



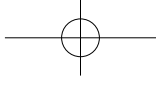
# 中学数学教学设计

吴立宝 主编 张生春 郭 衍 副主编

Instructional Design on  
Math in Middle School

清华大学出版社

北京



## 内 容 简 介

本书突出理论性与实用性相结合的特点,把中学数学教学设计的最新理论成果和实践应用融入书中。本书在中学数学教学设计概述的基础上,从微观、中观与宏观三个视角介绍了中学数学教学设计要素、中学数学微课教学设计、不同课型的中学数学教学设计、中学数学单元教学设计、中学数学专题复习课教学设计等内容。

本书可作为普通高等师范院校数学课程与教学论专业的硕士和学科教学(数学)教育硕士,以及数学与应用数学(师范类)专业的本科生的教材或参考书,也可供中学数学教师、数学教学研究专业人员参考,还可作为中学数学教师的培训教材或研修读本。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。举报:010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

### 图书在版编目(CIP)数据

中学数学教学设计 / 吴立宝主编. —北京:清华大学出版社, 2021.8

ISBN 978-7-302-58612-8

I. ①中… II. ①吴… III. ①中学数学课—教学设计 IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 138024 号

责任编辑:施 猛

封面设计:常雪影

版式设计:孔祥峰

责任校对:马遥遥

责任印制:沈 露

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质 量 反 馈:010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

印 装 者:天津安泰印刷有限公司

经 销:全国新华书店

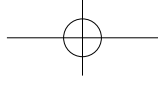
开 本:185mm×260mm 印 张:13.75 字 数:293千字

版 次:2021年9月第1版 印 次:2021年9月第1次印刷

定 价:49.00元

---

产品编号:090449-01



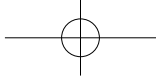
## 序言

凡事预则立，不预则废。教学旨在培养适应个体发展与未来社会发展需要的全面发展的人，是有目的、有计划的活动。教师要实施有效的教学活动，就必须进行统筹计划与安排，这就是教学设计。数学教学设计可以有多种方式，发展到一定阶段有可能演变成“模式”。课堂教学有法，但无定法，贵在得法，同样教学设计有模，但无定模。在进行教学设计时，教师不能唯“模式”是从，更不能唯“单一模式”是从，应该根据授课的内容、对象与课型，选择恰当的教学设计，为成功的课堂教学的实施做好准备。这是教学工作重要组成部分，也是教师教学专业实践能力的体现。

教师的专业能力需要不断提升与革新。教师既要契合社会的审变求新，也要与学生一同成长。随着智能时代的来临，在追溯数学教学设计理论的演化历程中，教师需要深刻认识中学数学教学设计存在的误区、盲点与疑难点，培养对“问题情境”的创设与把握能力，要悟透优秀的一线数学教学实践案例，才能系统地将理论与实践结合起来。为提升职前师范生与一线教师数学教学设计能力提供帮助是本书编写的目的所在。

针对职初教师、数学与应用数学专业师范生的实际需求，本书从微观、中观、宏观三个层面来系统分析、介绍中学数学教学设计的基本原理。微观层面，本书结合数学学科特点和学生学情，综合分析共同要素与随着时代变化而衍生出的新要素，提出一般数学教学设计的几大要素：数学教学内容分析、数学学情分析、数学教学目标设计、数学教学方法选择、数学教学过程设计、数学教学媒体选择、数学课堂检测设计等，并在此基础上阐述了微课教学设计，其部分观点可谓精思而得。中观层面，教学设计是对某一节课的内容进行系统的设计，本书分门别类地探讨了不同课型(如新授课、习题课、复习课等)的教学设计，课型各异，要素呈现与处理方式自然也各有特点，读者可结合相关案例加以思考、总结、规范、创新。宏观层面，数学教学设计是介于课时与课程之间对具有内在关联的知识进行系统的设计，如单元教学设计与专题复习教学设计。本书提出的数学教学设计的要素涵盖范围与传统教学设计差别很大，其设计思路与模型有待读者揣摩与检验。

微课教学设计与课时教学设计都是完成单元教学设计与专题复习教学设计的基础，只有每一个课时的教学设计是有条理的、满足实际需要的，才能使单元与整体的教学设



## II | 中学数学教学设计

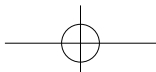
计目标得以实现。本书精选全国各地名优教师的教学设计案例，以理论与实践相结合的方式，遵循微观—中观—宏观的编排顺序，突破传统的一课一课的教学设计模式，用系统论的方法对教材中“具有某种内在关联性”的内容进行分析、重组、整合，使教师既不必拘泥于某一课时的内容而缺乏对整体的把握，又不必面对宏观整体设计下庞大的知识体系而对教学内容的安排无从下手。与以往常见的中学数学教学设计书籍相比，本书有一定的创新，更加契合中学数学课堂教学实际。教师只有掌握知识的“生长点”与“延伸点”，通晓知识结构体系，从系统论的高度去设计微课或单元教学，课程才能更有实效。本书既有教学设计案例，又有反思评析，理论与实践完美结合，更具操作性。如此编排，意在为大家呈现从局部到整体的数学教学设计模式，以帮助读者更好地理解新课程改革对数学教学设计专业素养的客观要求。

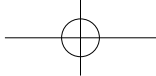
本书由天津师范大学吴立宝教授任主编、河北师范大学张生春教授与北京师范大学郭衍副教授任副主编，作者又邀请了华东师范大学出版社培训部主任刘祖希、北京市海淀区教师进修学校刘忠新、重庆市教育科学研究院张晓斌、天津市教育科学研究院刘金英四位老师审阅，这四位老师具有丰富的中学数学教育教学与研究实践经验。经过老师们的合力打造，本书既有理论高度，又能落地实践，值得一读。

我相信本书一定会成为一本很好的教材或参考书，对于普通高等师范院校数学课程与教学论专业的硕士、学科教学(数学)教育硕士、数学与应用数学(师范类)专业的本科生以及中学数学教师、数学教学研究专业人员一定大有帮助。

北京师范大学特聘教授、博士生导师  
义务教育数学课程标准修订组组长

2021年2月20日





## 前言

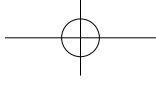
依风从业数十载，一寄信邮为启航。2020年6月24日，恍如昨日，那天，一封来自清华大学出版社施猛老师的邮件“吴老师您好！我是清华大学出版社编辑，我想策划出版《中学数学教学设计》教材，您愿意编写此书吗？”开启了我们的合作之旅。构思书稿框架，编写样章，出版社选题论证并签订正式出版合同，编写前奏于两个月之内全部完成。正式收到出版合同与收到孩子北京大学录取通知书仅相差两天，可谓双喜临门。

联系业内挚友，组建团队。与清华大学出版社签订正式出版合同后，邀请河北师范大学张生春教授、北京师范大学郭衍副教授共同编写此书。两位欣然受邀，并全力配合，组成了教材核心编写团队，在数学教育领域彰显了“京津冀协同发展”的“国家战略”。我们一起商定教材编写内容，细化书稿目录，分工编写，交叉审校。

时耗四季有三，终成定稿。待书稿初成，已过深冬，跨越了辛丑年农历小年。历时七个多月，我们把对中学数学教学设计的所思、所感、所悟形成文字，与师范院校师生、各类教育工作者交流，助力课堂教学实践与研究。

邀请四地名家，审校保质。在稿子编撰与修订过程中，邀请了华东师范大学出版社刘祖希、北京市海淀区教师进修学校刘忠新、重庆市教育科学研究院张晓斌、天津市教育科学研究院刘金英四位老师审阅。四位名家在本地乃至全国皆有影响力，为书稿质量提供保障。

众所周知，当前市面上有关“中学数学教学设计”的书籍林林总总，各有千秋。本书在学深思明的基础上，阐述数学教学设计理论，并佐以大量典型案例，力求将理论与实践结合起来，使得本书既有理论性，也有实操性。在保留教学设计基本规律的基础上，本书融入时代特色并做出一定创新。初步达成编写意向之时，编者就有设想：分解教学设计的要素，把微课设计与单元教学设计融入进来。在此设想下，编者构思了要素分析、微课设计、不同类型课时教学设计、单元教学设计与专题复习教学设计的大致构架。各章具体内容如下：第一章，概述中学数学教学设计，便于读者整体把握教学设计的核心；第二章，分析数学教学设计的要素：数学教学内容分析、数学学情分析、数学教学目标设计、数学教学方法选择、数学教学过程设计、数学教学媒体选择、数学课堂检测设计；第三章，介绍当下适用面较广的微课设计；第四章，阐述不同类型的课时教



#### IV | 中学数学教学设计

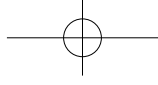
学设计,如新授课(概念课、命题课)、习题课、复习课、活动课、问题解决课、试卷讲评课;第五章,分析基于深度学习下的中学数学单元教学设计;第六章,介绍适用于毕业班的中学数学专题复习课教学设计。要素分解,便于微观把握教学设计;要素组合,利于形成教学设计结构,由此形成了微课教学设计、课时教学设计与单元教学设计。这样设计能够更切合高校数学师范生的学习需要和中学数学教师的教学需要,特别是纳入微课、试卷讲评课、专题复习课的教学设计,既有利于教师宏观理解把握,又有利于教师微观精细设计。

全书由吴立宝提出整体设想,编写团队在反复研讨、调研的基础上搭建好框架,分工协作完成。具体分工如下:第一章由吴立宝、高佳琪编写;第二章由吴立宝、巩雅楠、张宇静、刘琦琦、孔颖编写;第三章由吴立宝、宋书宁编写;第四章由郭衍、夏马成编写;第五章由吴立宝、王雨清编写;第六章由张生春编写。此外我的弟子洪梦、李茹茜、江文等均参与了本书的修改、完善。最后将成稿提交华东师范大学出版社刘祖希、北京市海淀区教师进修学校刘忠新、重庆市教育科学研究院张晓斌、天津市教育科学研究院刘金英四位老师审阅。四位专家给予细致修订,提质增色。

饮水思源,感恩之情相伴。首先,感谢我的导师北京师范大学曹一鸣教授,在向导师汇报我有出版和编写《中学数学教学设计》一书的意向时,他欣然答应作序。从本人北上求学到留津工作,乃至后面专业发展,导师都给予我各方面的关心与指导,这也是向导师的一次阶段汇报。其次,感谢河北师范大学张生春教授、北京师范大学郭衍副教授,当我发起邀约,二位各自组建撰写团队,鼎力支持。再次,感谢我的弟子们,为收集资料、分析资料、修改打磨付出了巨大心血,如高佳琪、巩雅楠、宋书宁、王雨清、张宇静、刘琦琦、李静、孔颖等。接着,感谢提供案例的全国名师、骨干教师们,如江苏省常州市张志勇老师、浙江省杭州市易良斌老师等。在编写过程中,我们引用了大量的相关资料与案例,虽然努力注明出处和来源,但遗漏之处,恐难以避免,向各位作者表示衷心感谢。最后,感谢清华大学出版社施猛老师的关心和辛劳付出。我们虽未谋面,只是通过两三封邮件建立联系,签订出版合同,但后续因为编写过程中的种种事宜时常叨扰,均及时收到细致回复,施老师的工作效率之高,令我钦佩。记住并感恩每一个给予我关心、鼓舞、帮助和指导的人!人生的旅途很长,我们并不是孤影单行,而是师长、领导、朋友与弟子们一路并肩。

希望本书能对数学教学有所贡献,能激发读者更深刻的思考。由于水平有限,书中不当之处在所难免,敬请广大读者批评、指正。反馈邮箱: [wkservice@vip.163.com](mailto:wkservice@vip.163.com)。

天津师范大学吴立宝  
2021年2月4日



# 目录

<b>第一章 中学数学教学设计概述</b> .....	1
第一节 数学教学设计概念 .....	1
一、设计与教学设计 .....	1
二、数学教学设计 .....	4
三、数学教学设计与数学学习设计的联系与区别 .....	5
四、数学教学设计的特点 .....	6
第二节 数学教学设计的理论基础 .....	8
一、传播理论 .....	9
二、教学理论 .....	10
三、系统理论 .....	10
四、学习理论 .....	11
第三节 教学设计模式 .....	15
一、传统教学设计模式 .....	16
二、现代教学设计模式 .....	20
三、数学教学设计模式 .....	24
<b>第二章 中学数学教学设计的要素</b> .....	26
第一节 数学教学内容分析 .....	28
一、数学教学内容分析的主要内容 .....	29
二、数学教学内容分析的基本要求 .....	30
三、数学教学内容分析存在的问题及改进策略 .....	31
四、教学内容分析的案例 .....	33
第二节 数学学情分析 .....	38
一、学情分析的内容 .....	38



## VI | 中学数学教学设计

二、学情分析的方法	40
三、学情分析的案例	42
第三节 数学教学目标设计	43
一、教学目标的内涵与分类	43
二、教学目标的制定依据	44
三、教学目标表述存在的问题与改进策略	44
四、教学目标设计的案例	46
第四节 数学教学方法选择	48
一、数学教学方法选择的意义	48
二、数学教学方法的选择原则	49
三、教学方法选择的案例	50
第五节 数学教学过程设计	52
一、教学过程的含义与类型	52
二、教学过程的设计内容	52
三、教学过程设计的案例	53
第六节 数学教学媒体选择	63
一、教学媒体的含义与分类	63
二、现代教学媒体在数学教学中的作用	64
三、教学媒体的选择策略	64
四、教学媒体选择的案例	67
第七节 数学课堂检测设计	68
一、课堂检测设计的方式与要求	68
二、课堂检测设计的原则	69
三、课堂检测设计的案例	70

## 第三章 中学数学微课教学设计 71

第一节 中学数学微课概述	71
一、微课产生的背景和概念界定	71
二、微课与常规课的比较	72
三、中学数学微课的应用	73
四、微课设计的基本流程	74
五、中学数学微课教学设计的要点	76
六、如何让你的微课出彩	82
第二节 中学数学微课教学设计案例	83

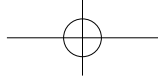


<b>第四章 不同课型的中学数学教学设计</b> .....	93
<b>第一节 中学数学新授课教学设计</b> .....	93
一、新授课概述 .....	93
二、新授课设计的要素提示 .....	96
三、教学设计案例 .....	97
<b>第二节 中学数学习题课教学设计</b> .....	105
一、习题课概述 .....	105
二、习题课设计的要素提示 .....	106
三、教学设计案例 .....	107
<b>第三节 中学数学复习课教学设计</b> .....	110
一、复习课概述 .....	110
二、复习课设计的要素提示 .....	111
三、教学设计案例 .....	112
<b>第四节 中学数学活动课教学设计</b> .....	116
一、活动课概述 .....	116
二、活动课设计的要素提示 .....	117
三、教学设计案例 .....	118
<b>第五节 中学数学问题解决课教学设计</b> .....	123
一、问题解决课概述 .....	123
二、问题解决课设计的要素提示 .....	125
三、教学设计案例 .....	127
<b>第六节 中学数学试卷讲评课教学设计</b> .....	134
一、试卷讲评课概述 .....	134
二、试卷讲评课设计的要素提示 .....	135
三、教学设计案例 .....	137
<b>第五章 中学数学单元教学设计</b> .....	147
<b>第一节 数学单元教学设计概述</b> .....	147
一、开展数学单元教学设计的必要性 .....	147
二、数学单元教学设计的内涵 .....	149
三、数学单元教学的相关概念 .....	151
<b>第二节 数学单元教学设计流程</b> .....	153
一、主题规划 .....	154

二、要素分析 .....	154
三、目标定位 .....	156
四、活动设计 .....	158
五、教学预设 .....	159
六、评价反思 .....	161
第三节 数学单元教学设计案例 .....	164

**第六章 中学数学专题复习课教学设计 .....** 189

第一节 中学数学专题复习课教学设计概述 .....	189
一、专题复习课教学要求 .....	190
二、专题复习课教学设计流程 .....	191
三、专题复习课教学设计的策略 .....	196
第二节 中学数学专题复习课教学设计案例 .....	204



# 第一章 中学数学教学设计概述

## ① 第一节 数学教学设计概念

### 一、设计与教学设计

#### (一) 设计

《现代汉语词典》中，“设计”指在正式做某项工作之前，根据一定的目的要求，预先制定方法、图样等，近义词有计划、设想、安排<sup>[1]</sup>。由此可以看出，设计是通过合理的计划，立足现实的设想、周密的安排，对即将要开始的工程进行充分的准备，以使其朝着我们预先期望的方向发展的过程。2011年，设计学演变成高校艺术学领域的一个重要分支，寄希望培养出既有扎实技术又有艺术创新的人才。可见，设计不再停留在程序的、工序的层次，增加了创意的元素，在诸多领域应用，如商业设计、游戏设计、实验设计、建筑设计等。教育作为培养人道德品质、文化学识、多重技能等的根本途径，同样存在设计——教学设计等。

#### (二) 教学设计

“工欲善其事，必先利其器。”要想成就一堂扎实、充实、丰实、平实、真实的好课，就需要教师提前准备一份高质量的教学设计，以指导课堂教学。20世纪60年代，教学设计在美国兴起。在传播理论、教学理论、系统理论、学习理论四大理论的支持下，教学设计不断发展完善，逐渐成为教育领域不可或缺的一部分。近年来，我国对教学设

[1] 中国社会科学院语言研究所词典编辑室. 现代汉语词典[Z]. 7版. 北京: 商务印书馆, 2014: 1153.

计的研究不断成熟,并取得丰硕成果。正是由于教学设计研究的与时俱进,我国课堂教学的计划性、科学性、有效性才能不断提高。

教学设计也称教学系统设计,是研究教学系统、教学过程,制订教学计划的系统方法<sup>[1]</sup>。教学设计的产生经过了漫长的发展过程,1962年,格拉泽率先提出“教学系统”概念,并对教学系统进行设计。之后,在各种学习理论不断演进中,这个过程逐步演变为“教学设计”一词,并且最终成为一门独立的学科体系。半个多世纪以来,教学设计仍没有一个既定的概念,不同的学者研究的侧重点各有不同,由此给出的教学设计概念也是层出不穷。

国外对教学设计的要早于国内,首位将教学设计作为一门独立的学科进行研究的学者是加涅,他指出:“教学设计是一个系统化规划教学系统的过程。教学系统本身是对资源和程序做出有利于学习的安排。”<sup>[2]</sup>同样以系统化过程定义教学设计的还有肯普,以及史密斯、雷根。肯普指出:“教学系统设计是运用系统方法分析研究教学过程相互联系的各部分的问题和需求,确立解决它们的方法、步骤,然后评价教学成果的系统计划过程。”<sup>[3]</sup>史密斯、雷根表示:“教学设计就是把学习和教学原理转化成对于教学材料、活动、信息资源和评价的规划这一系统的、反思性的过程。”<sup>[4]</sup>瑞格卢斯将教学系统设计看作“教学科学”,认为:“教学设计是一门涉及理解与改进教学过程的学科。任何设计活动的宗旨都是提出达到预期目的最优途径,因此,教学设计主要是关于提出最优教学方法之处方的一门学科,这些最优的教学方法能使学生的知识和技能发生预期的变化。”<sup>[5]</sup>“第二代教学设计之父”梅瑞尔认为:“教学是一门科学,教学设计是建立在这一基础上的技术。”<sup>[6]</sup>同时,他认为:“教学设计将更多地关注于如何为改进学习而做出自己的贡献,以及如何更好地指导教学设计的过程。”<sup>[7]</sup>帕顿称:“教学设计是设计科学大家庭的一员,设计科学各成员的共同特征是用科学原理及应用来满足人的需要,因此,教学设计是对学业业绩问题的解决措施进行策划的过程。”<sup>[8]</sup>韦斯特等学者则是从认知科学的角度去探讨教学设计,认为教学是以系统的方式去传授知识,是关于技术程序纲要或指南的实施,也指教师的行动、实践或职业活动;而设计

[1] 顾明远. 教育大辞典[M]. 上海: 上海教育出版社, 1998: 718.

[2] 加涅. 教学设计原理[M]. 皮连生, 庞维国, 译. 5版. 上海: 华东师范大学出版社, 2007: 4-19.

[3] KEMP J E. The Basics of Instructional Design[J]. Journal of Continuing Education In nursing, 1992, 23(6): 282-284.

[4] 史密斯, 雷根. 教学设计[M]. 庞维国, 译. 上海: 华东师范大学出版社, 2008: 4.

[5] CHARLES R. Instructional Design: What Is It and Why Is It, Instructional Design Theories and Model: An Overview of Their Current Status[M]. Hillsdale, NJ: Lawraence Erlbraum Aassiates. 1983: 23-50.

[6] MERRILL O. First Principles of Instruction [J]. Educational Technology Research and Development, 2002, 50(3): 43-59.

[7] 梁林梅, 李晓华. 美国教学设计的过去、现在与未来: 访“第二代教学设计之父”戴维·梅瑞尔博士[J]. 中国电化教育, 2009(8): 1-7.

[8] 何克抗, 郑永柏, 谢幼如. 教学系统设计[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2002: 53-61.

的意思是计划或布局，是指用某种媒介形成某件事情的结构方式<sup>[1]</sup>。

我国教学设计引入的标志是1987年《外语电化教学》杂志刊登了第一篇有关教学设计文章，从此教育界开始将目光转移到教学设计的研究上。1994年，由乌美娜编写的《教学设计》指出：“教学设计是运用系统方法分析教学问题和确定教学目标，建立解决教学问题的策略方案、试行解决方案、评价试行结果和对方案进行修改的过程。它以优化教学效果为目的，以学习理论、教学理论和传播学为理论基础。”<sup>[2]</sup>1998年，冯学斌等将教学设计定义为：“运用教学技术分析教学问题，确定解决方法和途径，然后评价教学结果的系统计划过程。”<sup>[3]</sup>张筱兰则认为：“教学设计是以教学过程为研究对象，用系统方法分析和研究教学需要，设计解决教学问题的方法和步骤，并对教学效果做出价值判断的计划过程和操作程序。”<sup>[4]</sup>鲍荣提出：“教学设计是一种旨在促进教学活动程序化、精确化和合理化的现代教学技术。”<sup>[5]</sup>盛群力等将系统教学设计比作教学理论与教学实践联系的“桥梁科学”，强调其不在于采用一种新的教学方法，旨在通过精心创设的教学系统为学习者提供最有利的教学条件，用以解决教学问题，完成教学任务<sup>[6]</sup>。安嘉翔等从广义与狭义两个角度去理解教学设计，认为：“广义的教学设计指的是包括课程总体设计规划以及具体各门课程设计在内的系统设计，此时我们可以称之为教学系统设计；狭义的教学设计指的是某一门课程或某一段课程或某一项培训的设计。”<sup>[7]</sup>2000年，皮连生指出：“教学设计是面向教学系统，解决教学问题的一种特殊的设计活动。它既有设计的一般性质，又必须遵循教学的基本规律。”<sup>[8]</sup>2002年，何克抗等提出：“教学设计主要是运用系统方法，将学习理论与教学理论的原理转换成对教学目标、教学内容、教学方法和教学策略、教学评价等环节进行具体计划、创设有效的教与学的系统过程或程序。”<sup>[9]</sup>

国内外学者对教学设计的不同阐述，主要是从以下6种角度去理解的：一是从过程的角度研究教学设计，强调其是运用系统的方法或教学技术去分析教学中的问题，确定解决问题的方案，试行策略方案，并对试行的结果进行评价的过程；二是从设计的角度研究教学设计，强调其是对课程和教学中问题进行设计的活动；三是从技术的角度研究教学设计，强调其是促进学生学习活动和教师教学活动顺利有序开展的科学的教学技术；四是从认知科学的角度研究教学设计，强调其是按照计划安排以系统的方式

[1] 李志厚. 国外教学设计研究现状与发展趋势[J]. 国外教育研究, 1998(1): 3-5.

[2] 乌美娜. 教学设计[M]. 北京: 高等教育出版社, 1994: 8-32.

[3] 冯学斌, 万勇. 教学设计的理论基础[J]. 电化教育研究, 1998(1): 3-5.

[4] 张筱兰. 论教学设计[J]. 电化教育研究, 1998(1): 3-5.

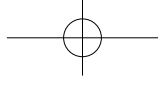
[5] 鲍荣. 教学设计理性及其限制[J]. 教育评论, 1998(3): 32-34.

[6] 盛群力, 刘善存, 俞鸣人, 等. 简论系统教学设计的十大特色[J]. 课程·教材·教法, 1998(5): 3-5.

[7] 安嘉翔, 乔立恭. 教学设计中的几个新概念[J]. 电化教育研究, 1998(6): 3-5.

[8] 皮连生. 教学设计: 心理学的理论与技术[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000: 1.

[9] 何克抗, 郑永柏, 谢幼如. 教学系统设计[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2002: 19.



传授知识；五是从领域划分的角度研究教学设计，将其看作提出最优教学方法的一门学科，并且以最优方法促使学生的知识与技能向预期方向发展；六是从所起作用的角度研究教学设计，将其比作教学理论和教学实践联系的“桥梁科学”，期望通过精心创设的教学系统为学习者提供先完成、再完善、最终完美的教学活动。

## 二、数学教学设计

随着“教学设计”一词在国内教育界的广泛兴起，无数学者把研究重点放在这个新兴事物上，并且在研究过程中逐步将其细化，使其向各个具体学科靠拢。作为数学大国的中国，自教学设计提出后，有关数学教学设计的研究成果便如雨后春笋般涌现。教学设计概念的丰富性同样促成数学教学设计内涵的多样性，近些年不少学者对数学教学设计的定义进行阐述。

奚定华认为：“数学教学设计是以数学学习论、数学教学论等理论为基础，运用系统方法分析数学教学问题，确定数学教学目标，设计解决数学教学问题的策略方案、试行方案、评价试行结果和修改方案的过程。”<sup>[1]</sup>曹一鸣等认为：“数学教学设计是针对数学学科特点、具体的教学内容和学生的实际情况，遵循数学教学与学习的基本理论和基本规律，按照课程标准的要求，运用系统的观点和方法整合课程资源、制定教学活动的基本方案，并对所设计的初步方案进行必要的反思、修改和完善。”<sup>[2]</sup>何小亚在《中学数学教学设计》中指出：“数学教学设计是教师根据学生的认知发展水平和课程培养目标，来制定具体教学目标，选择教学内容，设计教学过程各个环节的过程。”<sup>[3]</sup>孙雪梅指出：“数学教学设计是以数学学习论、数学课程论、数学教学论为理论基础，运用系统方法来分析数学教学问题，确定数学教学目标，设计、解决数学教学问题的策略方案、试行方案、评价试行结果和修改方案的过程。”<sup>[4]</sup>冯国平提出：“数学教学设计是教师以数学教育理论为指导，运用系统方法分析数学教学问题，确定教学目标，建立数学教学方案，并对方案进行评价和修改的过程。”<sup>[5]</sup>翁小勇指出：“数学教学设计就是从数学学科自身特点出发，根据不同的教学内容，用系统的方法对课程资源进行有机整合，对教学过程中相互联系的各个部分做出整体安排的一种构想。”<sup>[6]</sup>虽然学者们对于数学教学设计所给出的定义各不相同，但其本质趋于一致：数学教学设计是以数学学科的教育理论为基础，运用系统方法分析教学目标、方案等，并对方案进行评价、修改的过程。

[1] 奚定华. 数学教学设计[M]. 上海：华东师范大学出版社，2000：1.

[2] 曹一鸣，张生春. 数学教学论[M]. 北京：北京师范大学出版社，2010：86.

[3] 何小亚. 中学数学教学设计[M]. 北京：科学出版社，2012：4-5.

[4] 孙雪梅. 数学教学设计[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014：1-2.

[5] 冯国平. 中学数学教学设计[M]. 成都：西南交通大学出版社，2015：9.

[6] 翁小勇. 中学数学教学技能训练研究[M]. 成都：西南交通大学出版社，2015：32.

数学教学设计可大致分为数学课程教学设计和数学课堂教学设计，本书主要探讨数学课堂教学设计，以提高数学课堂教学有效性。现代社会对教育教育的关注度不断提高，对数学教学设计的研究走向了更加细化的发展阶段，课堂教学设计的类型也向多样化转变，有针对不同课型的教学设计，有针对某个专题、某个单元进行的教学设计，以及随着科学技术的迅猛发展而产生的微课教学设计等。

### 三、数学教学设计与数学学习设计的联系与区别

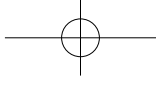
课堂不是教师的一言堂，教学也不只是教师的独角戏，课堂教学需要教师的“教”与学生的“学”互相交融、共同组织完成。进行教学设计虽然是为了使学生在单位时间内获得更多的知识、更高的能力、更好的发展，但是教学设计是教师教学的手段，是教师根据学习内容、学生情况有计划地组织安排教学的活动，强调的还是教师的“教”的活动。

21世纪初，我国基础教育课程改革开展得如火如荼，这次改革重点提出要转变学生的学习方式，自主、合作、探究等充分发挥学生主体地位的学习方式从而被广泛推崇，也衍生出强调学生的“学”的活动设计——学习设计。学习设计以“为学生的学而教”为基础，以学习目标为指南，在考虑学生学习水平的情况下，专门为学生制订学习计划、设计学习方法，最终完成学习任务。

从教学实践的角度，可以将数学学习设计界定为：数学学习设计是为有效开展数学学习活动，在遵循数学学习活动的基本规律的前提下，对学习目标、内容、过程，学法指导，学习评价等要素进行系统规划，制定学习者主动有效地参与数学学习活动的方案，并将学习活动中生成的学习资源有机纳入其中的过程<sup>[1]</sup>。数学学习设计就是以数学学科的学习理论为基础，运用系统的方法去分析学习对象、学习需求、学习目标、学习媒体、学习方式、学习评价等学习要素，根据分析结果制订学习活动方案，并对方案进行不断调整修改的过程。数学学习设计与数学教学设计作为教师顺利完成教育教学的有效手段，两者自然存在联系与区别。

首先谈一下两者的联系：学习设计属于教学设计的范畴。数学教学设计解释了“教什么”“怎么教”“教得怎样”这三个问题，更加重视教学内容、教学方式、教学评价的选择，侧重于教学过程中教师“教”的行为；数学学习设计则解释了“学什么”“怎么学”“学得怎样”的问题，更加重视学习内容、学习方式、学习评价的选择，侧重于教学过程中学生的“学”。虽然两者的侧重点各有不同，但最终目的都是促进学生学习。国外对学习设计的研究早于我国，虽然国外学者强调学习设计是从学习者角度来设计的教学过程，但也指出，学习设计在本质上仍是一种教学设计，只不过是一种新型

[1] 王新民. 数学学习设计概论[M]. 北京：高等教育出版社，2018：27-28.



的教学设计方法<sup>[1]</sup>。严先元在《学习设计与学习方式》一书中提出，学习设计是“为学习”的设计、“对学习”的设计、“促学习”的设计，但也是把学习设计看作一种以学生学为线索的教学设计。

其次，两者在目标设计、内容设计、策略设计这三方面存在一些区别。《数学学习设计概论》中指出：第一，在目标设计上，教学设计通常的表述形式有“使学生……”“培养学生……”，描述的是一段教学活动后取得的教学效果，它是一种行为主体为教师的结果性目标；学习设计通常的表述形式有“能举例说明……的含义”“会利用公式计算……”，重点描述的是教学中逐步掌握的知识技能，它是一种行为主体为学生的过程性目标。第二，在内容设计上，教学设计的内容主要指“教什么”“怎么教”“教得怎样”，是对教师教的系统安排；学习设计的内容主要指“学什么”“怎么学”“学得怎样”，是对学生学的系统安排。第三，在策略设计上，教学设计的策略是教师有目的的行为，主要包括陈述策略、指导策略、展示策略、提问策略、反馈策略、管理策略、观察策略、倾听策略、反思策略、评价策略；学习设计的策略是学习者有效学习的途径，主要包括学习准备策略、阅读策略、提出问题策略、梳理知识策略、反思评价策略<sup>[2]</sup>。

以教学目标的确定为例，传统的教学目标的主体是教师，教师的行为不是教学目标加以描述的对象，但是“教”的终极目的还是“学”，学生的“学会”才是重点。学习设计则是将学生看作设计中的主体，在设定教学目标时是以学生为中心，对学生的行为进行描述，这一观念更加贴合新课改的思想，这也是教学设计中设定教学目标时需要即时转变的观念。探究学习设计与教学设计间的关系不仅为我们深入研究数学教学设计提供了不同的视角，同时有助于我们优化数学教学设计。研究学习设计给我们的启示是：我们在设计教学时要从学生出发，在教学设计的各个环节中注重学生的主体地位，将“以学生为本”的理念贯穿整个教学活动。

## 四、数学教学设计的特点

### (一) 系统性

系统性是指一个层次分明的整体，不同维度的指标处于不同层级，形成一定的秩序，同层级指标之间、指标层与指标层之间具有清晰的逻辑关系。数学教学设计便具有系统性。首先，教学设计具有系统性。教学设计本身就是一个步骤分明的整体，是一个系统化的过程，是为达成教学目标而对教学过程和教学中的要素进行的系统性规划。其

[1] 吴军其, 刘玉梅. 学习设计: 一种新型的教学设计理念[J]. 电化教育研究, 2009(12): 80-83.

[2] 王新民. 数学学习设计概论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018: 34-42.

次，数学知识具有系统性。数学学习是培养人的逻辑思维的重要途径，无论是数学新旧知识间的纵向联系，还是相关知识间的横向联系，数学知识本身就隐含着内在的逻辑联系，所以在进行数学学习时要重视知识系统的建立。最后，数学教学具有系统性。数学教学的系统性原则指明教学要循序、系统、连贯地进行，既利于学生对知识的识记，也能保证学生获得更加系统的知识，形成对知识的整体性教学。数学教学设计包含多个要素，这是系统正常运行的前提，这些要素间并非完全独立，一个要素的改变必然引起另一个要素发生动态性变化，教学设计是由各个必需要素共同构成的，系统内要素之间相互依存、相互制约、相互作用，形成了一个相互关联的整体。

## (二) 严谨性

数学逻辑的严格性与结论的准确性使得严谨性成为数学学科的基本特征之一。数学教学设计的整体过程也具有严谨性。首先，分析教学内容时要严谨地分析每一个知识点的讲解是否正确，是否符合学生认知发展规律和数学知识内部逻辑结构，是否有利于发展学生的逻辑思维能力，力求在保证学生理解的基础上逐步提高学生的思维能力。其次，设置教学目标时要缜密地考虑此阶段学生的认知发展特点，掌握学生的最近发展区，为顺利开展高效教学打下坚实基础。最后，教学过程是教学设计的核心主体部分，是连贯课堂教学环节的呈现，每一个环节都要经过周密的安排，以使得下一个环节的呈现更加自然，更加可接受，否则任意一处的疏漏都会导致学生的学习轨迹发生变化，最终难以达成预先设置的教学目标。

## (三) 可操作性

可操作性是根据具体的行为特征对变量的操作进行描述，将抽象的概念、隐形的内容转换成可观测、可检验的项目，可操作性也是检验计划设计是否有意义的前提条件。数学教学设计是针对某一个数学内容进行教学的计划，而数学教学中的对象往往是极其抽象的，难以直观感受和精确把握，这就需要通过数学教学设计将抽象的内容直观化、具体化，转变成具有可操作性的对象呈现给学生。因此，要保证学生在结束某一学习内容时能够在知识上有所收获，在技能上有所提高，就要保证教学设计具有比较强的可操作性，就要保证教学计划是行得通、做得到的。可操作性具有可观测、可检验、可重复等特征，即在教师完成设计后可根据教学设计完成所有环节，同时教师也可以审视整个教学过程，对教学过程的每一个环节进行评价。

## (四) 生成性

教学设计是对课堂教学的计划，是教师提前对教学内容、教学过程，甚至对学生在课堂中的疑问进行预设。在以前，教学设计一直被认定是一种线性的模式，每一个要素一经固化便无法更改。可实际情况是，学生是独立于教师意志之外的个体，具有独立的

思维，课堂也是一个随时会发生突发情况的场所。更重要的是，数学作为一门复杂的难以理解的学科，学生对数学知识学习的过程也是动态的，因此数学教学设计应该是一个动态的、发展的概念，这也就需要我们认识到数学教学设计的生成性，对其进行延伸。面对学生具体的、真实的情况，教师要利用自身的教学机智即时调整教学计划的内容，促进学生进行有效数学学习。这种生成性的教学观念为课堂教学设计拓宽了视野，使得我们真正实践教学时能够重新审视教学设计的要素。

### (五) 过程性

教学设计是一个设计教学的过程，过程性也是教学遵循的原则之一。新课程改革强调教学要从“重结论轻过程”转向“重结论更重过程”。以往的数学教学过于重视结果，对知识学习的理解仅停留在识记层面，使得学生对数学概念、性质认识不清。数学学习不是简单的知识积累，而是要让学生经历学习知识的过程，在信息加工能力、知识迁移能力、认知能力不断提高的过程中学习数学，学会数学。在数学教学中，教师要注重对知识的产生及发展过程的设计，让学生了解每个知识点的形成过程，提高学习数学的兴趣；注重公式的推导过程，让学生掌握其中隐性的数学思维方法，从而逐步提高学生数学能力，使其感悟到数学魅力。

### (六) 层次性

首先，数学教学内容的实施具有层次性，这就需要对知识要素进行分级处理。数学知识设计可以分为三个不同的层级：数学概念的理解、数学经验的吸收、数学思维的培育。在进行数学教学设计时，要保证根据内容层级进行层次性设计，加强对知识要素的分级处理。其次，教学对象具有层次性，对学情的分析要进行分阶段推进，这是因为学生的思维是由低级向高级进阶的，学生的理解符号过程是从单一走向综合的，学生的体验过程是由感性转为理性的，学生的实践是从行为的积累转变为思维上的质变的；最后，教学方法具有层次性，例如，采用情境教学法时，教师需要从整体教学情境来设计，不断丰富情境要素，逐层完善阶段设计<sup>[1]</sup>。并且，数学学习本身就是从未知到已知，从简单到复杂，从具体到抽象，是在发展中逐步深化、层层递进的过程。

## ② 第二节 数学教学设计的理论基础

理论来源于实践的经验总结，又反过来指导实践。只有在理论的指导下，教学设计

[1] 刘俊甫. 内容、对象与方法：初中数学教学层次化设计研究[J]. 教育理论与实践, 2020(26): 53-55.

才能条理化、严谨化、科学化，才能为教学奠定稳定的基础。教学设计自产生以来便不断发展完善，在发展过程中，传播理论、教学理论、系统理论、学习理论成为教学设计的重要理论支撑，对教学设计产生了重大影响。

## 一、传播理论

教学过程本身就是一种信息传播活动，是由教师通过有效的渠道将知识、技能、思想等信息传达给受教育者或者教育对象的活动。学者在传播理论的基础之上，提出了几种教育传播模式：拉斯韦尔提出的“5W”传播过程模式(见图1-1)，为确定教学设计过程要素提供了方向；施拉姆提出的循环和互动传播模式(见图1-2)与“5W”传播模式明显不同，将传播的双方都作为传播行为的主体，在一定程度上体现了教学的双向性；贝罗提出的SMCR模式(见图1-3)说明了影响信源、接收者和信息实现其传播功能的条件，同时说明信息传播可以通过不同的方式和渠道，而最终传播效果不是由传播过程中某一部分单独决定的，而是由组成传播过程的信源、信息、通道和接受者，以及它们之间的关系共同决定的；传播过程中的每一个部分又受其自身的制约。

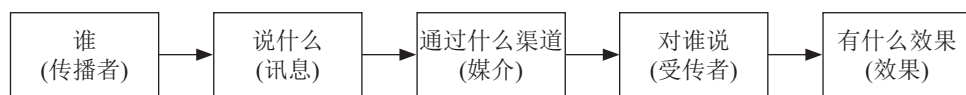


图1-1 拉斯韦尔的“5W”传播过程模式

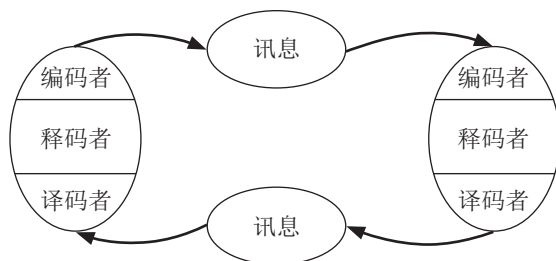


图1-2 施拉姆的循环和互动传播模式

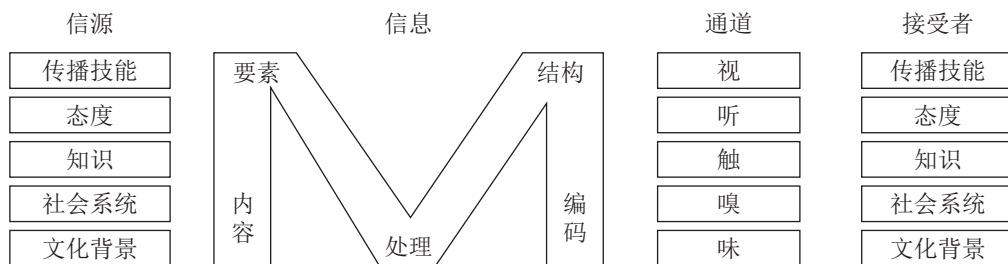
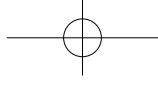


图1-3 贝罗的SMCR模式

教育传播理论发展至今，已不仅仅起到增添教学设计要素和说明要素间关系的作用，随着信息化时代的到来，以传播学理论为基础的教育技术不断更新，现代教育技术



影响并拓展了教学设计的形态。信息设计时代,计算机与多媒体的融入使教学设计由以教学内容为重点转向以教学内容的形式为重点,进而促进了“以学习者为中心”的教与学的活动。计算机等信息技术手段为情境创设、交流协商和反馈评价环节也提供了支撑<sup>[1]</sup>。信息技术对学生的学习环境起着不容小觑的作用,这与学习环境的创建有关。信息技术和媒体的成功运用使学生找到进入某个环境的缩小环境所呈现内容与他们自身的知识和经验之间差距的方法,此时可以把信息通信技术的使用理解为一个“问题解决工具”<sup>[2]</sup>。

## 二、教学理论

教学设计作为一门对教学过程进行设计的学科,必然需要教学理论作为支撑。在维果斯基提出“最近发展区”理论之下,赞可夫提出发展性教学的五项基本原则:以高难度进行教学的原则;以高速度进行教学的原则;理论知识起指导作用的原则;使学生理解学习过程的原则;使全体学生包括“后进生”都得到发展的原则。参考五项基本原则设定的教学设计的准则包括以下内容:保证教学过程、教学内容的学习难度要适中,能够激发学生的求知欲;减少教学过程的重复,以提高教学效率,在高效率中力求拓宽知识广度,在扩大广度中提高知识内容的深度;理论知识揭示事物内在联系,能够合理地指导教学设计过程,把握事物的本质规律,有效地完成知识的迁移,促进学生一般发展;在教学过程中注意培养学生学会学习,引导学生掌握知识学习的途径;教学设计面向的是全体学生,尤其注意“后进生”的发展,设计的内容应该适合大多数学生的水平。

德国教育家瓦·根舍因和克拉夫基倡导的范例教学指出,教师在教学中应选取基本的概念和科学规律,即以真正的、基础的本质知识作为教学内容,然后在一组特定的知识中选出具有代表性的实例进行讲授,从而使学生掌握同一类知识的一般规律,学会举一反三,获得独立思考的能力以及独立解决问题的能力。在设计教学的过程中,教师要选择合适的范例使学生掌握基本的原理、规律、方法、态度等,促使学生通过范例的作用实现学习迁移及掌握一类知识的一般规律。

## 三、系统理论

最初的“教学设计”一词便是在系统观的视角下定义的,系统理论为教学设计提供

[1] 郑旭东,王美,尹佳,等.教学设计的理论、模型与技术:《教育传播与技术研究手册(第四版)》基础部分述评之一[J].远程教育杂志,2016(6):63-69.

[2] 徐世猛.国际教学设计领域在关注什么:《教学设计中课程、规划和进程的国际观》深度解读[J].现代远程教育研究,2012(2):33-37.

了科学支撑。系统论的创始人贝朗塔菲把“系统”定义为相互作用的诸要素的复合体，强调元素之间的相互作用以及系统对元素的整合作用。在系统论的观点下，教学是一个由多要素组成的复杂系统，通过优化教学中的各个要素来达到整体教学最优化的过程。研究少数的可控制要素，并根据它们之间产生的关系，来说明研究对象的性质和运动规律，是科学技术所采用的常规方法。而基于这种思路的教学设计，便把各种各样的要素基于一定的法则和原理加以组合，试图将教学构成一个完整的系统。

系统论教学设计将教学过程看成一个完整的系统，在教学前对要素进行设计，并在实施教学的过程中按照预设的步骤进行。从既定的目标出发，系统论教学设计是为了正确地传递已知的知识和知识的体系。把已知的知识设定为目标，为了达到这个目标而进行教学设计，恰好验证系统论教学设计的“预先计划性”的特征。向着既定的目标进行教学，是因为必须按照计划分配刺激的内容，产生特定的反应，而不希望引起其他无关反应。作为主体是人类的的活动，教学过程中不可能只出现一种反应，这就需要教师预测各种各样的反应，并且在教学过程中捕捉到这些反应<sup>[1]</sup>。系统论具有三个要点：系统的整体性、系统的有机关联性和系统的动态性。这指导教师整体把握数学教学设计流程，把教学当作一个不可分割的整体，明晓教学设计间要素关系，认识到教学活动中学生的学习、能力、情感，以及教学流程始终处于活动变化中，提前进行预设，提高教学效率。

## 四、学习理论

学习理论作为揭示人类学习活动本质、总结人类学习规律的一门学科，同样为教学设计的发展奠定了基础。联结派学习理论将学习视为刺激与反应间的联结，从而使研究者明确：在进行教学设计时，要考虑到在教学过程中适时适当地给予学生刺激，促进学生学习的发生。斯金纳提出程序教学法，其中积极反应、小的步子、即时反馈、自定步调、最低的错误率5个原则对于教学设计的过程同样适用。认知学派学习理论则认为学习是主动地获取刺激并对外界的信息进行选择加工的过程，将学生的学习看成整体的、系统的过程，为数学教学设计把握知识间关联、循序渐进的安排教学内容提供了理论基础。建构主义学习理论则指出，学习应该是引导学生从原有经验出发，自主构建知识的过程。在对教学进行设计的过程中，教师要掌握学生的认知起点，根据学生的特点安排教学计划，关注教学过程中的情境创设，认同学生在学习过程中的主体地位，鼓励学生通过合作探究的方式获得新知。下面重点介绍学习进阶理论和深度学习理论。

[1] 李芒. 从系统论到关系论：论信息社会教学设计理论的新发展[J]. 电化教育研究, 2001(2): 3-8.

## (一) 学习进阶理论

### 1. 学习进阶的定义及内涵

“学习进阶”是2005年美国国家研究委员会在《国家科学评价体系》中首次提出的,认为其“是促进课程标准、课堂教学与考试评价三者一致性的有效工具”<sup>[1]</sup>。对于学习进阶的表述至今没有一个统一的界定,根据对国内外研究的综述,笔者归纳了发现对于学习进阶的含义有4种普遍认同的说法。第1种是过程说,桑格(Songer)等学者认为“学习进阶是学生对学习主题思考、推理和探究的过程”<sup>[2]</sup>。第2种是假设论,萨琳娜(Salinas)认为学习进阶是以实证为基础的,可通过检验的假说,检验学生对于核心概念等学习过程是否能符合相关的实证研究的结论。第3种是方法说,史密斯(Smith)等认为“学生学习核心概念时的思维是逐步深入发展的,学习进阶就是一种能够描述学生思维发展的方法”<sup>[3]</sup>。第4种是序列说,阿隆佐(Alonzo)与斯蒂朵( Steedle)将学习进阶定义为“学生对某一概念理解的有序描述”<sup>[4]</sup>。

大部分学者引用了2007年美国国家研究委员会对学习进阶的核心界定,把学习进阶定义为“对学生在一个时间跨度内学习和探究某一主题时,依次进阶、逐级深化的思维方式的描述”<sup>[5]</sup>。这个定义融合了过程说和序列说,认为学习进阶是针对一个核心概念的、循序渐进的、有一定顺序的过程。根据学习进阶的各种定义,学习进阶扩展出多种内涵:学习进阶是一个以核心概念、主题为主线,能够使学生建立关于核心概念的系统;学习进阶认为学生的思维是不断发展、不断深入的,要根据本阶段学生的思维特点进行进阶的设定;学习进阶并非只存在根据学生的经验设置的起点和根据社会期望或者课程内容要求设置的终点,还包括多个中间水平。自2008年以来,美国国家科学教育研究学会大会每年都会开展以“学习进阶”为专题的报告<sup>[6]</sup>。

### 2. 学习进阶的要素

据教育者研究发现,学习进阶主要由5个要素构成。

[1] 张颖之. 理科课程设计新理念: “学习进阶”的本质、要素与理论溯源[J]. 课程·教材·教法, 2016(6): 115-120.

[2] SONGER N B, KELCEY B, GOTWALS A W. How and When Does Complex Reasoning Occur? Empirically Driven Development of a Learning Progression Focused on Complex Reasoning about Biodiversity[J]. Journal of Research in Science Teaching, 2009: 610-631.

[3] SMITH C L, WISER M, ANDERSON C W, et.al. Implication of research on children's learning for standards and assessment: a proposed learning progression for matter and the atomic molecular theory[J]. Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives, 2006: 1-4.

[4] ALONZO A, STEEDLE J. Developing and Assessing a Force and Motion Learning Progression[J]. Science Education, 2009, 93(3): 389-421.

[5] 姚建欣, 郭玉英. 为学生认知发展建模: 学习进阶十年研究回顾及展望[J]. 教育学报, 2014(5): 35-42.

[6] 皇甫倩, 常珊珊, 王后雄. 美国学习进阶的研究进展及启示[J]. 外国中小学教育, 2015(8): 53-59, 52.

(1) 进阶终点, 也称为学习目标, 此时学生到达学习核心概念后的最高水平。学习终极目标一般根据学科的目标来设定, 是进入下一层次教育的条件, 也是社会所期望达到的水平。

(2) 进阶变量, 也称为进阶维度, 指学习某个核心概念所能达到的维度, 通过追踪进阶变量可以了解学习过程中的阶段性变化和整个学习过程。

(3) 成就水平, 即在学习起点与终点间存在的中间水平。学习核心概念的过程并非一蹴而就的, 要经历中间步骤, 通过层层递进, 逐渐深化概念。

(4) 预期表现。对学生处于各个水平的表现做出预设, 通过预设的表现判断学生所处的成就水平, 同时根据学生的实际表现对学生进行有参照性的评价。

(5) 测评工具。利用测评工具, 根据预期表现测量评价学生对核心概念的掌握情况。

学习进阶理论不仅与数学教学设计的理念不谋而合, 也为数学教学设计提供了新的视角, 有显著的指导意义。数学教育者提出的“学习轨迹”理论指出, 在数学知识学习过程中应该有明确的学习路线, 并沿着此路线组织学习。数学教学设计中知识的学习轨迹都是由浅入深、由易到难或是由具体到抽象的。数学教学设计是围绕一个单元内容或是一个主题来设计的, 而学习进阶理论明确指出, 教学设计不仅要锚定起点与终点, 也要重视中间的多个水平。这就要求教师在进行整体内容设计时不仅要关注到单元内容、主题起始, 也要关注教学过程中学生的层次水平, 并进行即时评价。例如, 图1-4是学习进阶视域下的“函数概念”教学设计流程, 要求教师明确函数概念教学时的起点与终点, 明晰学生处于不同的进阶维度和层次水平, 并进行阶段性评价, 力求更好地把握函数主线进行教学。

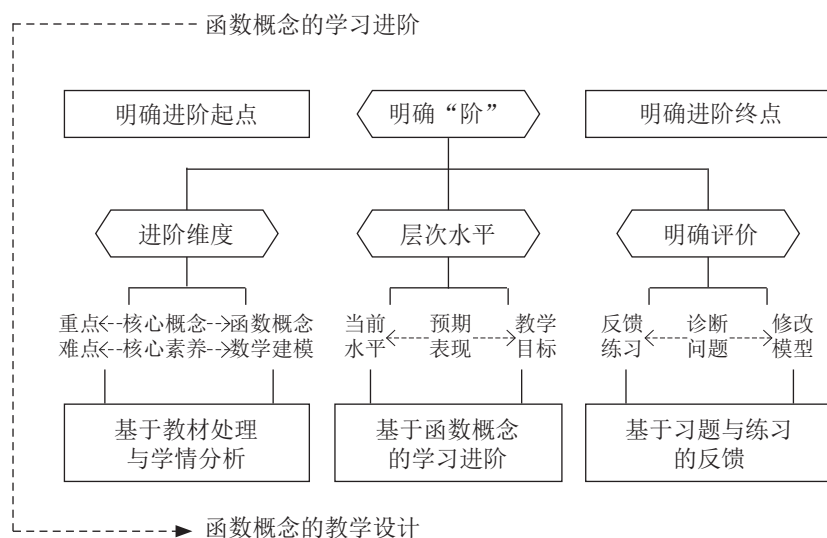
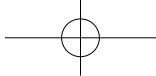


图1-4 学习进阶视域下的“函数概念”教学设计流程<sup>[1]</sup>

[1] 张妍. 中学数学函数概念的学习进阶研究[D]. 天津: 天津师范大学, 2020: 49-56.



## (二) 深度学习理论

### 1. 深度学习的定义

“深度学习”一词最早是1976年由美国学者费伦斯·马顿(Ference Marton)和罗杰·萨尔乔(Roger Saljo)在著作*On Qualitative Differences in Learning: I-Outcome and Process*(《学习的本质区别: 结果和过程》)中提出的, 其依据学习者获取信息与加工信息方式的不同, 将加工水平分为浅层水平和深度学习, 进而提出了浅层学习和深层学习的概念<sup>[1]</sup>。在此之后, 比格斯、比蒂、布兰斯福德等人先后开展了深度学习的研究。

我国对深度学习研究的起步尚晚。2005年, 何玲、黎加厚在《促进学生深度学习》中首次将“深度学习”一词引进中国, 此后对深度学习的研究蓬勃涌现, 学者普遍认可该文给出的深度学习的概念: “深度学习是指在理解学习的基础上, 学习者能够批判性地学习新的思想和事实, 并将它们融入原有的认知结构中, 能够在众多思想间进行联系, 并能够将已有的知识迁移到新的情境中, 做出决策和解决问题的学习。”<sup>[2]</sup>

### 2. 深度学习的基本特征

结合《深度学习的内涵及认知理论基础探析》<sup>[3]</sup>与《促进深度学习的信息化教学设计的策略研究》<sup>[4]</sup>对深度学习特征的分析, 我们认为深度学习具有5个基本特征。

(1) 深度学习注重批判理解。深度学习不是简单被动地接受知识的过程, 而是学生以理解的基础, 站在更高的角度对知识进行批判性的学习。学生只有在批判性思维的基础上才能积极参与到学习和思考的过程中来, 才能进行有意义的学习。

(2) 深度学习强调信息整合。此处的信息整合包括多方面的整合: 一是对多学科的信息进行系统性整合, 使不同学科知识间互相补充, 从而使学生在学习过程中的视域更加开阔, 多方面的素养能力得到提升; 二是对新旧知识间的知识进行整合, 在回顾旧知的过程中促进新知的理解, 加速完整的知识体系的形成。

(3) 深度学习促进建构反思。是否具有建构反思是深度学习和浅层学习的本质区别。反思活动是对所学知识的再认识、再检验, 有助于学生在建构新旧知识联系时及时地调整认知结构。反思的过程中往往促进创新思维的发展, 提出质疑的同时也能重构知识结构, 促进个人智慧的产生。

(4) 深度学习着意迁移运用。面对新的情境, 深度学习并不是将先前所得到的经验简单地复制、粘贴, 而是在脑海中完成对“旧知”的加工, 将重整后的旧知进行迁移, 使其在新的问题情境中能够圆满地解决问题。

[1] MARTON F, SALJO R. On qualitative differences in learning: I-Outcome and process[J]. *British Journal of Educational Psychology*, 1976, 46: 4-11.

[2] 何玲, 黎加厚. 促进学生深度学习[J]. *现代教学*, 2005(5): 29-30.

[3] 张浩, 吴秀娟. 深度学习的内涵及认知理论基础探析[J]. *中国电化教育*, 2012(10): 7-11, 21.

[4] 杜娟, 李兆君, 郭丽文. 促进深度学习的信息化教学设计的策略研究[J]. *电化教育研究*, 2013(10): 14-20.

(5) 深度学习面向问题解决。在经历深度学习后,学生不仅可以解决简单的问题,还可以解决一些具有挑战性的、没有遇到的复杂问题。

除了上述5个基本特征,还有学者提出深度学习的3个“深度”:认知的深度、参与的深度、结果的深度,以促使学生在学习过程中达到三“高”:高认知、高投入、高产出<sup>[1]</sup>。这体现为以下几点:一是深度学习是对知识进行批判性理解,进行多类信息整合的过程,体现了高阶思维的运用,需要学生不断分析、评价、综合运用已有的知识经验,促使自己获得更高的认知;二是深度学习是学生将过去习得的内容迁移运用到新情境,自我反思的过程,在此期间学生需要以积极的情感态度和坚定的信念主动地参与到学习活动中来,促使自己进行更高的投入;三是深度学习是学习质量不断提升从而完成问题解决的过程,学生在学习中知识不断积累,能力不断发展,最终获得更高的产出。

深度学习理论为数学教学设计指明了有效的路径,使现代教学朝着高质量、高效率的方向前进。数学知识点的过多、过细导致知识内容零散,学生对于知识内容的学习仅停留在表层,而深度学习理论强调要在理解的基础上进行有意义的学习,这就要求教师在设计教学时注重知识的迁移,引导学生回顾“旧知”,从而促进学生对“新知”的理解,或者通过对其他学科知识的融合达到多角度认识新知。知识只有在思维的作用下才能被理解运用,所以在设计教学的过程中,不能仅重视知识的传授,还要重视对学生高阶思维的培养,而这也是时代对人才素质提出的新要求。学习的终极目标并不是学过多多少少知识,而是将知识内化,以便学生创新性地解决复杂的现实问题。在教学活动中,教师要懂得设置问题情境,让学生运用“新知”解决问题,同时激发学生的创新思维。不少教师把讲台当成自己一个人的舞台,而学生的课堂回应并不多。在设计教学时,教师要重视学生的主体地位,让学生积极主动地参与到学习活动中,在兴趣与积极状态的共同作用下进行有效学习、深度学习。

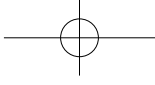
1995年,西尔斯曾提到一个观点,教学设计理论基础的多元化开放已成为趋势,否则教学设计将不能发展,但同时也不能否定已有的教学设计模式,应考虑如何结合新的观念。教学设计的四大理论是其根基,任何一份成功的教学设计必然是在此基础上进行的。同时,教学在不断优化中,教学设计的理论必然要随着时代的变迁而继续创新,在发展过程中逐渐衍生出的一些新兴的教育理论也在指导着教学设计,使教学设计的理论更加成熟,教学的效果不断提高。

### ④ 第三节 教学设计模式

我们将某种事物的标准形式或使人可以照着做的标准样式称为模式<sup>[2]</sup>。作为教学活

[1] 郑东辉. 促进深度学习的课堂评价: 内涵与路径[J]. 课程·教材·教法, 2019(2): 59-65.

[2] 中国社会科学院语言研究所词典编辑室. 现代汉语词典[Z]. 第7版. 北京: 商务印书馆, 2016: 919.



动中系统化特征极为明显的教学设计，自然也存在着一定的模式。《教育大辞典》指出，教学设计模式是运用系统方法对不同教学系统进行教学设计的各种标准化形式<sup>[1]</sup>。教学设计模式是在教学系统设计的实践当中逐渐形成的，是再现教学系统设计现实的一种理论性的简化形式，是一种系统化、规范化地分析、把握、规划和安排教学方法体系和步骤方案。它是一类可操作的，用于分析、确定、建立和评价教学活动的，具有方法性质的工作体系<sup>[2]</sup>。由于教学设计中涉及不同的理论基础，不同研究人员对教学设计有不同理解，对教学背景(学习者的认知发展水平、学习环境、学习习惯以及知识的内在联系等)，参与设计的人员(教师、媒体专家、教育专家等)，课程范围(课堂设计、课程设计等)等存在认知差异，产生了不同种类的教学设计模式。

## 一、传统教学设计模式

虽然研究者在不断地提出新的教学设计模式，但是一些传统的教学设计模式为新模式改进、开发提供了坚实的基础。教育史上典型的教学设计模式有以下几种。

### (一) 肯普教学设计模式

肯普在1977年提出的教学设计模式，被称为“第一代以教为主的教学设计模式”。肯普最初建立的教学设计模式是利用线条将各个要素顺时针连接起来，但是在后来的实践中，他发现教师在教学过程中所面临的教學问题以及实际情况并不是按照他所设计的顺序进行的，他开始多次修改、逐渐完善这个模式。1985年，他提出了“椭圆结构模式”(见图1-5)。

该模式包括十要素：①确定学习需要和学习目的，为此应先了解教学条件(包括优先条件与限制条件)；②选择课题与任务；③分析学习者特征；④分析学科内容；⑤阐明教学目标；⑥实施教学活动；⑦利用教学资源；⑧提供辅助性服务；⑨进行教学评价；⑩预测学生的准备情况。肯普的教学设计模式有4个基本要素：学习者特征、学习目标、教学策略和教学评价，并且他认为任何教学设计过程都离不开这4个要素。肯普的教学设计模式改变了线条的线性连接方式，采用环形方式来表示教学设计的过程，从而显示各个环节之间的相互联系和相互交叉。在肯普教学设计模式中，学习需要和学习目的处于中心位置，表明了两者的既是教学设计中的重头戏，也是教学设计的出发点，其他的各个环节都要围绕此进行设计；教学设计的各个环节有序连接，表明教学设计是非常灵活的；“形成性评价”“总结性评价”与“修改”占据整个外侧圈，说明评价与修改是贯穿于整个教学设计之中的。

[1] 顾明远. 教育大辞典[M]. 上海: 上海教育出版社, 1998: 718.

[2] 李康. 模式、教学模式与教学设计模式[J]. 电大教学, 2001(03): 1-5.

该模式有以下几个特点：①强调了十要素间的相互联系与相互作用，一个要素采取的决策会影响其他要素的决策；②要素之间没有线条连接，表明在某些情况下也可以不考虑某一要素；③学习需要和学习目的这个要素在这个环境结构的中心，说明两者是教学设计的依据与归宿，各要素都要围绕它们来进行设计；④教学设计是一个连续过程，评价和修改作为一个持续的活动与其他要素相联系；⑤教学设计是一个灵活的过程，可以按照实际情况从任何地方开始，并可以按任何顺序进行<sup>[1]</sup>。

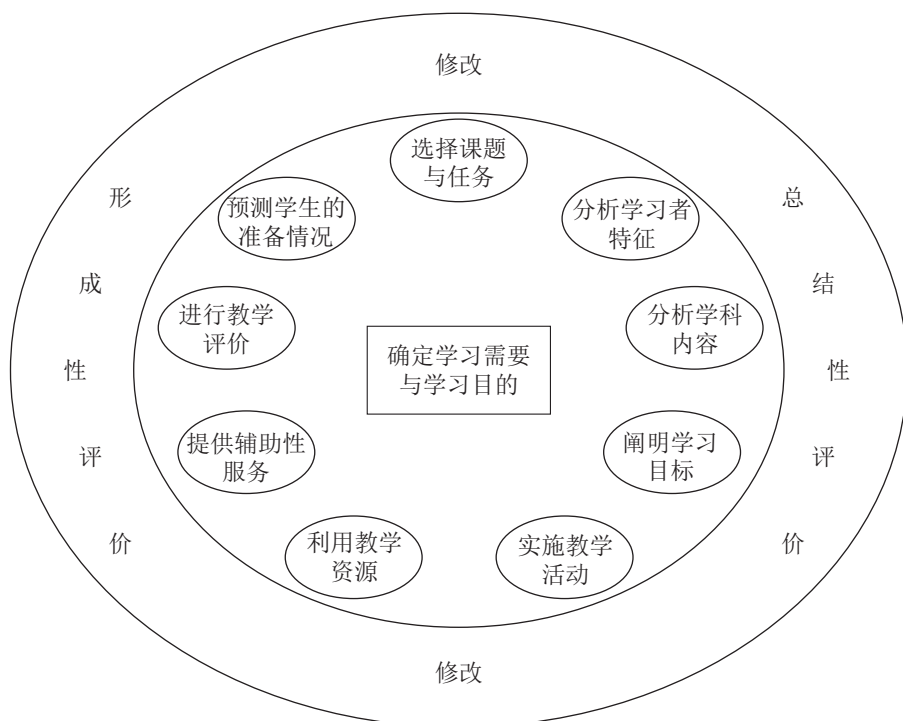


图1-5 肯普教学设计模式——椭圆结构模式

## (二) 史密斯-雷根教学设计模式

史密斯-雷根教学设计模式(见图1-6)以认知主义为基础，认为教学设计者主要从事三项活动：分析、策略开发、评价。该模式以迪克和凯瑞等人提出的教学设计模式为基础，是进行教学设计的通用模型。它首次指出，要充分分析学习者的各种特征，重视对教学策略的设计。该模式下的教学设计开始从以“教”为中心转向以“学”为中心。

史密斯-雷根教学设计模式中包含着其他教学设计模式中不常见的几个特征：情境分析、测验开发的排序，以及在形成性评价阶段的修改环节。更重要的是，该模式具有明显的序列性，按照模式中显示的每一个活动，我们可以按照特定的线性顺序去列出某

[1] 方均斌, 蒋志萍. 数学教学设计与案例分析[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2012: 32.

一项具体的教学活动。同时，该模式也指出不论有经验的教学设计者还是无经验的教学设计者，都可以按照这种线性的方式进行教学设计，只是在设计过程中，设计者要懂得灵活变通，按照实际情况修改教学设计顺序，有时可能会对某一特定阶段的设计步骤进行多次研磨。

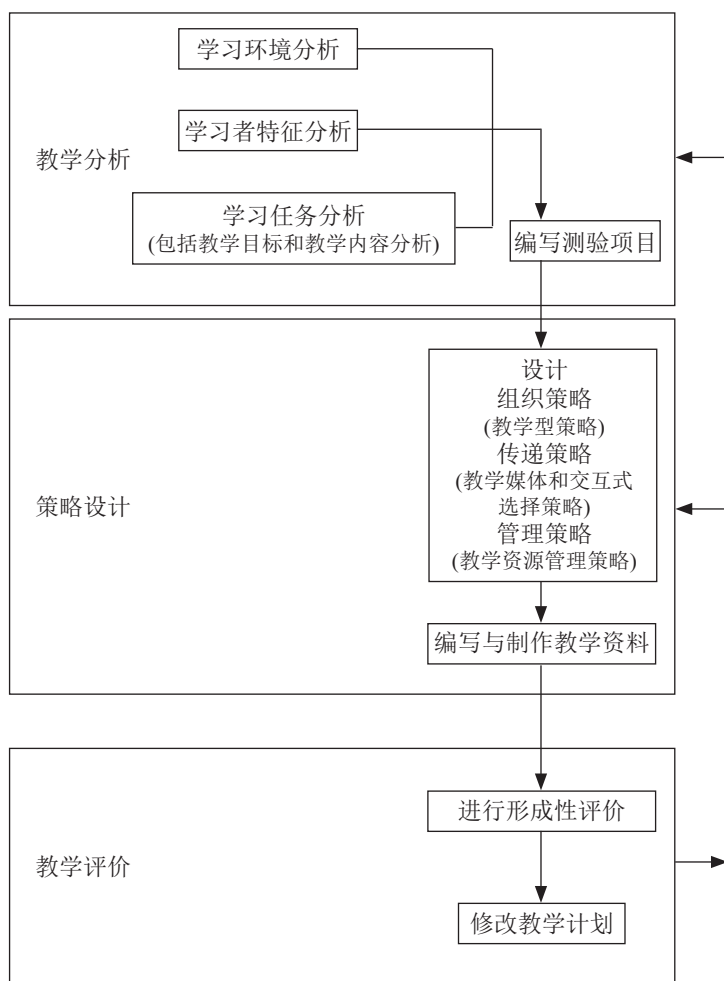


图1-6 史密斯-雷根教学设计模式

### (三) 建构主义教学设计模式

建构主义是学习理论由行为主义到认知主义以后的新发展，但建构主义理论基础上的学习理论与行为主义理论基础上的教学设计的模式有很大的差别，它将重点转向了主观主义的哲学领域，认为每个人对世界的理解和认识都是以自己的经验为基础的，存在强烈的主观色彩。虽然教学设计基于客观主义，追求可显、可控的学习效果，但是建构

主义对一些复杂的学习领域、高级学习目标的教学设计还是比较适合的，它可以以一种“新的心理集”的方式引进教学设计领域，可弥补传统教学设计过分分离与简化教学内容的局限<sup>[1]</sup>。建构主义理论指导下的教学设计模式与之前教学设计模式最大的不同就是强调以学生的“学”为中心，认为教学过程中要充分发挥学习者的主动性与积极性。基于建构主义的教学设计模式如图1-7所示。

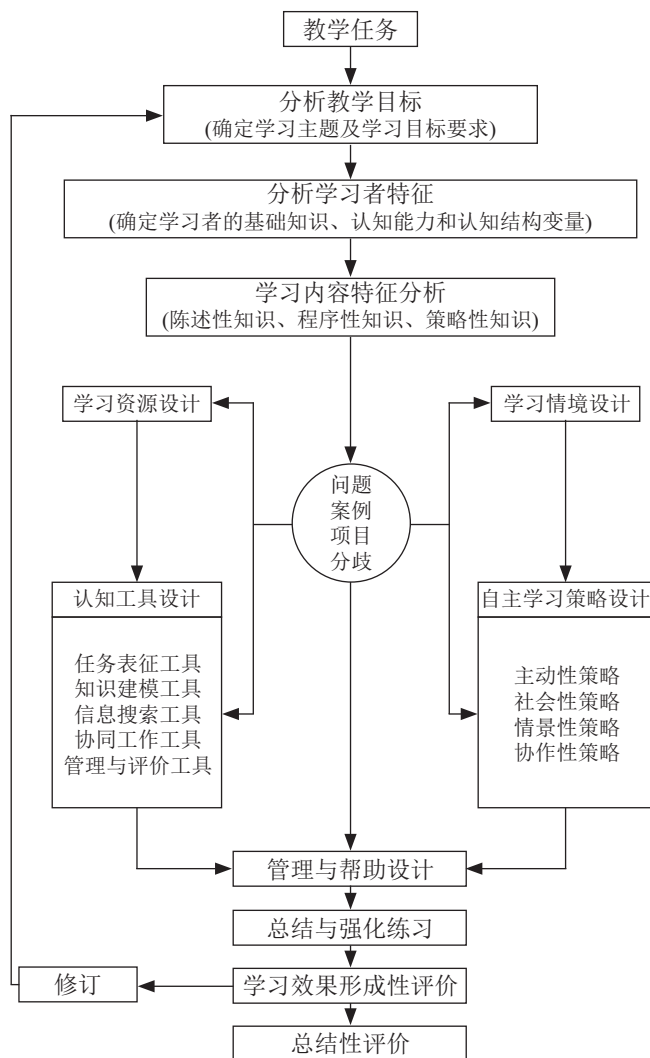


图1-7 基于建构主义的教学设计模式

基于建构主义的教学设计模式有以下几个特征：①以问题驱动为核心，这个问题可以是项目、案例或实际生活中的矛盾；②强调以学生为中心，利用各种教学因素诱发学习者的问题并刺激其学习这个活动或者确认某一问题，使学习者迅速地将该问题作为

[1] 余胜泉，杨晓娟，何克抗. 基于建构主义的教学设计模式[J]. 电化教育研究，2000(12): 7-13.

自己的问题而接纳；③这个问题必须在真实的情境中展开，必须是一项真实的任务；④强调学习任务的复杂性；⑤强调协作学习的重要性，并且要求学习环境能支持协作学习；⑥强调非量化的整体评价，反对过分细化的标准参照评价；⑦要求教师在设计学习任务时将学习环境展开，提供必要的学习资源、认知工具和帮助等内容，以反映学习环境的复杂性，在学习发生后，学习者必须在这一环境中活动；⑧设计多种自主学习策略<sup>[1-2]</sup>。

## 二、现代教学设计模式

### （一）“双主”教学设计模式

传统的教学设计模式不是强调“以教为主”就是强调“以学为主”。“以教为主”导致了教师成为课堂的主宰者而忽视了学生在学习过程中的主体地位，剥夺了学生进行自主学习、自主探究的权利，同时也不利于学生发散思维的培养；“以学为主”导致了教师主导地位的削弱，容易偏离学习目标，同时忽视了师生之间情感交流与情感因素在学习过程中的作用。为了解决在教学中只考虑某一个主体的问题，何克抗提出了“主导—主体”教学设计模式(简称“双主”教学设计模式，见图1-8)。此模式是在奥苏贝尔“有意义学习理论”“动机理论”“先行组织者”教学策略及建构主义学习理论指导下提出的以学生为主体、教师为主导相结合的新型的教学设计模式。

“双主”教学设计模式具有以下几个特点：①可根据教学内容和学生的认知情况灵活自由选择“发现式”或者“传递—接受”教学分支；②在“传递—接受”教学过程中基本采用的是“先行组织者”教学策略，同时可以采用其他的“传递—接受”策略(甚至是自主学习策略)作为补充，以达到更佳的教学效果；③在“发现式”教学过程中可以充分吸收“传递—接受”教学的优点(如进行学习特征分析和促进知识的迁移等)；④便于考虑情感因素(即动机)的影响，即在“情境创设”环节或“选择与设计教学媒体”环节通过创设的情境或呈现的媒体来激发学习者的动机，而在“学习效果评价”环节或根据形成性评价结果所做的“教学修改”环节可通过讲评、鼓励和表扬等手段促进学习者3种内驱力(由奥苏贝尔提出的“认知内驱力”“自我提高内驱力”“附属内驱力”)的形成与发展(视学习者的年龄与个性特征决定内驱力的种类)<sup>[3]</sup>。

[1] 方均斌, 蒋志萍. 数学教学设计与案例分析[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2012: 3.

[2] 余胜泉, 杨晓娟, 何克抗. 基于建构主义的教学设计模式[J]. 电化教育研究, 2000(12): 7-13.

[3] 何克抗, 郑永柏, 谢幼如. 教学系统设计[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2002: 237-240.

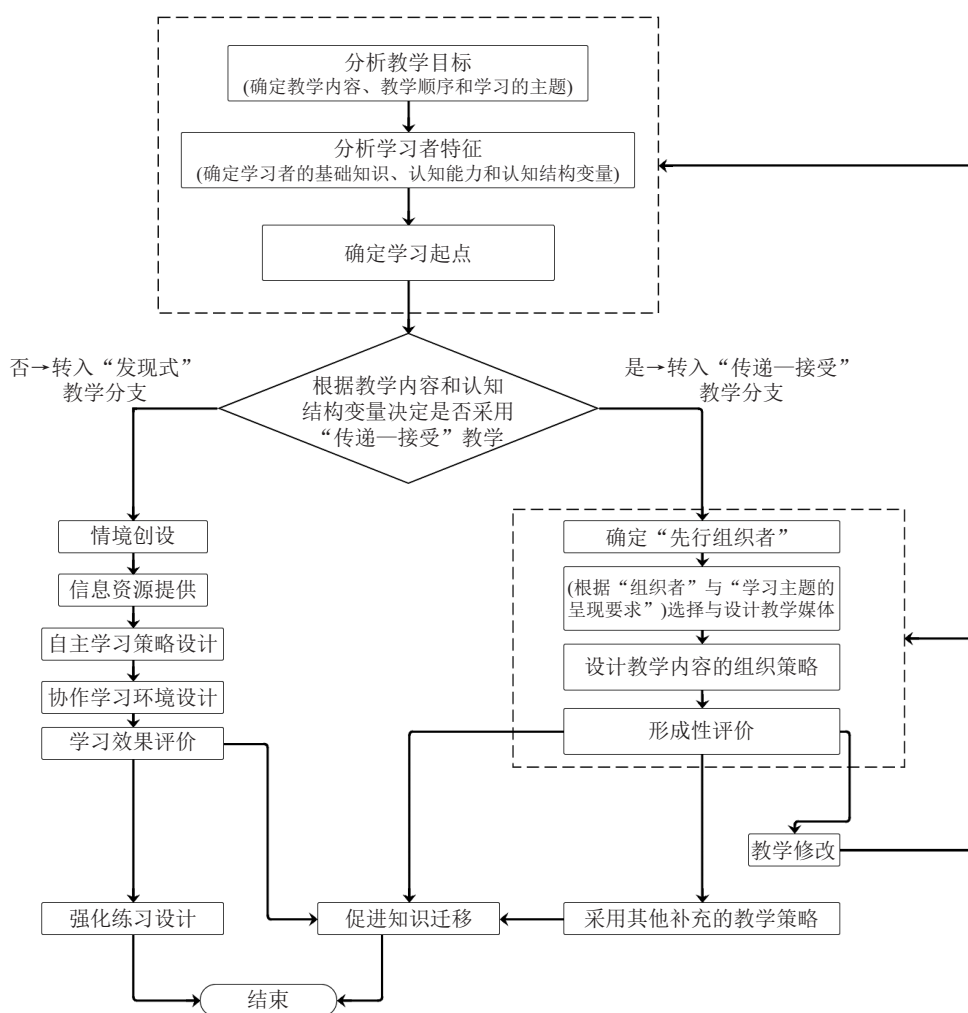


图1-8 “双主”教学设计模式

## (二) 信息化教学设计模式

信息技术已经融入现代课堂，为课堂教学提供了新的观念和更多的便利。信息化教学不仅仅是在传统教学的基础上对教学媒体和手段的改变，也是以现代信息技术为基础的整体的教学体系的一系列的改革和变化。信息化教学设计是由黎加厚教授提出的。信息化教学设计是运用系统方法，促进“以学为中心”的学习方式的转变，充分、恰当地利用现代信息技术和信息资源，科学地安排教学过程的各个环节和要素，以实现教学过程的优化，简称“信息化教学设计”。根据信息化教学设计的概念和原则要求，李红在参考李龙的教学过程设计的程序图形式的基础上开发了信息化教学设计模式(如图1-9)<sup>[1]</sup>。

[1] 李红. 面向基础教育新课程的信息化教学设计模式[J]. 中国电化教育, 2007(8): 71-74.

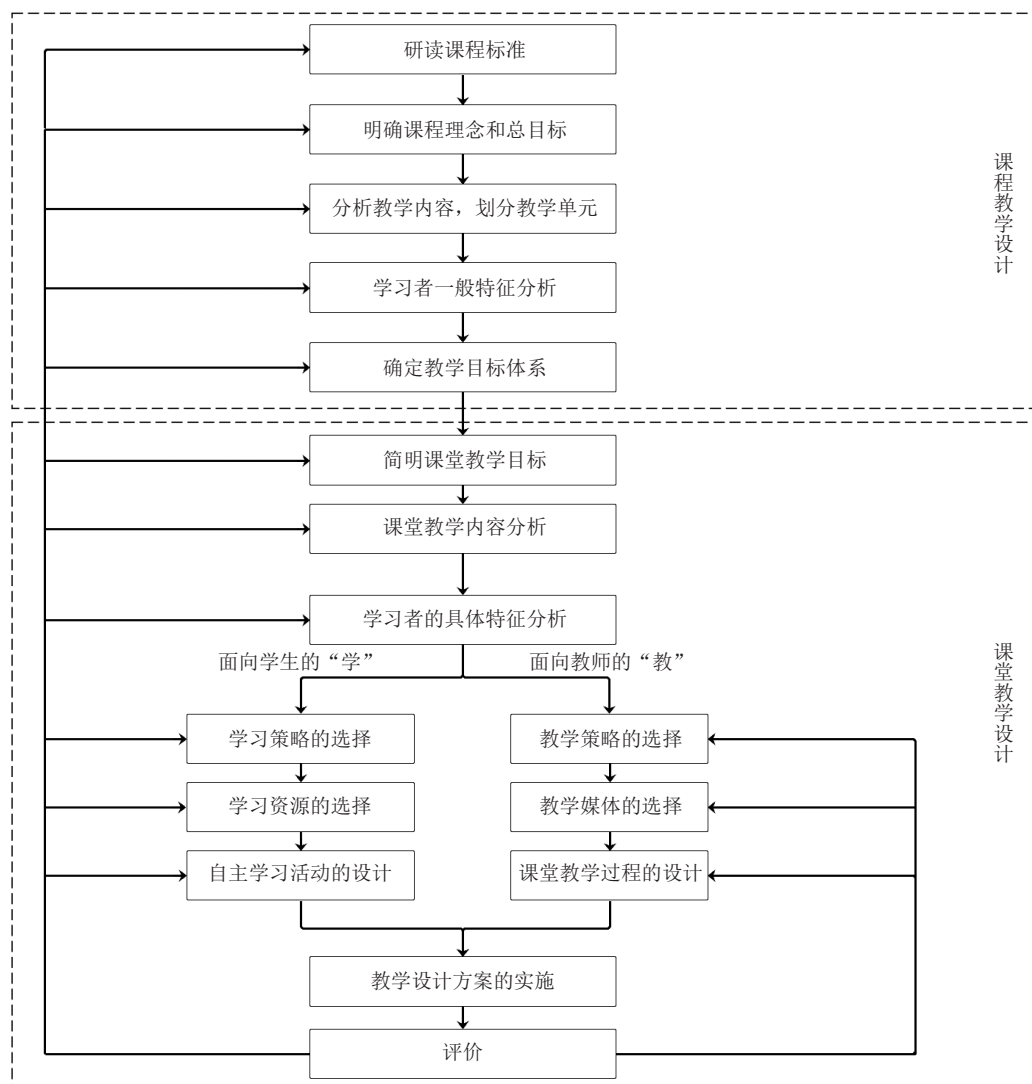


图1-9 信息化教学设计模式

该模式不仅包含具体的课堂教学设计过程，也包含在学期初、教学前对整个课程进行宏观的规划过程。很多人对于信息化教学可能存在误解，认为这种模式只是教学时应用多媒体课件，或是将信息技术与课堂教学简单叠加、整合，流于表面和形式。而我们以该模式为例，分析一下信息化教学设计的特点、优势。

(1) 学习者的具体特征指的是会影响本节课教学效果的与学习者相关的因素，在其他的教学设计模式中，学习者的具体特征主要包含对认知水平、兴趣、爱好等的分析，而在该模式下学习者的具体特征还包括对学生信息素养的评估，具体包括具有的信息与信息技术的基本知识和基本技能，运用信息技术进行学习、合作、交流和解决问题的能力，以及信息的意识和社会伦理道德问题。也就是说，信息素养包括的内容是信息意识、信息知识、信息能力、信息道德。

(2) 该模式下的教学媒体是教学过程中可以使用的媒介或者工具。现代教学媒体是由两个相互联系的要素构成：一是硬件或现代教学设备，即用以储存和传递教学信息的多种教学机器，如幻灯机、投影仪、录音机、电影放映机、电视机、录像机、电子计算机、iPad等；二是软件，又称教材，即录制或承载了教学信息各种影片、录像带、软盘等。利用教学媒体有利于优化教学，提高教学的效率，探索不同的教学模式。

(3) 学习资源指支持学生学习的工具、材料、设备等。该模式学习资源的选择已经不局限于传统教科书上的内容，网络教育社区、校园网等各种学习平台便可以共享各种学习资源。

### (三) 教学设计一般模式

美国研究者安德鲁斯和古德逊根据教学设计模式的特点进行分类，将教学设计模式分为整体型模式、任务定向型模式、处方型模式；美国研究者加斯塔夫斯林根据模式间相容关系进行分类，将教学设计模式分为以课堂为中心的模式、以教学产品为中心的模式、以系统为中心的模式、以组织为中心的模式；根据表述方式，教学设计模式又可分为概念化模式、程序化模式、数学化模式和处方化模式。其实，教学设计还有多种不同的模式，教学设计的一般模式如图1-10所示。

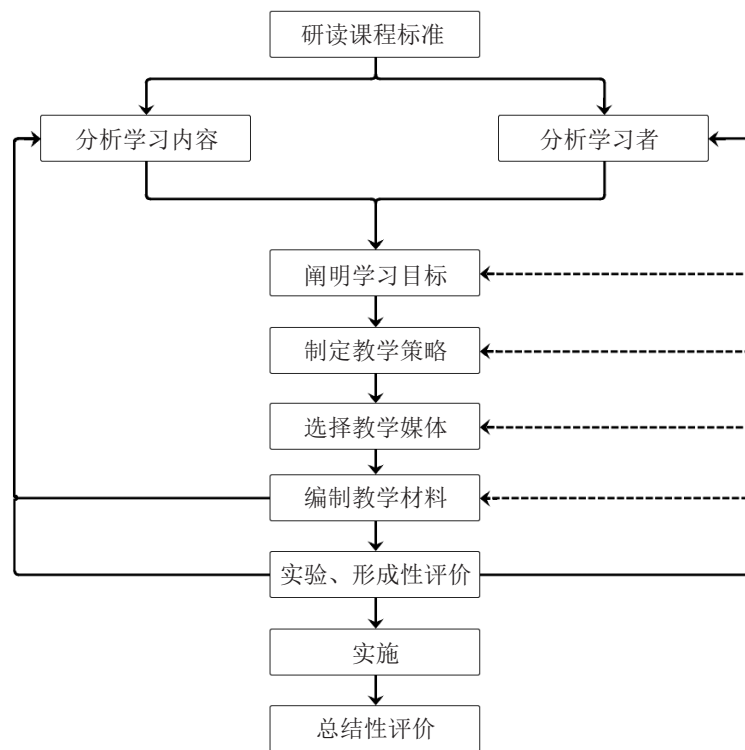


图1-10 教学设计一般模式<sup>[1]</sup>

[1] 顾明远. 教育大辞典[M]. 上海: 上海教育出版社, 1998: 719.

### 三、数学教学设计模式

教师在进行数学教学设计时，可自由选择多种模式，而教学设计模式发展到一定阶段有可能演变成“定势”。教师在进行教学设计时不能唯“模式”是从，更不能唯“单一模式”是从，应该根据授课的内容，根据不同的课型选择合适的教学设计模式。基于以上教学设计模式的研究，我们结合数学学科特点和学生的学情，并将共同要素与随着时代变化而衍生出的要素进行提取，得到一般数学教学设计的几大要素：学生学情分析、数学教学内容、数学教学目标、数学教学方法、数学教学活动、数学教学媒体、数学教学评价等。

基于数学教学设计对象差异，我们将数学教学设计分为微观、中观、宏观三个层面。微观数学教学设计是对某个知识点或是某一节课的内容进行系统的设计，如微课教学设计；中观数学教学设计是对具有内在关联的知识进行系统的设计，这种设计介于课时与课程之间，如单元教学设计；宏观教学设计是对某一本教材或是某一个学段的知识进行系统的设计，如整体性教学设计。

#### (一) 数学与课时微课教学设计

##### 1. 数学微课教学设计

正是由于现代信息技术的发展，一些碎片化的学习内容、学习过程以视频等载体呈现，我们通常称这种形式为微课。基于中小学生的认知规律与学习习惯，微课的时长很短，一般设定为5~8分钟，教学的内容也设置得很少，只针对教学过程中的某一个知识点，甚至是知识点中的某个重点、难点。作为一种网络教育资源，微课并不要求学生坐在教室，学生在任意一个有移动设备的场所都可以进行一对一地学习。学生是否进行学习，何时开始学习，学习的时长都是自主控制的。虽然微课的时长、内容相比传统课堂来说既短又少，但是教师对微课设计依然要投入很大的精力，在设计微课时要充分考虑数学教学设计模式中的要素，并结合微课特点，设计出具有数学特色的微课教学。

##### 2. 数学课时教学设计

我们把对一节传统数学课堂的设计称为课时教学设计，它是设计教学的一个基本单位，一般把教材编排的一节内容作为本节课的教学内容，所做的计划只是针对本节课的内容。课时教学设计在逐步深入研究的过程中被划分得更加细致，分为了概念、命题、习题等不同课型的教学设计。课时教学设计乃至更为细化的教学设计是完成单元教学设计与整体教学设计的基础。

#### (二) 数学单元教学设计

单元教学是19世纪末欧美新教育运动的产物，20世纪80年代末才引起人们的关注。

单元教学主张学习内容的完整性，用系统论的方法对教材中“具有某种内在关联性”的内容进行分析、重组、整合，形成“大单元”，而不是将教材割裂为一课一课的形式<sup>[1]</sup>。与数学课时教学设计相比，数学单元教学设计更具有弹性，既不必拘泥于某一课时的内容而缺乏对整体性的把握，又不必面对宏观整体设计下庞大的知识体系而对教学内容的安排无从下手，成为值得提倡的教学模式，在结合倪昌国<sup>[2]</sup>提出的单元教学目标的整体性、知识的系统性、训练的序列性等特征后，单元教学设计的系统性特征显得尤为突出。在确定单元的主题基础上，按照“整体设计—依序实施—整体评价”的实施流程，系统合理地整合教学内容、设定教学目标、安排教学活动流程，最终实现对单元的系统整体性评价。

### (三) 数学整体教学设计

“整体论”是1926年由政治家斯穆茨首次提出的。随着该理论的不断演化和发展，贝塔朗菲的系统论作为一般方法论影响全球，之后整体性教学理念也被教育界提出。何小亚指出，建构良好的认知结构需要注意整体性教学，“把新知识纳入原有的观念系统进行整体考虑，使新知识与原有的相关知识相联系，并把这些有联系的知识点重新组织为一个大的知识组块，既有利于知识的保持，又有利于知识的检索与应用”<sup>[3]</sup>。整体性教学设计不仅强调对整个单元进行设计，也强调对具有纵向关联的单元或是具有相同数学思想方法、相似教学经验的模块进行关联思考和整体设计。在整体教学设计下，学生可以将自己习得的经验、问题研究的思路进行迁移，进而辅助完成后续的学习。此时，教学设计的视野不再停留于某个知识点、某节课、某个单元，而是拓展到整本数学教材，甚至是整个学段。整体性数学教学设计对教师的要求很高，需要教师掌握知识的“生长点”与“延伸点”，通晓结构知识体系，站在系统论的高度来完成教学。

[1] 吕世虎, 吴振英, 杨婷, 等. 单元教学设计及其对促进数学教师专业发展的作用[J]. 数学教育学报, 2016(5): 16-21.

[2] 倪昌国. 关于单元教学的回顾和思考: 兼谈单元教学和“点面法”[J]. 江苏教育学院学报(社会科学版), 1997(1): 103-104.

[3] 何小亚. 建构良好的数学认知结构的策略[J]. 数学教育学报, 2002(1): 24-27+85.