高等院校大学数学系列教材

微积分（第3版）

主　编　张海燕　穆志民
副主编　刘　琦　孙丽洁

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用。微分方程，空间解析几何简介，多元函数微分学及其应用，二重积分等，书末还附有基本初等函数图形、初等数学常用公式、习题参考答案。

本书的特色是首次将思政元素融入微积分教材之中，在编写中力求结构严谨、由浅入深、通俗易懂，在强调基本概念的同时更注重"思政元素"在高等数学教学中的育人作用。本书是清华大学出版社"十四五"规划教材，适合高等院校非数学专业的学生使用，也可供具有相当数学基础的读者自修之用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/张海燕，穆志民主编.—3版.—北京：清华大学出版社，2022.11
高等院校大学数学系列教材
ISBN 978-7-302-62057-0

Ⅰ.①微… Ⅱ.①张… ②穆… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2022)第194618号

责任编辑：佟丽霞
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-83470000　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市铭诚印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：18.5　　**字　　数**：446千字
版　　次：2015年8月第1版　2022年12月第3版　　**印　　次**：2022年12月第1次印刷
定　　价：56.00元

产品编号：091997-01

前　言

本书在 2017 年第 2 版的基础上修订了部分内容，着力将教书育人落实于课堂教学及教材之中，梳理出多个扩展阅读以“数学文化”“数学之美”“人生启迪”等形式融入本书之中，本书也是天津农学院特色教材建设研究项目“基于‘新工科、新医科、新农科、新文科’背景下的大学数学课程建设体系中特色教材的开发建设与研究”(项目编号：2021-C-02)的研究成果。

参加第 3 版编写和修订工作的是天津农学院的教师：张海燕、穆志民、刘琦、孙丽洁、徐利艳、崔军文、朱文新、俞竺君、王伟晶。全书的统稿与审阅工作由张海燕、穆志民负责完成。

天津农学院基础科学学院及教材科的领导及老师在本教材的出版过程中给予了大力支持，在此一并致谢！

教材中难免不妥之处，敬请读者不吝指正。

编　者

2022 年 2 月于天津

第 2 版前言

第 1 版前言

目　录

第 1 章

函数、极限与连续

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学是以变量作为研究对象的一门数学。函数刻画的就是变量之间的某种依赖关系，用极限来研究函数是高等数学的一种基本方法。本章在复习函数有关内容的基础上，着重学习函数极限的概念及其求法，使读者能够熟练掌握这些内容，为后面的学习打下良好的基础。

1.1 函数的基本概念

1.1.1 函数的定义

在一个问题中往往同时存在几个变量在变化，而这些变量并不是孤立地变化的，它们相互联系并遵循着一定的变化规律，下面先来分析两个例子。

例 1 圆的面积。考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系。大家知道，它们之间符合如下公式：

$$A=\pi r^2。$$

当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式可以唯一确定圆的面积 A 的相应数值。

例 2 自由落体运动。设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s。假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 s 与 t 之间的相依关系符合如下公式：

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中，g 是重力加速度。假定物体着地的时刻为 $t=T$，那么当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时，由上式可以唯一确定 s 的相应数值。

撇开上面这两个例子中所涉及变量的实际意义，就会发现，它们都反映了两个变量之间的相依关系，这种相依关系就是当其中的一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有唯一确定的数值与之对应，两个变量之间的这种相依关系就是函数概念的实质。

定义 1 设 D 为非空实数集，若存在一个对应法则 f，使得对 D 中的任意实数 x，按照法则 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，记作 $y=f(x)$，y 称为函数在 x 处的函数值。其中 x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域。

函数值的集合

$$f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记作 R_f。

表示函数的记号是任意选取的，除了常用的记号 f 外，还可以用其他字母，例如 ϕ，φ 等，这时函数就分别记作 $y=\phi(x)$，$y=\varphi(x)$ 等。有时还直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$。但应该注意，在同一问题中，讨论几个不同的函数时，为了表示它们的区别，需要用不同的符号来表示函数。例如，函数 $y=y_1(x)$，$y=y_2(x)$。

函数的对应法则和函数的定义域是函数的两个要素。如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的。例如，函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 不相同，因为二者的对应法则不同。

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义而确定的。如例1中，定义域 $D=(0,+\infty)$；例2中，定义域 $D=[0,T]$。

在高等数学中，有时不考虑函数的实际意义，而研究用抽象解析式来表示的函数，这时我们约定：函数的定义域就是使得函数解析式有意义的一切自变量的全体构成的集合。例如，函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为闭区间 $[-2,2]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为开区间 $(-1,1)$。

函数除了用解析式来表示外，还可以用表格、图像来表示，因此函数的表示方法主要有三种：表格法、图像法、解析法（公式法）。

如果函数的自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值有且只有一个，则称这种函数为单值函数；否则称为多值函数。本书中所讨论的函数若无特殊说明，均指单值函数。

在函数中，有时一个函数要用几个表达式来表示，这种在定义域的不同范围内，对应法则用不同的表达式来表示的函数，称为分段函数。例如，函数 $y=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0,\\ e^x, & x<0\end{cases}$ 就是一个分段函数。

下面给出几个函数的例子。

例3　常函数 $y=2$，其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=\{2\}$。它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图1.1所示。

例4　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=[0,+\infty)$。它的图形是两条从原点出发的射线，如图1.2所示。

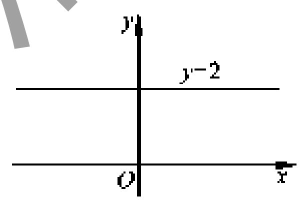

图　1.1

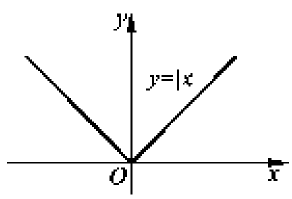

图　1.2

例5　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=\{-1,0,1\}$。它的图形是原点和两条平行于 x 轴的射线，如图 1.3 所示。对于任何实数 x，总有等式 $x=\text{sgn}x\cdot|x|$ 成立。

例 6 取整函数。设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$，例如

$$\left[\frac{4}{9}\right]=0,\quad [\sqrt{2}]=1,\quad [\pi]=3,\quad [-1]=-1,\quad [-3.6]=-4。$$

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=\mathbb{Z}$。它的图形为阶梯曲线，在 x 为整数值处发生跳跃，且跳跃的高度为 1，如图 1.4 所示。

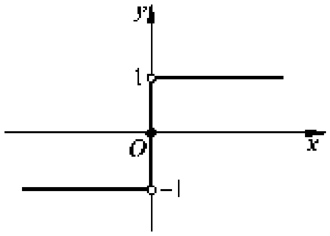

图 1.3

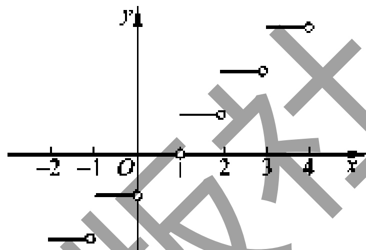

图 1.4

1.1.2 反函数与复合函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W。一般地，对于任一数值 $y\in W$，在 D 中有一个确定数值 x 与之对应，这个数值 x 适合关系：

$$f(x)=y。$$

此时，如果把 y 看作自变量，x 看作因变量，按照函数概念，得到一个新的函数 $x=\varphi(y)$，则称这个新的函数 $x=\varphi(y)$ 为原来函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$。相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数。习惯上，用字母 x 表示函数的自变量，用字母 y 表示函数的因变量。这样，反函数 $x=f^{-1}(y)$ 可表示为 $y=f^{-1}(x)$ 的形式。由于函数的实质是对应法则，我们改变的只是表示函数的自变量和因变量的字母，而没有改变函数的对应法则，所以函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 实质上还是同一个函数。

在同一个坐标平面上，直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称（见图 1.5）。因为如果 $P(a,b)$ 是函数 $y=f(x)$ 图形上的点，则 $Q(b,a)$ 就是函数 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点；反之，若 $Q(b,a)$ 是函数 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点，则 $P(a,b)$ 就是函数 $y=f(x)$ 图形上的点，而点 $P(a,b)$ 和点 $Q(b,a)$ 是关于直线 $y=x$ 对称的，故函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称。

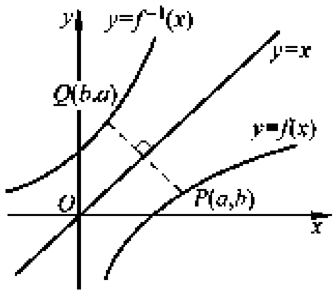

图 1.5

例如，对数函数 $y=\log_a x$ 的反函数是指数函数 $y=a^x$，二者的图形关于直线 $y=x$ 对称。

下面来讨论复合函数。

一般地，若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2、值域为 W_2，并且 $W_2\subset D_1$，那么对于每个数值 $x\in D_2$，有确定的数值 $u\in W_2$ 与之对应，而 $W_2\subset D_1$，相应地也有确定的数值 y 与数值 u 对应。即对于每个数值 $x\in D_2$，通过变量 u 有确定的数值 y

与之对应，这样我们就得到了一个以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$。其中 $y=f(u)$ 称为外层函数，$u=\varphi(x)$ 称为内层函数，u 称为中间变量。

例如，函数 $y=\sin x^2$ 就是一个由 $y=\sin u$ 与 $u=x^2$ 构成的复合函数，复合函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它也是内层函数 $u=x^2$ 的定义域。

必须注意，不是任何两个函数都能构成复合函数。例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数，因为内层函数 $u=2+x^2$ 的值域完全不在外层函数 $y=\arcsin u$ 的定义域内。

1.1.3　函数的基本性质

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $A\subset D$。如果存在正数 M，使得对于一切 $x\in A$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在数集 A 上有界，也称 $f(x)$ 为数集 A 上的有界函数；如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在数集 A 上无界，也称 $f(x)$ 为数集 A 上的无界函数。

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界函数。因为对于所有 x，都有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$。而函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是无界函数。

从几何图形上看，函数 $f(x)$ 在数集 A 上有界，就是函数 $f(x)$ 在数集 A 上的图形位于直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间。

有界函数的另一种等价定义如下。

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $A\subset D$。如果存在两个数 m，M，使得对于一切 $x\in A$，恒有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在数集 A 上有界。

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增函数（见图1.6）。区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调增区间。如果对于任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减函数（见图1.7）。区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调减区间。单调增函数与单调减函数统称为单调函数。单调增区间与单调减区间统称为单调区间。

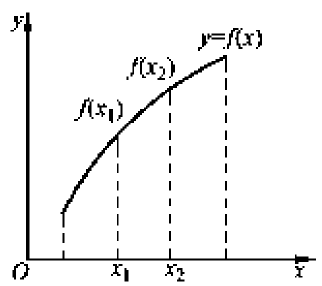

图　1.6

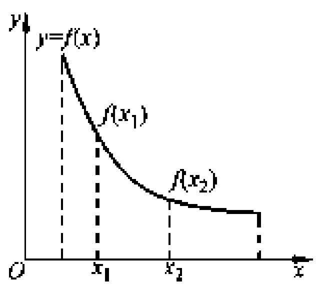

图　1.7

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减函数，在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增函数，但在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上不具有单调性。函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增函数。

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称(即若 $x\in D$，则 $-x\in D$)。如果对于任何 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x)\,(f(-x)=f(x))$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为奇(偶)函数。

例如，函数 $f(x)=\sin x$，$f(x)=x^3$ 是奇函数。函数 $f(x)=\cos x$，$f(x)=x^2$ 是偶函数。函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 既非奇函数也非偶函数。

由函数奇偶性的定义可知，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于坐标原点对称。

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 T，使得对于任意 $x\in D$，$x+T\in D$，恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期。

通常所说的周期均指其最小正周期。例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 的周期均为 $T=2\pi$。函数 $\tan x$，$\cot x$ 的周期均为 $T=\pi$。

思考题 任何周期函数都有最小正周期吗?

1.1.4 初等函数

基本初等函数是指中学时所学过的以下六类函数，由于它们在高等数学中具有非常基础但很重要的地位，希望读者熟练掌握这些函数的性质及其图形等，这里不再一一赘述。

(1) 常函数： $y=C$(C 为常数)。

(2) 幂函数： $y=x^{\mu}$(μ 是常数)。

(3) 指数函数： $y=a^x\,(a>0,a\neq1)$。

(4) 对数函数： $y=\log_a x\,(a>0,a\neq1)$。

(5) 三角函数： $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$。

(6) 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$。

所谓**初等函数**，是指由基本初等函数经有限次四则运算及有限次复合所构成的，并可用一个式子来表示的函数。

例如，函数 $y=\sin(2x+1)$，$y=\log_a(1+\sqrt{1+x^2})$，$y=10^{\arcsin x}$ 等都是初等函数。

在实际应用中也常常遇到非初等函数。分段函数就是一种常见的非初等函数，例如，$y=\begin{cases}\sin 2x, & x\geqslant 0,\\ 1+x^2, & x<0\end{cases}$ 就是一个非初等函数。

习 题 1.1

1. 求下列函数的表达式：

(1) 已知 $f(x+1)=x^2+x$，求 $f(x)$；

(2) 已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求 $f(x)$;

(3) 已知 $2f(x)+f(1-x)=x^2$,求 $f(x)$;

(4) 已知 $f(x_1+x_2)=\sin x_1\cos x_2+\cos x_1\sin x_2$,求 $f(x)$。

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;　　(2) $y=\tan(x+2)$;

(3) $y=\arcsin(x-3)$;　　(4) $y=\ln(x+1)$;

(5) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　　(6) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$。

3. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x)=1, g(x)=\sec x^2-\tan x^2$。

4. 判断下列函数在所给区间上的单调性:

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{\cos x}, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;　　(2) $f(x)=\mathrm{e}^{-\sin x}, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;

(3) $f(x)=\sin(\sin x), x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;　　(4) $f(x)=\cos(\sin x), x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$。

5. 下列函数中哪些是偶函数?哪些是奇函数?哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y=x(x-1)(x+1)$;　　(2) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

(3) $y=\sin x-\cos x+1$;　　(4) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$;

(5) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;　　(6) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$。

6. 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期。

(1) $y=\cos(x-2)$;　　(2) $y=\sin 4x$;

(3) $y=2+\sin\pi x$;　　(4) $y=x\cos x$;

(5) $y=\cos^2 x$。

7. 设 $f(x)$ 的定义域为 $D=[0,1]$,求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;　　(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)(a>0)$;　　(4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$。

8. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f_4(x)=f(f(f(f(x))))$。

9. 讨论狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

的单调性、有界性、周期性。

10. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$上的,证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

11. 设$f(x)$是定义在$(-l,l)$内的奇函数,若$f(x)$在$(0,l)$内单调增加,证明$f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加。

12. 在下列各题中,求所给函数构成的复合函数,并求复合函数在自变量给定取值x_1和x_2的函数值。

(1) $y=\ln u, u=1+x^2, x_1=0, x_2=2$;　　(2) $y=u^2, u=\sin x, x_1=0, x_2=\frac{\pi}{2}$;

(3) $y=\sin u, u=2x, x_1=\frac{\pi}{8}, x_2=\frac{\pi}{4}$;　　(4) $y=\mathrm{e}^u, u=x^2, x_1=0, x_2=1$。

13. 设函数$f(x)$的定义域为$(-l,l)$,证明:

(1) $F(x)=f(x)+f(-x)(x\in(-l,l))$为偶函数;

(2) $G(x)=f(x)-f(-x)(x\in(-l,l))$为奇函数;

(3) 函数$f(x)$可以表示为奇函数与偶函数之和。

1.2 数列的极限

高等数学的研究对象是变量,为了很好地掌握变量的变化规律,不仅要考察变量的变化过程,更重要的是要通过它的变化过程来判断它的变化趋势,而变量确定的变化趋势就是变量的极限。本节研究数列的极限。

1.2.1 数列极限问题举例

极限概念是在求某些实际问题之精确值的过程中产生的。例如,我国古代数学家刘徽利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术,就是极限思想在几何学上的应用。

设有一个圆,首先作圆的内接正六边形,把它的面积记为A_1;再作内接正十二边形,其面积记为A_2;再作内接正二十四边形,其面积记为A_3;按此规律作下去。一般地,把内接正$6\times 2^{n-1}$边形的面积记为$A_n(n\in\mathbb{N}^+)$,这样就得到一列内接正多边形的面积:

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$$

它们构成一列有次序的数,当n越大,内接正多边形与圆的差别就越小,从而用A_n作为圆面积的近似值也就越精确。因此,设想n无限增大(记为$n\to\infty$,读作n趋于无穷大)时,内接正多边形就无限接近于圆,同时A_n也无限接近于某个确定的数值,这个确定的数值就是圆的面积。在数学上这个确定的数值称为这一列有序数(所谓数列)$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$在$n\to\infty$时的极限。在求圆面积的问题中,我们看到,正是这个数列的极限才精确地表达了圆的面积。

上述实际问题的解决就体现了极限的思想,如今极限的方法已经成为高等数学中的一种基本方法,应用非常广泛。

1.2.2 数列的概念

按照一定的法则，依次由自然数 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 编号排成的一列数

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

称为数列，记作 $\{x_n\}$。数列中的每一个数称为数列的项，第 n 项 x_n 称为数列的一般项或通项。例如：

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

$$2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$$

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

都是数列，它们的通项分别为

$$x_n=\frac{1}{n},\quad x_n=\frac{n+1}{n},\quad x_n=(-1)^{n+1}。$$

数列 $\{x_n\}$ 可看作是自变量为正整数 n 的函数，即

$$x_n=f(n)。$$

它的定义域是全体正整数，当自变量 n 依次取 $1,2,3,\cdots$ 时，对应的函数值就构成了一个数列 $\{x_n\}$。

1. 单调数列

如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件：

$$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 为单调递增数列。

如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件：

$$x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 为单调递减数列。

单调递增数列和单调递减数列统称为单调数列。例如，数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是一个单调递减数列，数列 $\{2^n\}$ 是一个单调递增数列。

2. 有界数列

对于数列 $\{x_n\}$，如果存在正数 M，使得对任何正整数 n，都有

$$|x_n|\leqslant M$$

成立，则称数列 $\{x_n\}$ 是有界数列；否则，称数列 $\{x_n\}$ 是无界数列。例如，数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$，$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$，$\{(-1)^{n+1}\}$ 都是有界数列，数列 $\{2^n\}$ 是无界数列。

对于给定的数列 $\{x_n\}$，我们要讨论的问题是：当项数 n 无限增大（即 $n\to\infty$）时，对应的项 x_n 是否能够无限趋近于或等于某一个确定的常数，如果能够，那么这个常数是多少？这就是数列极限所要研究的问题。

1.2.3 数列极限的定义

对于给定的数列 $\{x_n\}$，如果当项数 n 无限增大（$n\to\infty$）时，对应的项 x_n 无限趋近于或等

于一个确定的常数 A，则称常数 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或 $x_n\to A(n\to\infty)$。例如，数列 $\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$ 的一般项 $x_n=1+\dfrac{1}{n}$，从直观上可以看出，当项数 n 无限增大时，数列的项 x_n 无限接近常数 1。也就是说，常数 1 是数列 $\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$ 的极限。

显然，对于比较简单的数列，很容易从数列通项的变化趋势上分析出数列的极限。当然如果数列的通项比较复杂，要想从直观上得出数列的极限就不太容易了，况且上述定义只是一种描述性定义，不够准确和严谨，为了准确地描述“无限增大”和“无限趋近”的意义，揭示数列极限的实质，我们必须用精确的数学语言来描述这一概念。

我们知道，两个数之间的接近程度可以用这两个数之差的绝对值来度量。例如，$|b-a|$ 越小，说明数 a 与 b 越接近。

再来考察数列 $\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$，从数列的变化趋势来看，当 $n\to\infty$ 时，有 $x_n\to 1$。这就意味着，当项数 n 充分大时，数 x_n 与 1 可以任意接近，即 $|x_n-1|$ 可以任意地小。换句话说，只要 n 充分大，$|x_n-1|=\dfrac{1}{n}$ 就可以任意小于预先给定的正数 ε。由此可知，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有不等式

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$$

成立。这就是当 $n\to\infty$ 时，数列 $x_n=\dfrac{1+n}{n}\to 1$ 的实质。由此推广到一般，便得到数列极限的精确定义。

定义 1　给定数列 $\{x_n\}$，a 为一常数，如果对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$。此时也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a。反之，称数列 $\{x_n\}$ 没有极限，或称数列 $\{x_n\}$ 发散。

在上面定义中，正数 ε 的任意性很重要，因为只有这样，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 才能表达出 x_n 与 a 无限接近的意思。此外还应注意，定义中的正整数 N 与正数 ε 有关，正整数 N 随着 ε 的给定而选定。

从几何上来看，常数 a 和数列 $\{x_n\}$ 的各项都可用数轴上的对应点来表示。因为 $|x_n-a|<\varepsilon$ 等价于 $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$，所以数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限的几何解释就是：对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，从第 N 项以后的所有项 $x_{N+1},x_{N+2},\cdots$ 的对应点都落在以 a 为中心、长度为 2ε 的开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内，至多有有限个点在此区间之外（见图 1.8）。

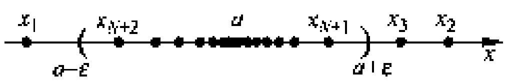

图　1.8

通常，我们将开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内的所有点构成的集合称为点 a 的 ε 邻域，记作 $U(a,\varepsilon)$。点 a 称为邻域中心，ε 称为邻域半径。将点 a 的 ε 邻域中的邻域中心 a 去掉后所得到的集合称为点 a 的去心 ε 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\varepsilon)$。因此，数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的几何解释也可

以说成：对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，第 N 项后的所有点都落在点 a 的 ε 邻域内。

数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义可简单表述为：

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$。

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$。

证 由于 $|x_n-a|=\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$，对于任意给定的正数 ε，要使 $\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，故取正整数 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1。$$

例 2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0$。

证 由于 $|x_n-a|=\left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|=\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n+1}$，对于任意给定的正数 ε（设 $\varepsilon<1$），要使 $|x_n-a|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$，故取正整数 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0。$$

例 3 设 $|q|<1$，证明等比数列 $1,q,q^2,\cdots,q^{n-1},\cdots$ 的极限是 0。

证 对于任意给定的 $\varepsilon>0$（设 $\varepsilon<1$），由于 $|x_n-a|=|q^{n-1}-0|=|q|^{n-1}<\varepsilon$，取自然对数 $(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$，解得 $n>1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，故取正整数 $N=\left[1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $|q^{n-1}-0|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}q^{n-1}=0。$$

通过以上几个例子，可总结出利用定义证明数列极限的一般步骤如下：

(1) 对于 $\forall\varepsilon>0$，假设 $|x_n-a|<\varepsilon$。

(2) 从上述假设的不等式出发，解出 $n>f(\varepsilon)$（一般可采用加强不等式的方法）。

(3) 取正整数 $N\geqslant f(\varepsilon)$ 即可。特别值得注意的是，对于任意给定的正数 ε，能求出满足定义要求的正整数 N 即可，它是不唯一的，也没有必要是最小的。

1.2.4 数列极限的性质

定理 1（极限的唯一性） 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限唯一。

证 反证法。假设 $x_n\to a$ 及 $x_n\to b$，且 $a<b$。取 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}>0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，故存在

正整数 N_1，使得对于 $n>N_1$ 的一切 x_n，恒有不等式

$$|x_n-a|<\frac{b-a}{2}$$

成立。

因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，故存在正整数 N_2，使得对于 $n>N_2$ 的一切 x_n，恒有不等式

$$|x_n-b|<\frac{b-a}{2}$$

成立。取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，有不等式

$$x_n<\frac{a+b}{2}\text{ 与 }x_n>\frac{a+b}{2}$$

同时成立，这是矛盾的。故 $a=b$。

例 4 证明数列 $x_n=(-1)^{n+1}(n=1,2,\cdots)$是发散数列。

证 反证法。假设该数列收敛，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。由数列极限的定义，对于 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有不等式$|x_n-a|<\frac{1}{2}$成立，即当 $n>N$ 时，所有 x_n 都落在开区间$\left(a-\frac{1}{2},a+\frac{1}{2}\right)$内，但这是不可能的。因为当 $n\to\infty$时，x_n 总是在 1 和 -1 之间跳动，而不可能同时属于长度为 1 的开区间$\left(a-\frac{1}{2},a+\frac{1}{2}\right)$内，故数列$\{(-1)^{n+1}\}$发散。

定理 2(**收敛数列的有界性**) 如果数列$\{x_n\}$收敛，则数列$\{x_n\}$一定有界。

证 由于数列$\{x_n\}$收敛，故不妨假设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。由数列极限的定义，对于给定的 $\varepsilon=1$，存在正整数 N，使得对于 $n>N$ 的一切 x_n，总有$|x_n-a|<\varepsilon=1$。故当 $n>N$ 时，有

$$|x_n|=|x_n-a+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|。$$

取 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,|x_3|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$，则对于一切正整数 n，恒有不等式$|x_n|\leqslant M$ 成立，所以数列$\{x_n\}$有界。

根据该定理，如果数列$\{x_n\}$无界，那么数列$\{x_n\}$一定发散。需要注意，如果数列$\{x_n\}$有界，却不能断定它一定收敛。例如，数列$\{(-1)^n\}$虽然是有界数列，但它却是发散的。所以数列有界是数列收敛的必要非充分条件。

定理 3(**收敛数列的保号性**) 如果数列$\{x_n\}$收敛于 a，且 $a>0$(或 $a<0$)，则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n>0$(或 $x_n<0$)。

证 仅证明 $a>0$ 的情形。由数列极限的定义，对于 $\varepsilon=\frac{a}{2}>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<\frac{a}{2},$$

从而

$$x_n>a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}>0。$$

推论 1(**收敛数列的保序性**) 如果数列$\{x_n\}$收敛于 a，数列$\{y_n\}$收敛于 b，且 $a>b$，则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n>y_n$。

推论 2 如果数列$\{x_n\}$从某项起有$x_n\geqslant 0$(或$x_n\leqslant 0$),且数列$\{x_n\}$收敛于a,则$a\geqslant 0$(或$a\leqslant 0$)。

证 仅证明$x_n\geqslant 0$的情形。设数列$\{x_n\}$从N_1项起,即当$n>N_1$时,有$x_n\geqslant 0$成立。现用反证法证明。假设$a<0$,则由定理3知,存在正整数N_2,当$n>N_2$时,有$x_n<0$成立。现取$N=\max\{N_1,N_2\}$,则当$n>N$时,有$x_n\geqslant 0$与$x_n<0$同时成立,这是矛盾的,所以必有$a\geqslant 0$。

最后,介绍子数列的概念以及收敛数列与其子数列之间的关系。

在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序,这样得到的一个新数列称为原数列$\{x_n\}$的子数列(或子列)。

设在数列$\{x_n\}$中,第一次抽取x_{n_1},第二次在x_{n_1}之后抽取x_{n_2},第三次在x_{n_2}后抽取x_{n_3},……,这样一直继续下去,得到一个新数列

$$x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k},\cdots$$

这个新数列$\{x_{n_k}\}$称为数列$\{x_n\}$的一个子数列(或子列)。

注意 由子数列的定义可知,x_{n_k}是子数列的通项,它是子数列$\{x_{n_k}\}$的第k项,而在原数列$\{x_n\}$中却是第n_k项,显然$n_k\geqslant k$。

定理 4(收敛数列与其子数列间的关系) 如果数列$\{x_n\}$收敛于a,那么它的任一子数列也收敛于a。

证 设数列$\{x_{n_k}\}$是数列$\{x_n\}$的任一子数列。

由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,故对于任意给定的正数$\varepsilon$,存在正整数$N$,当$n>N$时,有不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立。

取$K=N$,则当$k>K$,即$n_k>n_K=n_N\geqslant N$时,恒有不等式

$$|x_{n_k}-a|<\varepsilon$$

成立,故$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$。

由定理4可知,如果数列$\{x_n\}$中有两个子数列收敛于不同的极限或有一个子数列极限不存在,那么原数列$\{x_n\}$一定发散。

例如,数列$\{x_n=(-1)^{n+1}\}$的子数列$\{x_{2k-1}\}$收敛于1,而子数列$\{x_{2k}\}$收敛于-1,因此数列$\{x_n=(-1)^{n+1}\}$是发散的。同时这个例子也说明,一个发散的数列也可能有收敛的子数列。

再如,数列$1,2,\dfrac{1}{3},4,\dfrac{1}{5},\cdots,n^{(-1)^n},\cdots$中有一个发散的子数列$x_{2k}=2k$,因此数列$x_n=n^{(-1)^n}$发散。

【数学文化】

刘徽,我国魏晋时期杰出的数学家,早在公元3世纪就给出了计算圆的面积的方法——割圆术。所谓"割圆术",就是用圆内接正多边形的面积去无限逼近圆面积的一种方法。这是一种朴素的极限思想,通过无限分割,无穷累加来近似得到圆的面积。刘徽的"割圆术"方法将圆周率精确到小数点后三位,这是当时世界上圆周率最精确的数据。南北朝时期数学

家祖冲之又在刘徽研究的基础上,将圆周率精确到了小数点后7位,这一成就比欧洲人要早一千多年。

习　题　1.2

1. 观察下列数列$\{x_n\}$的变化趋势,写出它们的极限:

(1) $x_n=\dfrac{1}{3^n}$;　(2) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$;　(3) $x_n=2+\dfrac{1}{n^2}$;

(4) $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$;　(5) $x_n=n(-1)^n$。

2. 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$;　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{0.999\cdots9}_{n个}=1$。

3. 设$|x|<1$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$。

4. 设数列$\{x_n\}$有界,又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$。

5. 对于数列$\{x_n\}$,若$x_{2k}\to a(k\to\infty)$,$x_{2k+1}\to a(k\to\infty)$,证明$x_n\to a(n\to\infty)$。

6. 如果数列$\{x_n\}$收敛于a,数列$\{y_n\}$收敛于b,且$a<b$,证明存在正整数N,当$n>N$时,有$x_n<y_n$。

7. 如果数列$\{x_n\}$从某项起有$x_n\leqslant 0$,且数列$\{x_n\}$收敛于a,证明$a\leqslant 0$。

8. 证明数列$x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$是发散的。

1.3　函数的极限

在1.2节中研究了数列的极限,因为数列$\{x_n\}$可看成是自变量为正整数n的特殊函数$x_n=f(n)$,所以我们把数列的极限问题推广到一般的函数上,便得到一般函数的极限问题,这就是本节所要研究的主要内容。

函数的极限实质上就是研究在自变量的某种变化趋势下相应的函数值的变化趋势,所以函数值的变化趋势是由自变量的变化趋势所决定的。自变量的变化趋势一般可分两种情形:①自变量的绝对值$|x|$无限增大,即x趋向于无穷大(记作$x\to\infty$);②自变量x任意接近于一个常数x_0或者说趋近于有限值x_0(记作$x\to x_0$)。下面我们分别就这两种情形来讨论函数的极限。

1.3.1　自变量趋于无穷大时函数的极限

与数列极限的意义类似,对于函数$y=f(x)$,如果当自变量x趋向于无穷大时,对应的

函数值无限接近于或等于某个确定的常数，那么这个确定的常数称为函数 $f(x)$ 在自变量 x 趋于无穷大时的极限，其精确定义如下。

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $|x|>M(M>0)$ 时有定义，A 为常数。如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 $X(X\geqslant M)$，使得对于适合 $|x|>X$ 的一切 x，恒有不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty)。$$

如果 $x>0$ 且趋向于无穷大(记作 $x\to+\infty$)，那么只要把上面定义中的“$|x|>X$”改为“$x>X$”，便得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的定义。同样，如果 $x<0$ 且 $|x|$ 无限增大(记作 $x\to-\infty$)，那么只要把“$|x|>X$”改为“$x<-X$”，便得到 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义。

命题 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$。

例如，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在。

函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的定义可作如下简述：

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，存在正数 X，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的几何解释：对于任意给定的正数 ε，作直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$，得一带形区域，不论这一带形区域多么窄，总存在正数 X，使得只要 x 落入区间 $(-\infty,-X)$ 与 $(X,+\infty)$ 内时，所对应的函数 $y=f(x)$ 的图形就都落在这两条直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$ 之间(见图 1.9)。

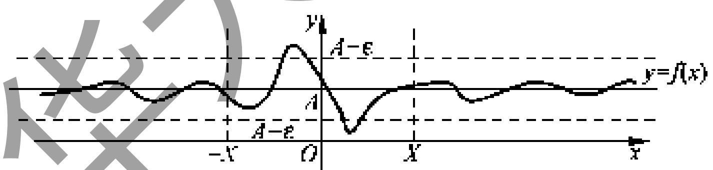

图 1.9

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$。

证 由于 $|f(x)-0|=\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{|x|}$，对于任意给定的正数 ε，要使 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$，只需 $\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$，即 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$，故取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$，当 $|x|>X$ 时，恒有不等式

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$$

成立，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$。

一般地，如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$，则称直线 $y=c$ 是函数 $y=f(x)$ 图形的水平渐近线。

1.3.2 自变量趋于有限值时函数的极限

在自变量 $x\to x_0$ 的过程中,对应的函数值 $f(x)$无限接近于或等于常数 A,就是$|f(x)-A|$能任意小。正如数列极限概念中那样,$|f(x)-A|$能任意小这件事可以用$|f(x)-A|<\varepsilon$(ε是任意给定的正数)来描述,因为函数值 $f(x)$无限接近于 A 是在 $x\to x_0$ 的过程中实现的,所以对于任意给定的正数 ε,要求充分接近 x_0 的 x 所对应的函数值 $f(x)$满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$;而充分接近 x_0 的 x 可表达为 $0<|x-x_0|<\delta(\delta>0)$,其中 δ 体现了 x 接近 x_0 的程度。

基于以上分析,下面给出当 $x\to x_0$ 时函数极限的定义。

定义 2 设函数 $f(x)$在 x_0 的某去心邻域内有定义,A 为常数。如果对于任意给定的正数 ε(无论它多么小),总存在正数 δ,使得对于满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x,恒有不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立,则称常数 A 为函数 $f(x)$在 $x\to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0)。$$

在定义中,不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 表示自变量 x 与 x_0 很接近,但 $x\neq x_0$。所以当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$是否有极限与函数 $f(x)$在点 x_0 处是否有定义无关。

函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义可作如下简述:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的几何解释:对于任意给定的正数 ε,作直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$,得一带形区域,无论这一带形区域多么窄,总存在点 x_0 的某去心 δ 邻域,使得只要当 x 落入该邻域内时,其所对应的函数 $y=f(x)$的图形就落在这两直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$ 之间(见图 1.10)。

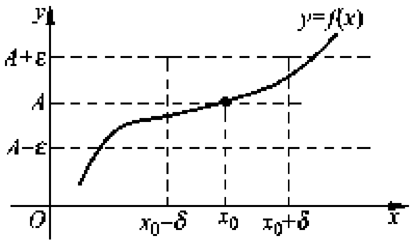

图 1.10

例 2 证明$\lim\limits_{x\to x_0}c=c$,其中 c 为一常数。

证 由于$|f(x)-A|=|c-c|=0$,因此对于任意给定的正数 ε,可任取一正数 δ,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有不等式

$$|f(x)-A|=0<\varepsilon$$

成立,所以$\lim\limits_{x\to x_0}c=c$。

例 3 证明$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$。

证 由于$|f(x)-A|=\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right|=|(x+2)-4|=|x-2|$,对于任意给定的正数 ε,要使$\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon$,只需$|x-2|<\varepsilon$,故取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x-2|<\delta$ 时,恒有不等式

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon$$

成立，所以 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$。

在上述极限讨论中，自变量 x 是从 x_0 的左右两侧趋近于 x_0，但有时只能或只需考虑自变量 x 从 x_0 的一侧趋近于 x_0 的情形，这便是单侧极限（左极限和右极限）的概念。

如果 $x<x_0$ 且 x 趋近于 x_0（记作 $x\to x_0^-$）时，函数 $f(x)\to A$ 或 $f(x)=A$，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$。

类似地，如果当 $x>x_0$ 且 x 趋近于 x_0（记作 $x\to x_0^+$）时，函数 $f(x)\to A$ 或 $f(x)=A$，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$。

左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 的定义作如下简述：

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

命题　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$。

例4　给定函数

$$f(x)=\begin{cases}x-2, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+5, & x>0。\end{cases}$$

讨论当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是否存在。

解　由于左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2$，右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+5)=5$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在。

1.3.3　函数极限的性质

定理1（**函数极限的唯一性**）　如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么其极限唯一。

定理2（**函数极限的局部有界性**）　如果 $f(x)\to A(x\to x_0)$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$。

证　因为 $f(x)\to A(x\to x_0)$，所以对于 $\varepsilon=1$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon=1,$$

于是

$$|f(x)|=|f(x)-A+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|。$$

故函数 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$ 内有界。

定理3（**函数极限的局部保号性**）　如果 $f(x)\to A(x\to x_0)$，而且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在正数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）。

证　仅证明 $A>0$ 的情形。

因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，所以对于 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon=\frac{A}{2},$$

从而

$$f(x)>\frac{A}{2}>0。$$

推论 如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$),而且 $f(x)\to A(x\to x_0)$,那么 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$)。

证 仅证明 $f(x)\geqslant 0$ 的情形。假设上述论断不成立,即设 $A<0$,那么由定理 3 可知,存在 x_0 的某一去心邻域,在该邻域内 $f(x)<0$,这与 $f(x)\geqslant 0$ 的假定矛盾,所以 $A\geqslant 0$。

定理 4(函数极限与数列极限的关系) 如果 $f(x)\to A(x\to x_0)$,$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列,且 $x_n\neq x_0(n\in\mathbb{N}^+)$,那么函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛,且 $f(x_n)\to A(n\to\infty)$。

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

又因 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,故对上述 $\delta>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-x_0|<\delta$。

由假设 $x_n\neq x_0(n\in\mathbb{N}^+)$,故当 $n>N$ 时,有不等式 $0<|x_n-x_0|<\delta$ 成立,从而 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

本定理常常用来判断函数在某点处的极限不存在。

例 5 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在。

证 取数列

$$x'_n=\frac{1}{2n\pi}\to 0(n\to\infty),$$

$$x''_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0(n\to\infty)。$$

显然

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x'_n}=\lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi=\lim_{n\to\infty}0=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x''_n}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}1=1,$$

所以,根据定理 4 知,$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在。

习 题 1.3

1. 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$;

(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$;　　(4) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$。

2. 当 $x\to 2$ 时，$y=x^2\to 4$。问：δ 等于多少，使当 $|x-2|<\delta$ 时，$|y-4|<0.001$？

3. 设函数 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$，求 $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$。

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 3,\\ -ax, & x<3,\end{cases}$：(1) 求 $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$；(2) 若 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ 存在，a 应取何值。

5. 根据函数极限的定义证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$。

6. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，证明 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|a|$。举例说明反之不成立。

7. 根据极限的定义证明：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=A。$$

8. 根据极限的定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限、右极限存在并且相等。

9. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$，证明存在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$。

1.4 无穷小量与无穷大量

1.4.1 无穷小量

如果函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量，简称无穷小。因此只要在函数极限的定义中，令常数 $A=0$，便得到无穷小的精确定义。

定义 1 如果对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ（或正数 X），使得对于满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）的一切 x，恒有不等式

$$|f(x)|<\varepsilon$$

成立，则称函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量。

应该注意，无穷小量是以零为极限的变量，不能把它和很小的数（例如百万分之一）混为一谈，除零以外的任何常数都不是无穷小量，并且无穷小量还与自变量的某一变化过程有关系。否则，空谈某个变量是无穷小量是没有意义的。

函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 的无穷小量可作如下简述：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|<\varepsilon$。

特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 是 $n\to\infty$ 时的无穷小量。

例如，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，所以函数 $\dfrac{1}{x^2}$ 是 $x\to\infty$ 时的无穷小量；因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，所以函数 $x-1$ 是 $x\to 1$ 时的无穷小量；因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$，所以数列 $\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$ 是 $n\to\infty$ 时的无穷小量。

定理 1 在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)中,函数 $f(x)$ 极限等于 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$,其中 α 是无穷小量。

证 仅证明当 $x\to x_0$ 时的情形。

(1) 必要性

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon。$$

令 $\alpha=f(x)-A$,则 α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量,且

$$f(x)=A+\alpha,$$

故函数 $f(x)$ 等于它的极限 A 与一个无穷小量 α 之和。

(2) 充分性

设 $f(x)=A+\alpha$,其中 A 是常数,于是

$$|f(x)-A|=|\alpha|。$$

因为 α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量,则 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$,有

$$|f(x)-A|=|\alpha|<\varepsilon,$$

故常数 A 是 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限。

类似地可以证明当 $x\to\infty$ 时的情形。

【数学之美】

无穷小量是指以零为极限的量,这一概念让我们联想到了唐代著名诗人李白的一首诗“故人西辞黄鹤楼,烟花三月下扬州,孤帆远影碧空尽,唯见长江天际流”,这首诗亦诗亦画,意境深远,淋漓尽致地刻画了无穷小的意境,其中后两句描写的是孤船的帆影随着时间的变化慢慢消逝在天际边,读者能从多重感官来理解“无穷小”的概念。在这里“孤帆远影碧空尽”是极限的结果(碧空尽),而“唯见长江天际流”是极限的过程(天际流)。

1.4.2 无穷大量

如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大,则称函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大量,简称为无穷大。

定义 2 如果对于任意给定的正数 M(不论它多么大),总存在正数 δ(或正数 X),使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$)的一切 x,恒有不等式

$$|f(x)|>M$$

成立,则称函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大量。

应该注意,无穷大量是一个变量,不能把它与很大很大的常数(如一千万、一亿等)混为一谈,任何常数都不是无穷大量,并且无穷大量还与自变量的某一变化过程有关系。否则,空谈某个变量是无穷大量是没有意义的。

例如,函数 $\dfrac{1}{x-1}$ 是 $x\to1$ 时的无穷大量。

根据函数极限的定义,如果 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大量,那么函数 $f(x)$

在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的极限是不存在的，但为了讨论方便，我们通常也说"函数 $f(x)$的极限是无穷大"，并记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\left(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty\right)。$$

类似地，可定义正无穷大量和负无穷大量。

在无穷大的定义中，如果把"$|f(x)|>M$"换成"$f(x)>M$"，则称函数 $f(x)$是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的正无穷大量，并记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$)。

在无穷大的定义中，如果把"$|f(x)|>M$"换成"$f(x)<-M$"，则称函数 $f(x)$是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的负无穷大量，并记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$)。

无穷大量 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 的定义可作如下简述：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall M>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>M$。

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall M>0$，存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)|>M$。

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}=\infty$。

证 对于任意给定的正数 M，要使 $\left|\dfrac{1}{x-3}\right|>M$，只要 $|x-3|<\dfrac{1}{M}$，取 $\delta=\dfrac{1}{M}$，则对于适合不等式 $0<|x-3|<\delta=\dfrac{1}{M}$ 的一切 x，恒有不等式 $\left|\dfrac{1}{x-3}\right|>M$ 成立，所以 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}=\infty$。

直线 $x=3$ 是函数 $y=\dfrac{1}{x-3}$ 图形的铅直渐近线。

一般来说，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则称直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$图形的铅直渐近线。

定理 2(**无穷大量与无穷小量之间的关系**) 在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$为无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量；反之，如果 $f(x)$为无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量。

证 下面仅证明当 $x\to x_0$ 时的情形。

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，任意给定 $\varepsilon>0$，根据无穷大量的定义，对于 $M=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$，总存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>M=\dfrac{1}{\varepsilon}$，即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon$，所以函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量。

反之，设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，且 $f(x)\neq 0$，任意给定 $M>0$，根据无穷小量的定义，对于正数 $\varepsilon=\dfrac{1}{M}$，总存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|<\varepsilon=\dfrac{1}{M}$。由于 $f(x)\neq 0$，从而 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|>M$，所以函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大量。

类似地，可以证明当 $x\to\infty$ 时的情形。