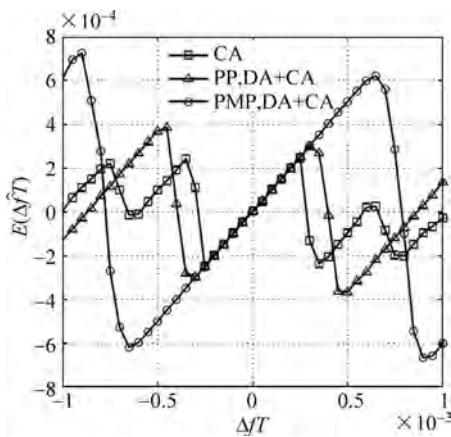


图 3-103 低信噪比下不同帧结构的鉴频曲线, $\text{SNR}=-3.5\text{dB}$

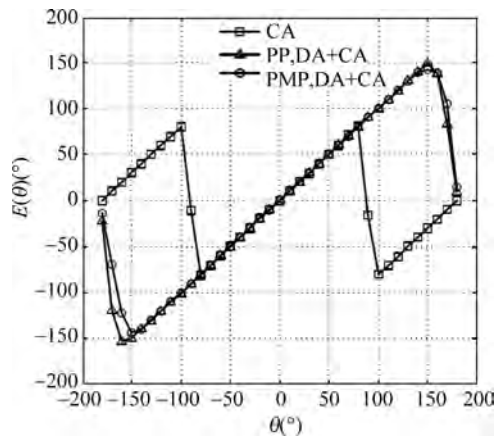


图 3-104 低信噪比下不同帧结构的鉴相曲线, $\text{SNR}=-3.5\text{dB}$

致。而两种结构的鉴相范围是相同的。注意,当相偏在 $\pm\pi$ 附近时,这两种结构的相位估计值会有符号取反现象,即 $\hat{\theta}$ 会在 θ 或 $-\text{sign}(\theta)2\pi+\theta$ 附近取值($\text{sign}(\theta)$ 表示 θ 的极性)^[59]。这个现象会导致估计均值呈非线性状,但相偏补偿正确,两种结构的鉴相范围均为 $[-\pi,\pi]$ ^[59]。

图 3-105 和图 3-106 为导频数 $N=120$ 时联合算法的频偏和相偏估计的 RMSE 曲线,同步参数设为 $\Delta fT=2\times 10^{-4}$, $\theta=60^\circ$ 。从图 3-105 可以看出,PMP 结构和 PP 结构粗同步的实测曲线与理论的均方差曲线均很接近。虽然 PMP 结构粗同步的均方差要高于 PP 结构,但通过精同步后,可以大幅降低均方差,并随 SNR 升高而逼近 MCRB。从图 3-106 可知,相位估计的精度具有类似结论。

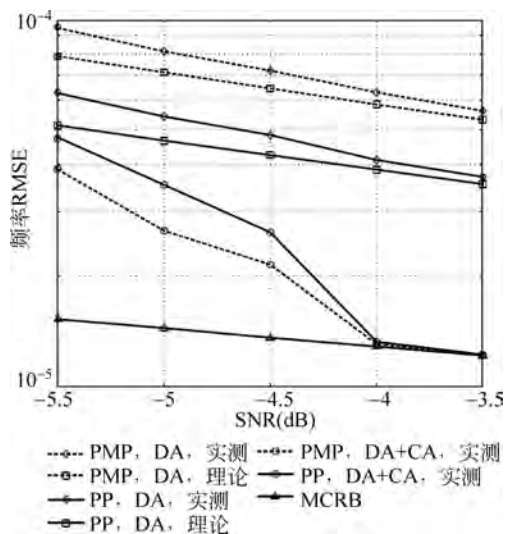


图 3-105 低信噪比下不同帧结构的频偏估计 RMSE 曲线

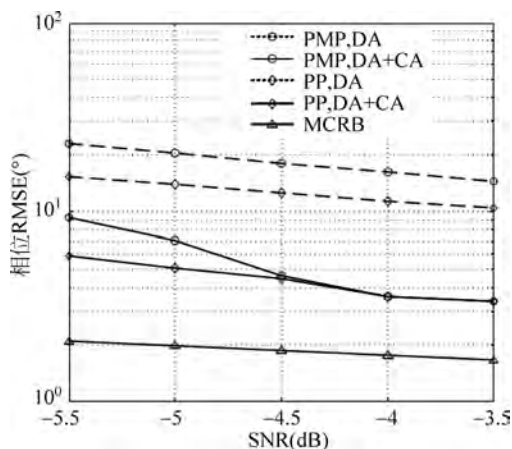


图 3-106 低信噪比下不同帧结构的相偏估计 RMSE 曲线

图 3-107 为不同导频结构下的 BER 曲线,两种结构的 BER 曲线几乎一样,与理想同步仅有 0.1dB 损失,回顾 3.4.2 节的内容,简化的 EM 算法与理想同步具有 0.2dB 损失,可见

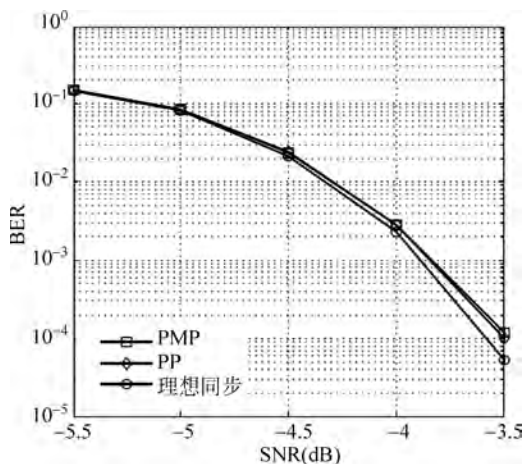


图 3-107 低信噪比下不同帧结构的 BER 曲线

联合算法不仅可以扩大同步范围,还能提高估计精度。

(2) 极低信噪比下的仿真结果(-10dB 左右)^[56]

在极低信噪比下,粗同步采用 PMMP 结构。采用码率为 1/12,码长为 1200 的 LDPC-Hadamard 进行仿真。图 3-108 和图 3-109 分别为鉴频和鉴相曲线,图 3-108 表明 PMMP 结构的联合算法频偏同步范围大约是 PP 结构的 1.5 倍,与理论一致;图 3-109 表明其相位同步范围是 $[-\pi, \pi]$ 。图 3-110、图 3-111 与图 3-112 分别为频偏估计 RMSE、相偏估计 RMSE 以及 BER 曲线,其结论与低信噪比下的仿真结果基本类似。

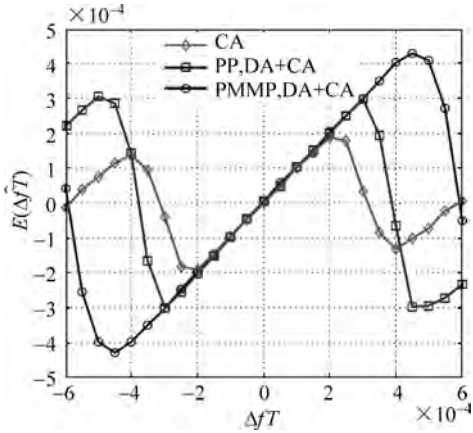


图 3-108 极低信噪比下不同帧结构的鉴频曲线,SNR=-9dB

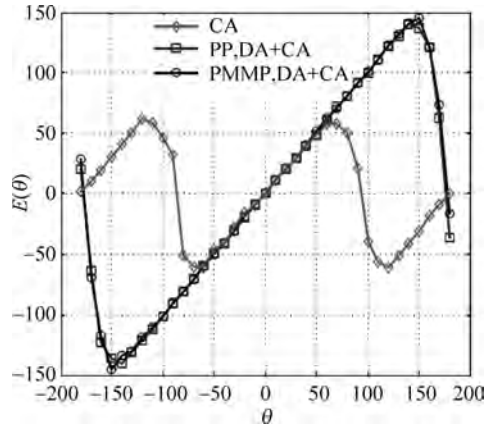


图 3-109 极低信噪比下不同帧结构的鉴相曲线,SNR=-9dB

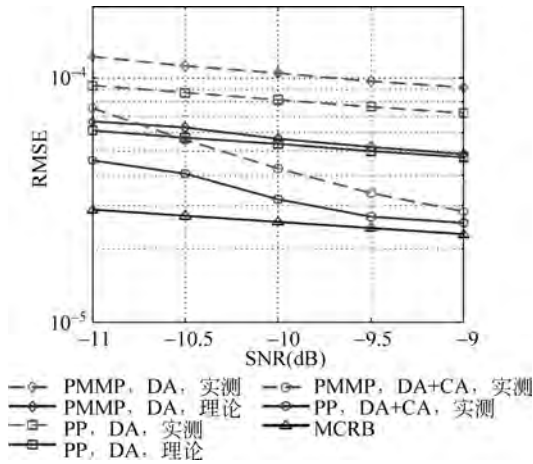


图 3-110 极低信噪比下不同帧结构的频偏估计 RMSE 曲线

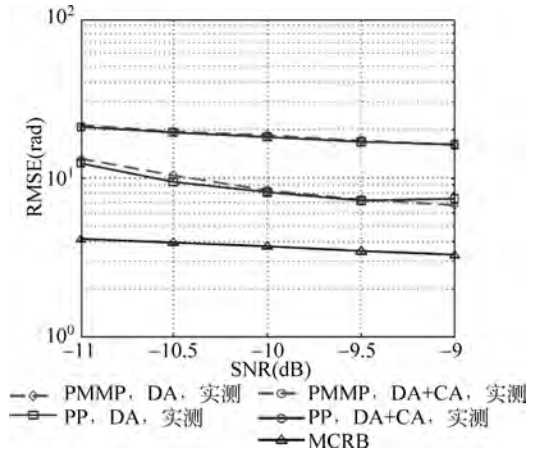


图 3-111 极低信噪比下不同帧结构的相偏估计 RMSE 曲线

2. Costas 环联合编码辅助载波同步

与 EM 算法不同,码辅助 Costas 环法的主要思想^[62]是直接利用 LDPC 码输出软信息更新由环路滤波器输出的错误信号,采用的是传统锁相环的工作模式,但是环路错误信息的

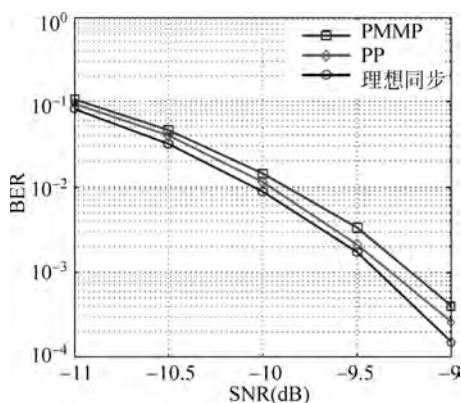


图 3-112 极低信噪比下不同帧结构的 BER 曲线

估计形式来自 EM 算法求解过程。此外,算法沿用了锁相环结构,因此具有了一定的频偏抑制力^[2]。若环路采用一阶环路滤波器,对应 Costas 环为二阶,少量的频率偏移只能产生很小的静止相位偏移;若环路采用二阶环路滤波器,频率偏移也只能引起零稳态相位差,不会对译码结果产生太大影响。

由 3.4.1 节 EM 算法中给出的关于频偏和相偏的对数似然函数为

$$\ln \Lambda(\Delta f, \theta) \propto \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} r_k \eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) e^{-j(\theta+2\pi k \Delta f T)} \right\} \quad (3-226)$$

对于 BPSK 调制系统,后验均值 $\eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)})$ 计算公式为

$$\eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) = \tanh(L_k^{(l)})$$

对于 QPSK 调制系统,有

$$\eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) = \tanh\left(\frac{L_{k,i}^{(l)}}{2}\right) + j \tanh\left(\frac{L_{k,q}^{(l)}}{2}\right)$$

其中, $L_k^{(l)}$ 表示第 k 个符号的第 l 次迭代的后验对数似然比, $L_{k,i}^{(l)}$ 、 $L_{k,q}^{(l)}$ 分别对于同相分量和正交分量。

根据最大似然估计准则,为实现载波频偏和相位估计需要求(3-226)最大值,对其进行求导并去掉与参数无关项得到

$$\frac{\partial \ln \Lambda(\Delta f, \theta)}{\partial \theta} = \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} r_k \eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) e^{-j(\theta+2\pi k \Delta f T)} \right\}$$

则对应每个码字的误差信号为

$$e_k = \operatorname{Im} \{ r_k \eta_k^*(\mathbf{r}, \mathbf{b}^{(l)}) e^{-j\theta_k} \} \quad (3-227)$$

将误差信号输入环路滤波器,对 NCO 进行校正,算法结构可用图 3-113 表示。

算法迭代过程如下:

(1) 初始化变量。

$$e^{(0)} = 0, \quad \theta_k^{(0)} = 0, \quad y_k^{(0)} = r_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

(2) 求第 1 次迭代误差信号。

$$e_k^{(1)} = \operatorname{Im} \{ y_k^{(1)} \alpha_k^{*(1)} \}$$

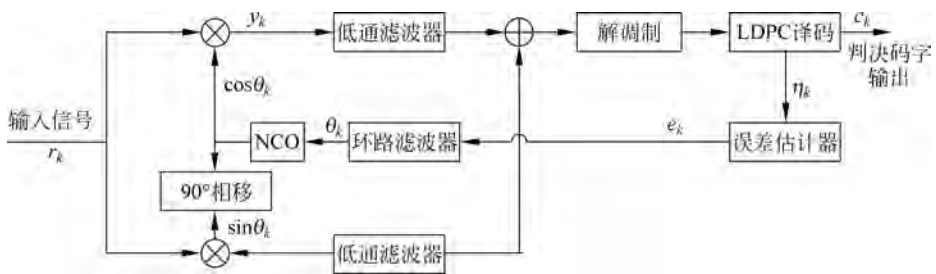


图 3-113 译码辅助迭代载波同步原理框图

(3) 环路滤波采用二阶滤波结构, γ 为迭代步进。

$$\theta_{k+1}^{(l)} = \theta_k^{(l)} + \gamma e_k^{(l)}$$

(4) 滤波输出到 NCO, 输出载波修正量。

$$y_k^{(l)} = r_k^{(l)} \cdot e^{-j\theta_k^{(l)}}$$

(5) 如果达到最大迭代次数 L , 则停止迭代, 输出码字。

文献[62]针对(1024, 3, 6)规则 LDPC 码, 在归一化频偏为 $\Delta fT = 2 \times 10^{-4}$ 、 $E_b/N_0 = 2\text{dB}$ 时, 经过 8 次迭代, 可实现 $\theta \in (-\pi/6, \pi/6)$ 范围内的相偏估计, 误码率达到 10^{-2} 。具体误码率曲线如图 3-114 所示。

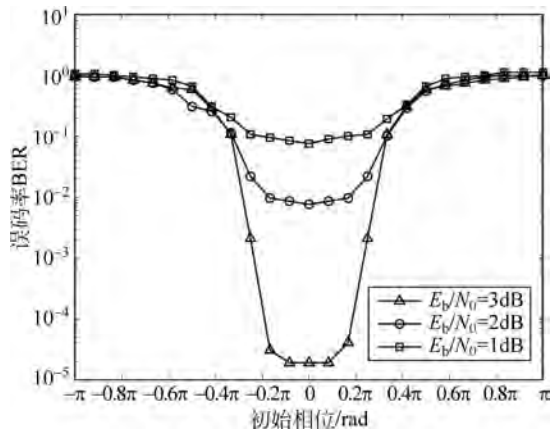


图 3-114 不同初始相位条件下 BER 性能

虽然为克服该算法多普勒动态估计范围较小的问题引入了基于 FFT 的载波频偏粗同步算法, 但是由于该算法相偏估计范围有限, 在实际应用还需增加相偏粗估计算法^[63]。

1) 仿真分析

为了验证 Costas 环联合编码辅助载波频率同步算法的同步性能, 本节将在不同条件下将该算法与基于 EM 算法的编码辅助载波频率同步算法进行对比。

(1) 不同码长和码率。

图 3-115~图 3-118 分别给出了不同码率和码长情况下两种算法的频偏估计性能对比图, 其具体仿真参数如表 3-8 表示^[64], 参考 3GPP RAN 89 会议确立的 5G 标准中 LDPC 的两个基图(Basic Graph, BG)^[65]和扩展因子 Z 的取值范围。每幅图包含了 3 条曲线, 方块标记的实线表示未同步的 LDPC 系统误码性能。菱形标记的虚线表示基于 EM 算法的码辅

助载波频率同步系统误码性能,星号标记的虚线表示基于 Costas 环的码辅助载波频率同步系统误码性能。

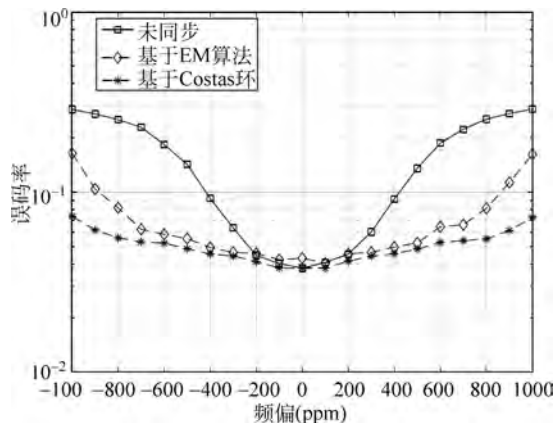


图 3-115 两种算法载波频偏同步性能(BG2 Z6)

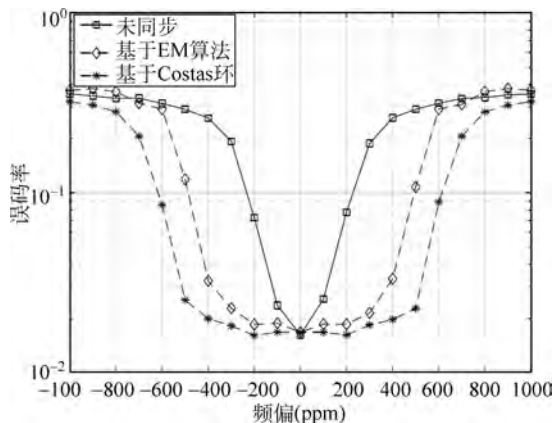


图 3-116 两种算法载波频偏同步性能(BG2 Z12)

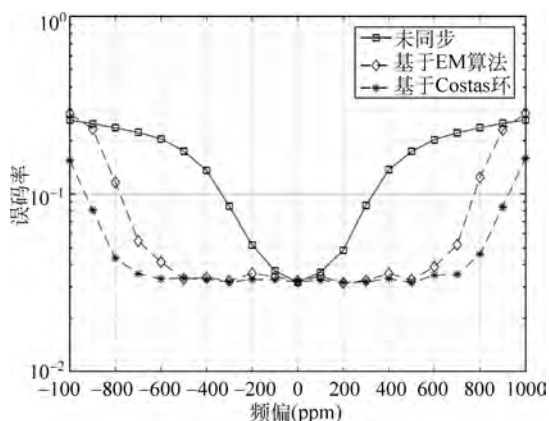


图 3-117 两种算法载波频偏同步性能(BG1 Z6)

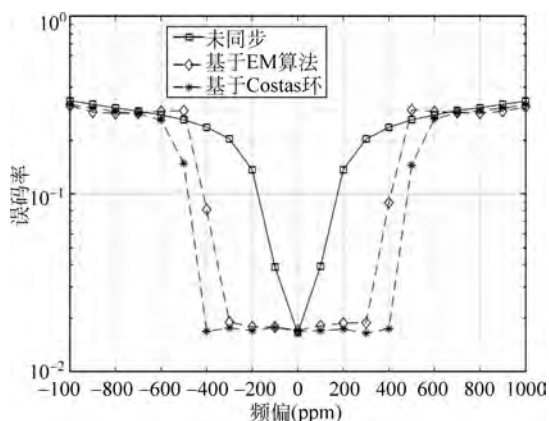


图 3-118 两种算法载波频偏同步性能(BG1 Z12)

表 3-8 两种算法在不同码长和码率情况下的仿真参数

仿真图	图 3-115	图 3-116	图 3-117	图 3-118
基图	2	2	1	1
Z	6	12	6	12
信息位	10Z	10Z	22Z	22Z
码长	50Z	50Z	66Z	66Z
调制方式	BPSK	BPSK	BPSK	BPSK
信道	AWGN	AWGN	AWGN	AWGN
E_b/N_0	1dB	1dB	1dB	1dB

对比图 3-115 和图 3-116 可以看出当码率 1/5 时,基于 Costas 环的码辅助载波频率同步的误码率曲线低于基于 EM 算法的码辅助载波频率同步的误码曲线,且平坦的范围更

宽。这说明基于 Costas 环的载波频率同步相比于基于 EM 算法的载波频率同步具有更大的同步范围和更好的同步性能。

对比图 3-117 与图 3-118 可以看出,当码率为 1/3 时,两种算法的误码曲线基本重合,但是基于 Costas 环的码辅助载波频率同步的平坦的范围明显宽于基于 EM 算法的码辅助载波频率同步的曲线平坦范围。这说明基于 Costas 环的码辅助载波频率同步相比于基于 EM 算法的码辅助载波频率同步算法,其同步范围更大,但是在同步范围内两种算法的 BER 性能差别不大。

(2) 不同频偏。

本节分别讨论在高斯信道环境下加入初始相偏后两种载波同步算法在不同频偏下的 BER 性能。图 3-119~图 3-121 中均包含 4 条曲线,分别表示未同步的 LDPC 系统、基于 EM 算法的码辅助载波同步系统、基于 Costas 环的码辅助载波同步系统和理想同步的 BER 性能。其具体仿真参数如表 3-9 所示。

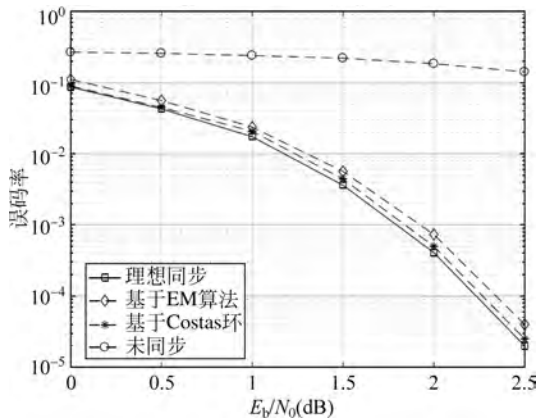


图 3-119 两种算法载波频偏同步性能
(频偏 200ppm)

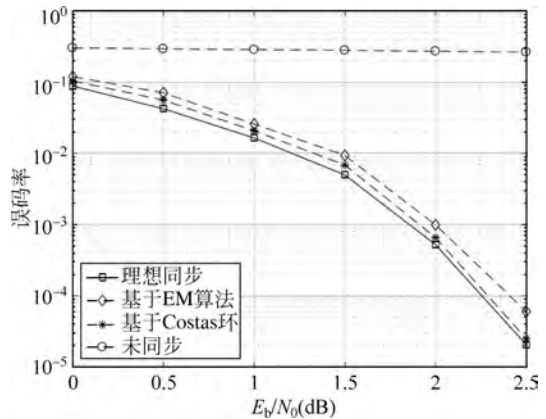


图 3-120 两种算法载波频偏同步性能
(频偏 300ppm)

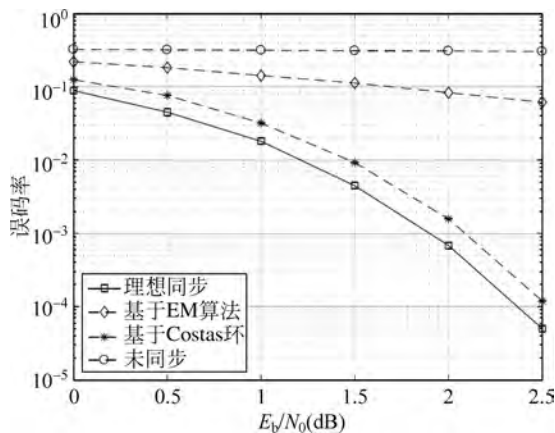


图 3-121 两种算法载波频偏同步性能(频偏 400ppm)

表 3-9 两种算法在不同频偏情况下的仿真参数(1ppm=1×10⁻⁶Hz)

仿真图	图 3-119	图 3-120	图 3-121
基图	2	2	2
Z	12	12	12
信息位	10Z	10Z	10Z
码长	50Z	50Z	50Z
调制方式	BPSK	BPSK	BPSK
信道	AWGN	AWGN	AWGN
频偏	200ppm	300ppm	400ppm
初始相偏	20°	20°	20°

对比图 3-119、图 3-120 与图 3-121 可以看出,基于 Costas 环的码辅助载波同步算法的误码率曲线均低于基于 EM 算法的码辅助载波同步算法的误码曲线,且更加接近理想同步的系统误码性能曲线。尤其当频偏较大超出基于 EM 算法的码辅助载波频率同步算法的频率同步范围时,其性能接近未同步系统,而基于 Costas 环的码辅助载波同步算法依旧具有较好的同步性能。

参考文献

- [1] 崔涌祺. 低轨卫星高动态通信链路同步技术研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2015.
- [2] Mengali U, D'Andrea A N. Synchronization techniques for digital receivers[M]. Springer Science & Business Media, 1997.
- [3] 谢玲. 高动态下微弱扩频信号载波同步技术研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2013.
- [4] 王伟伟. 卫星通信中低信噪比高动态下载波同步研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2010.
- [5] Rife D C, Boorstyn R R. Multiple tone parameter estimation from discrete time observation[J]. Bell Labs Technical Journal, 2003, 20(5): 591-598.
- [6] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of mathematical functions[M]. New York: Dover Publications, 1970.
- [7] Cowley W G. Phase and frequency estimation for PSK packets: bounds and algorithm[J]. IEEE Transactions on Communications, 1996, 44(1): 26-28.
- [8] Rice F, Cowley B, Moran B, et al. Cramer-Rao lower bounds for QAM phase and frequency estimation [J]. IEEE Transactions on Communications, 2001, 49(9): 1582-1591.
- [9] Zhuang W H, Tranquilla J. Modeling and analysis for the GPS pseudo-range observable[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1995, 31(2): 739-751.
- [10] D'Andrea A N, Mengali U. Noise performance of two frequency-error detectors derived from maximum likelihood estimation methods[J]. IEEE Transactions on Communications, 1994, 42(2): 793-802.
- [11] 祝利轻. 基于离散匹配傅里叶变换的高动态载波捕获技术改进[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2010.
- [12] Luis B A. The fractional Fourier transform and time-frequency representations[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1994, 42(11): 3084-309.
- [13] 齐林, 陶然, 周思永等. 基于分数阶 Fourier 变换的多分量 LFM 信号的检测和参数估计[J]. 中国科学 E 辑, 2003, 33(8): 749-759.
- [14] 黄可骥. 时频分析方法在阵列信号处理中的应用[D]. 成都: 电子科技大学, 2006.

- [15] 张贤达. 现代信号处理[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.
- [16] Peleg S, Porat B. Linear FM signal parameter estimation from discrete-time observations[J]. IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems, 1991, 27(4): 607-616.
- [17] 刘渝. 快速解线性调频技术[J]. 数据采集与处理, 1999, 14(2): 175-178.
- [18] 孙锦华, 刘鹏, 吴小钧. 联合旋转平均周期图和解调软信息的载波同步方法[J]. 电子与信息学报, 2013, 35(9): 2200-2205.
- [19] 龚超, 张邦宁, 郭道省. 基于 FFT 的快速高精度载波参数联合估计算法[J]. 电子学报, 2010, 38(4): 766-770.
- [20] Jane V K, Collins W L, Davis D C. High-accuracy analog measurements via interpolated FFT[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1979, 28(2): 113-122.
- [21] 李侠. 短突发通信系统中载波频偏估计方法的研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2017.
- [22] Mengali U, Morelli M. Data-aided frequency estimation for burst digital transmission[J]. IEEE Transactions on Communications, 1997, 45(1): 23-25.
- [23] Djuric P, Vemula M, Bugallo M. Target tracking by particle filtering in binary sensor networks[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(6): 2229-2238.
- [24] 向洋. 高动态 GPS 载波跟踪技术研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2010.
- [25] Polak D, Gupta S. Quasi-optimum digital phase-locked loops[J]. IEEE Transactions on Communications, 1973, COM-21: 75-82.
- [26] 张建军. 卫星通信系统中的同步及解调技术研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2013.
- [27] Fitz M P. Further results in the fast estimation of a single frequency[J]. IEEE Transactions on Communications, 1994, Com-42: 862-864.
- [28] Luise M, Reggiannini R. Carrier frequency recovery in all digital modems for burst-mode transmissions[J]. IEEE Transactions on Communications, 1995, 43(2/3/4): 1169-1178.
- [29] Rinaldo R, Gaudenzi D R. Capacity analysis and system optimization for the reverse link of multi-beam satellite broadband systems exploiting adaptive coding and modulation[J]. International Journal of Satellite Communications and Networking, 2004, 22(4): 425-448.
- [30] 武楠. 多模式卫星接收机中的同步技术研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2013.
- [31] Mitola J. The software radio architecture[J]. IEEE Communications Magazine, 1995, 33(5): 26-38.
- [32] Ying Y Q, Mounir G. Optimal pilot placement for frequency offset estimation and data detection in burst transmission systems[J]. IEEE Communications Letters, 2005, 9(6): 549-551.
- [33] Godtman S, Hadaschik N, Steinert W, et al. A concept for data-aided carrier frequency estimation at low signal-to-noise ratios[C]. Beijing: IEEE International Conference on Communications, 19-23 May 2008: 463-467.
- [34] 晏辉, 唐发建, 张忠培. 一种基于低码率 LDPC 码的编码与导频联合辅助载波同步算法[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(2): 470-474.
- [35] Gardner F M. Phase lock techniques[M]. New York: Wiley, 1979.
- [36] 李式巨, 姚庆栋, 赵民建. 数字无线传输[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2007.
- [37] 陈豪. 卫星通信与数字信号处理[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2011.
- [38] 王兰芳. 基于 FLL 和 PLL 的载波跟踪技术研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2009.
- [39] 张力川. 干扰条件下的卫星通信同步技术与实现[D]. 成都: 电子科技大学, 2016.
- [40] Viterbi A J, Viterbi A M. Nonlinear estimation of a PSK-modulated carrier. IEEE Transactions on Communications, 1983, 29(7): 543-551.
- [41] Rife D C, Boorstyn R R. Single tone parameter estimation from discrete-time observations[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1974, 20(9): 591-598.
- [42] Ghogho M, Nandi A K, Swami A. Cramer-Rao Bounds and maximum likelihood estimation for

- random amplitude phase-modulated signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, 47(11): 2905-2916.
- [43] Moeneclaey M, Jonghe G D. ML-oriented NDA carrier synchronization for general rotationally symmetric signal constellations[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 1994, 42(8): 2531-2533.
- [44] Franks L E. *Synchronization Subsystems: Analysis and Design*[M]. Englewood Cliff: Prentice Hall, 1983.
- [45] Gardner F M. Equivocation as a cause of PLL hangup[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 1982, 30(10): 2242-2243.
- [46] Jesupret T, Moeneclaey M, Ascheid G. Digital demodulator synchronization[J]. Final report ESTEC contract nr. 8437/89/NL/RE, June 1991.
- [47] Gaudenzi R D, Garde T, Vanghi, V. Performance analysis of decision-directed maximum-likelihood phase estimators for M-PSK modulated signals[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 1995, 43(12): 3090-3100.
- [48] Simon M. Optimum receiver structures for phase-multiplexed modulations[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 1978, 26(6): 865-872.
- [49] Lottici V, Luise M. Embedding carrier phase recovery into iterative decoding of turbo-coded linear modulations[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2004, 52(4): 661-669.
- [50] Charles F J, Lindsey W C. Some analytical and experimental phase-locked loop results for low signal-to-noise ratios[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1966, 54(9): 1152-1166.
- [51] Simon M K, Vilnrotter V A. Iterative information-reduced carrier synchronization using decision feedback for low SNR applications[J]. *Telecommunications & Data Acquisition Progress Report*, 1997, 130: 42-130.
- [52] 徐俊辉. 编码辅助载波同步算法研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2010.
- [53] Wu C F J. On the convergence properties of the EM algorithm[J]. *Annals of Statistics*, 1982, 11(1): 95-103.
- [54] 唐发建. 极低信噪比下编码辅助迭代同步方法[D]. 成都: 电子科技大学, 2011.
- [55] Kim P, Choi K, Song Y J, et al. Joint carrier recovery and Turbo decoding method for TDMA burst MODEM under very low SNRs[C]. Melbourne: IEEE Vehicular Technology Conference, Spring, 2006: 2198-2200.
- [56] Fu H Y, Sun S M, Yen K, et al. Low-complexity iterative carrier synchronization for short packet Turbo receiver[C]. Las Vegas: IEEE Wireless Communications and Networking Conference 2008, 2008: 1205-1210.
- [57] 晏辉, 唐发建, 张忠培. 一种低复杂度编码辅助载波同步算法[J]. *电子与信息学报*, 2010, 32(12): 2959-2963.
- [58] Herzet C, Ramon V, Vandendorpe L. A theoretical framework for iterative synchronization based on the sum-product and the expectation-maximization algorithms[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(5): 1644-1658.
- [59] Herzet C, Noels N, Lottici V, et al. Code-aided Turbo synchronization[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(6): 1255-1271.
- [60] 李茂沛, 周廷显. 改进 Costas 环的 LDPC 码相位同步算法[J]. *哈尔滨: 哈尔滨工业大学学报*, 2007, 39(11): 1764-1766.
- [61] 包建荣, 詹亚锋, 陆建华. 基于 LDPC 译码软信息的迭代载波恢复[J]. *电子与信息学报*, 2009, 31(10): 2416-2420.
- [62] 赵瑾. 基于 LDPC 码辅助的同步技术研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2020.
- [63] 3GPP TSG RAN WG1. Final minutes report RAN1 89 v100[R]. Athens, Greece: 3GPP, 2017.