

# 第 1 篇 压杆稳定性、静定结构的位移计算



## 平面体系的几何组成分析

### 本章学习目标

- 理解几何组成分析中的基本概念。
- 了解平面体系自由度的计算方法。
- 掌握平面几何不变体系的组成规则。
- 能对常见平面体系进行几何组成分析。

建筑结构是用来支承或传递荷载的,因此它的几何形状和位置必须是稳固的。具有稳固几何形状和位置的体系<sup>①</sup>,称为几何不变体系;反之,则称为几何可变体系。本章将研究如何判断平面体系为几何不变体系或可变体系。

## 1.1 几何组成分析的概念

### 1.1.1 名词解释

对于几何组成分析,首先要明确:体系的几何形状改变是指体系在杆件不发生变形的情况下,其几何形状发生改变;结构变形则指结构在外荷载作用下杆件截面上产生内力,从而引起的变形。结构的变形通常是微小的。在体系的几何组成分析中,不涉及杆件结构的变形问题。

#### 1. 几何不变体系与几何可变体系

杆件体系按几何组成方式划分,可分为几何可变体系和几何不变体系两大类。

图 1.1(a)所示的铰接四边形  $ABCD$  是一个四链杆机构,其几何形状和位置是不稳固的,随时可以改变状态,这样的体系称为几何可变体系。

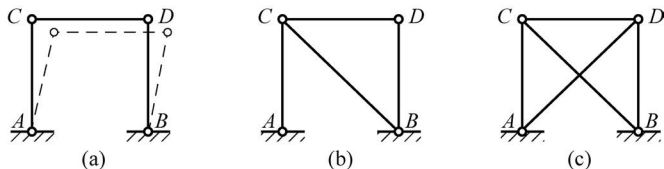


图 1.1

图 1.1(b)所示体系与图 1.1(a)相比多了一根斜撑杆件  $CB$ ,成为由两个铰接三角形



动画 1

<sup>①</sup> 此处的体系指的是由若干建筑构件组成的整体。

ABC 与 BCD 组成的体系。显然,它在任意荷载作用下,在不考虑杆件发生变形的条件下,其几何形状和位置能稳固地保持不变,这样的体系称为几何不变体系。如果在图 1.1(b)所示体系上再增加斜杆 AD,便成为图 1.1(c),它是具有一个多余杆件的几何不变体系。显然,多余约束是相对于形成几何不变体系的最少约束数而言的。严格地说,图 1.1(b)所示体系应称为无多余约束的几何不变体系,即图中 4 根链杆中的每一根都是构成几何不变体系所必不可少的,它们被称为必要约束。至于图 1.1(c)所示体系中究竟哪一根链杆属于多余约束,有多种观察方式。实际上,图中 5 根链杆中的任一根都可以视作多余约束,而并非一定是斜杆 AD。因此,我们在开始研究体系几何分析问题时,还应该明确:在具有多余约束的几何不变体系中将多余约束拆除,原体系即变成无多余约束的几何不变体系。

## 2. 几何组成分析

由生活实践可知,建筑结构必须是几何形状与位置都稳固的几何不变体系,而不能采用几何可变体系。因此,在设计结构或选择计算简图时,首先要判定体系是几何不变体系还是几何可变体系,只有几何不变体系才能用于结构。在工程中,将判定体系为几何不变体系或是几何可变体系的过程称为体系的几何组成分析或几何构造分析。

## 3. 瞬变体系与常变体系

在图 1.2(a)所示的体系中,杆件 AB、AC 共线,A 点既可绕 B 点沿 1—1 弧线运动,同时又可绕 C 点沿 2—2 弧线运动。由于这两个弧相切,A 点必然可沿着公共切线方向作微小运动。从这个角度看,它是一个几何可变体系。当 A 点作微小运动至 A' 点时,圆弧线 1—1 与圆弧线 2—2 由相切变成相离,A 点既不能沿圆弧线 1—1 运动,也不能沿圆弧线 2—2 运动,这样,A 点就被完全固定。这种原先是几何可变,在瞬时可发生微小几何变形,其后再不能继续发生几何变形的体系称为瞬变体系。瞬变体系是几何可变体系的特殊情况,它属于几何可变体系的范畴。为明确起见,几何可变体系又可进一步分为瞬变体系和常变体系。常变体系是指可以发生较大几何变形的可变体系,如图 1.1(a)所示。

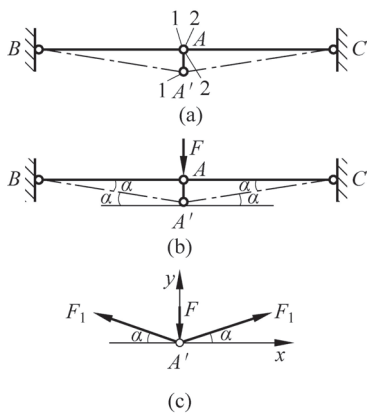


图 1.2

在此值得提出的是,瞬变体系虽然发生微小几何变形后变成几何不变体系,但仍不能作为结构。如图 1.2(b)所示为瞬变体系发生微小几何变形后变为几何不变体系的情况。取 A' 点为研究对象,其受力图如图 1.2(c)所示。

由平衡条件可知, $F_1 = \frac{F}{2\sin\alpha}$ ,当  $\alpha \rightarrow 0$  时, $\sin\alpha \rightarrow 0$ , $F_1 \rightarrow \infty$ ,即瞬变体系在外载很小的情况下可以产生很大内力。因此,在结构设计中,即使接近瞬变体系的计算简图,也应设法避免。

## 4. 刚片与刚片系

在体系的几何组成分析中,由于不考虑杆件本身的变形,因此可以把一根杆件或已知几何不变部分看作一个刚体,在平面体系中又将刚体称为刚片。由刚片组成的体系称为刚片系。

也就是说,刚片可大可小,它可大至地球、一幢高楼,也可小至一根梁、一根链杆。由此可知,平面体系的几何组成分析实际上就变成考察体系中各刚片间的连接方式了。因此,能否准确、灵活地划分刚片,是能否顺利进行几何组成分析的关键。

### 5. 实铰与虚铰

由两根杆件端部相交所形成的铰称为**实铰**，如图 1.3(a)所示。由两根杆件中间相交或延长线相交形成的铰称为**虚铰**，如图 1.3(b)、(c)所示。之所以称这样的铰为虚铰，是由于在这个交点  $O$  处并不是真正的铰。图 1.3(b)和图 1.3(c)所示虚铰的位置在两根链杆的交点上。实铰与虚铰的约束作用是一样的。

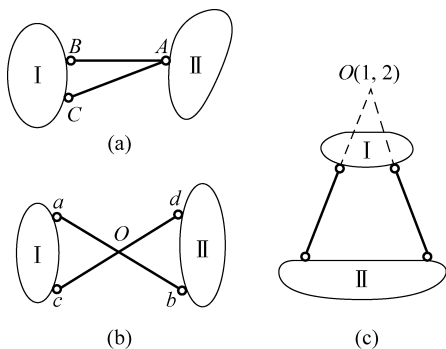


图 1.3

### 1.1.2 几何组成分析的目的

上册第 2 章研究了结构计算简图的画法，其简化原则主要有两点：

- (1) 基本正确地反映结构的实际受力情况，使计算结果确保结构设计的精确度。
- (2) 分清层次，略去次要因素，便于分析和计算。

为了确保结构实用、安全，结构计算简图还必须是几何不变的，故对体系进行几何组成分析的目的如下：

- (1) 判断所用杆件体系是否为几何不变体系，以决定其是否可以作为结构使用；
- (2) 研究结构体系的几何组成规律，以便合理布置构件，保证所设计的结构安全、实用、经济；
- (3) 根据体系的几何组成，确定结构是静定结构还是超静定结构，以便选择合理的计算方法和计算程序。

## 1.2 平面体系的计算自由度

### 1.2.1 自由度与约束

#### 1. 自由度

为了分析体系是否几何不变，可先计算其自由度。所谓体系的自由度，是指该体系运动时，用以完全确定其位置所需的独立几何参数的数目。例如，一个点  $A$  在平面内运动时，可以完全确定其位置的独立参数是该点的两个独立的坐标变量  $x$  和  $y$  (图 1.4(a))，所以一个点在平面内有 2 个自由度。一个刚片在平面内运动则有 3 个自由度，这是因为刚片的位置可以由刚片上任意一点  $A$  的  $x$  和  $y$  坐标，以及刚片上任一直线  $AB$  的倾角  $\varphi$  (图 1.4(b)) 来确定。

#### 2. 约束

体系的自由度将因加入限制运动的约束装置而减少。凡能减少自由度的装置称为**约束**。体系常用的约束有链杆和铰。在体系几何组成分析中，链杆本身可以视为一个刚片且只在两个端铰处与其他物体相连。图 1.5(a)所示为用一根链杆  $AC$  将一个刚片与地基相连，因  $A$  点不能沿链杆方向移动，故刚片在平面内只有两种运动方式，即  $A$  点绕  $C$  点转动和刚片绕  $A$  点转动。刚片的位置只需两个参数(图中的倾角  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ )即可确定。当没有链杆  $AC$  时，刚片在平面内有 3 个自由度。



微课 1

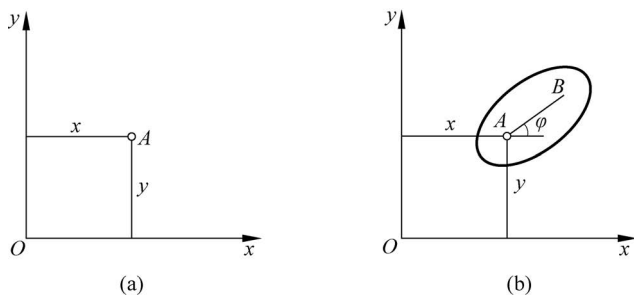


图 1.4



微课 2

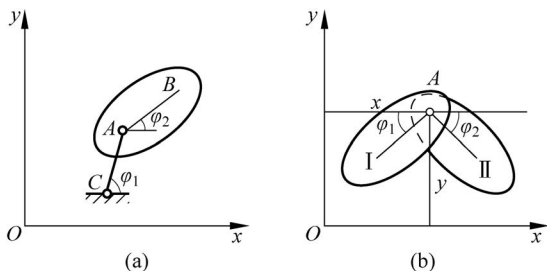


图 1.5

加上链杆  $AC$  后,自由度数由 3 减为 2,因此一根链杆装置相当于一个约束。图 1.5(b) 所示为用一个铰  $A$  将刚片 I 和刚片 II 连接起来,如前所述,刚片 I 的位置由点  $A$  的坐标  $x$  和  $y$  及倾角  $\varphi_1$  共 3 个参数确定;刚片 II 相对于刚片 I 而言,其位置需通过倾角  $\varphi_2$  确定。这样,两个刚片之间无铰连接时,在平面内自由度为 6,用一个铰相连后自由度即减为 4。因此,一个连接两个刚片的铰(称为单铰)相当于两个约束。

## 1.2.2 刚架与桁架的计算自由度

平面体系的计算自由度等于各杆件自由度总和减去约束总和。求解体系的计算自由度,首先设想一个体系中不存在任何约束,在此情况下计算各杆自由度总和;其次计算体系的全部约束个数,其中包括必要约束和多余约束;然后用前者减去后者,即得到体系的计算自由度数。为了便于理解,现以刚架、桁架为例,分别建立刚架、桁架计算自由度的计算公式,其中刚架的计算自由度的计算公式即为一般平面结构计算自由度的计算公式。

### 1. 刚架

通常认为,刚架是由若干刚片彼此用刚结点相连,并用支座链杆与基础相连而组成的结构。设其刚片数为  $m$ ,单铰数为  $h$ ,支座链杆数为  $r$ ,当各刚片都自由时,它们所具有的自由度总数为  $3m$ ;而现在加入的联系总数为  $(2h+r)$ ,因每个联系只能使体系减少一个自由度,则刚架的自由度为

$$W = 3m - (2h + r) \quad (1-1)$$

实际上每个联系不一定都能使体系减少一个自由度,这与联系的具体布置情况有关。在如图 1.6 所示的体系中,每个联系就没有使体系减少一个自由度,因此,  $W$  不一定能反映

体系的真实自由度。虽然如此,在分析体系是否几何不变时,还是可以根据  $W$  先判断联系数目是否足够。为此,把  $W$  称为体系的计算自由度。

在计算体系的计算自由度时,经常遇到将复铰换算为单铰的情况。所谓复铰是指连接两根及以上杆件的铰;所谓单铰是指连接两根杆件的铰。设  $n$  为复铰连接的杆件数,则将复铰换算成单铰数的公式为

$$m = n - 1 \quad (1-2)$$

式中,  $m$  为单铰数。

例 1.1 试计算图 1.7 所示体系的计算自由度。

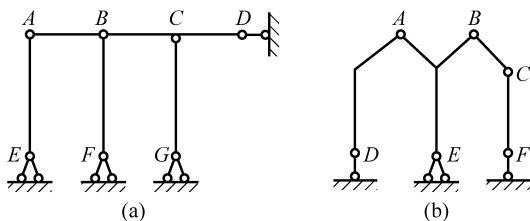


图 1.7

解 解题思路: 数刚片数与支链杆数, 计算单铰数, 代入式(1-1)。

解题过程: 图 1.7(a) 所示体系刚片数为 5, 结点 A 为单铰, 结点 B 为复铰, 换算成单铰数为  $3 - 1 = 2$ , 结点 C 为组合结点(即一杆端部与另一杆中间相交, 相当于一个单铰), 即共有单铰数为 4, 支承链杆数为 7, 由式(1-1)可得计算自由度为

$$W = 3m - (2h + r) = 3 \times 5 - (2 \times 4 + 7) = 0$$

图 1.7(b) 所示刚片数为 4, 单铰数为 3, 支承链杆数为 4, 由式(1-1)可得计算自由度数为

$$W = 3 \times 4 - (2 \times 3 + 4) = 2$$

## 2. 桁架

平面桁架中, 每个杆件的两端均有一铰(不分单铰或复铰)与其相邻的杆件相连接。设桁架铰结点数为  $j$  (包括支座结点), 杆件数为  $b$ , 链杆数为  $r$ 。如各铰结点间无杆件连接, 则  $j$  个铰结点应有  $2j$  个自由度, 结点之间每根链杆和每根支链杆各相当于一个约束, 故约束总数为  $b + r$ , 因此平面桁架的计算自由度的公式为

$$W = 2j - (b + r) \quad (1-3)$$

其实, 平面桁架的计算自由度既可按式(1-1)计算, 也可按式(1-3)计算, 一般按后者计算较方便。

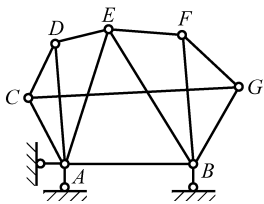


图 1.8

例 1.2 试计算图 1.8 所示体系的计算自由度数。

解 解题思路: 数结点、杆件及支链杆数, 代入式(1-3)。

解题过程: 此体系结点数  $j = 7$ , 杆件数  $b = 12$ , 支链杆数  $r = 3$ 。按式(1-3)可计算得

$$W = 2j - b - r = 2 \times 7 - 12 - 3 = -1$$

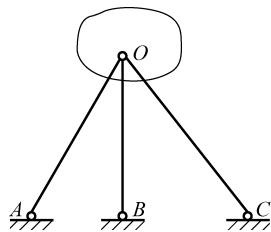


图 1.6



动画 2

若利用式(1-1),  $m=17, h=17, r=3$ , 可得计算自由度为

$$W = 3 \times 12 - 17 \times 2 - 3 = -1$$

显然式(1-1)计算复杂。

由上述两例计算可知, 按式(1-1)、式(1-3)计算体系的计算自由度, 所得结果可能有以下3种情况:

$W=0$ , 表明体系具有几何不变的必要条件;

$W>0$ , 表明体系缺少必要的约束, 因此是几何可变体系;

$W<0$ , 表明体系具有多余约束, 具有几何不变的必要条件。

由此可知, 一个几何不变体系必须满足计算自由度  $W \leq 0$  的必要条件。但只满足必要条件不足以说明此体系一定是几何不变的, 这是因为, 尽管约束的数目足够, 甚至还有多余约束, 但由于布置不当, 体系仍有可能是几何可变的。

在图 1.9 所示的两个体系中, 杆件、约束数均相同, 计算自由度  $W=6 \times 2 - 9 - 3 = 0$ , 显然图 1.9(a) 是几何不变体系, 而图 1.9(b) 是几何可变体系。由此可知, 欲判断体系的几何不变性, 一方面要判断是否符合  $W \leq 0$  的条件; 另一方面还需要判断杆件排列方式是否符合几何不变的组成规则。对于几何组成分析, 目前常采取的做法是: 对于杆件结构, 当杆件较少时一般不计算自由度, 直接进行几何组成分析。对于杆件较多的杆件结构, 当不便进行几何组成分析时, 先求计算自由度, 当符合  $W \leq 0$  条件时, 再进行几何组成分析; 若不满足条件  $W \leq 0$ , 就不必再进行几何组成分析了, 可直接判定为几何常变体系。

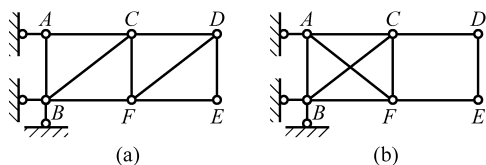


图 1.9

### 1.3 平面几何不变体系的组成规则

由实践经验可知, 如果将 3 根木片用 3 个铆钉铆住(图 1.10(a)), 其三角形是几何不变的, 且无多余联系, 其简化图如图 1.10(b) 所示。这是一个最简单、最基本, 且无多余联系的铰接三角形几何不变规则, 其他几何不变体系规则都可用它推演出来。若将杆件  $AB$  视作刚片, 则变成图 1.11(a) 所示的体系。用两根不共线的链杆构成一个铰结点的装置称为二元体。显然在平面内增加一个二元体即增加了两个自由度, 但增加两根不共线的链杆也增加了两个约束。

由此可见, 在一个已知体系上依次增加或撤去二元体, 不会改变原体系的自由度。于是得到如下规则。

(1) 规则 I (二元体规则): 在已知体系上增加或撤去二元体, 不影响原体系的几何不变性。换言之, 已知体系是几何不变的, 增加或撤去二元体, 体系仍然是几何不变的; 已知体系是几何可变的, 增加或撤去二元体, 体系仍然是几何可变的。

若将图 1.11(a) 中的  $AC$  杆视为刚片, 则变成如图 1.11(b) 所示的体系。它是用两个刚

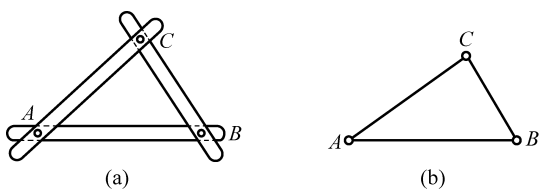


图 1.10

片将一个铰与一根不通过此铰的链杆相连接,显然它是几何不变的。由此得到下列规则。

(2) 规则 II (两刚片规则): 两刚片用一个铰和一根不通过此铰的链杆相连接,所构成的体系是几何不变的,且无多余联系。

因一个铰相当于两根链杆,图 1.11(b)又可变为图 1.11(c)所示体系,因此又得到两刚片规则的另一种形式: 两刚片用 3 根既不相互平行又不汇交于一点的链杆相连接,所构成的体系是几何不变的,且无多余联系。

若再将图 1.11(b)中的  $BC$  杆视为刚片,则变成如图 1.11(d)所示的体系。它是由 3 个刚片用 3 个不在同一直线上的铰相连接,显然它也是几何不变的。由此又得到如下规则。

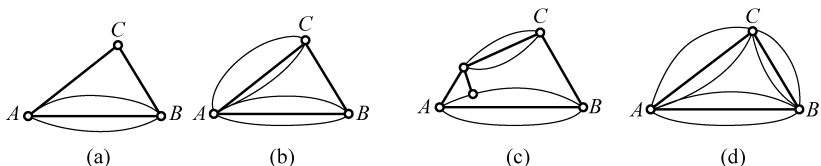


图 1.11

(3) 规则 III (三刚片规则): 三刚片用 3 个不在同一直线上的铰两两相连接,所构成的体系是几何不变的,且无多余联系。

以上 3 个几何不变体系的组成规则,既规定了刚片之间所必不可少地最小联系数目,又规定了它们之间应遵循的连接方式,因此它们是构成几何不变体系的必要与充分条件。

由推演过程知,这 3 个几何不变体系组成规则是互通的,对同一个体系可用不同的规则进行几何组成分析,其结果是相同的。因此,用它们进行几何组成分析时,可灵活选用以上三个规则。如对图 1.12(a)所示体系进行几何组成分析,该体系有 5 根支链杆与基础相连,故将基础作为刚片分析较容易。先考虑刚片  $AB$  与基础连接,显然它符合两刚片规则的另一种形式(图 1.12(b)),故它是几何不变的。现将它们合成一个大刚片 I(图 1.12(c)),然后将刚片  $BC$  视为刚片 II,刚片  $CDE$  视为刚片 III(图 1.12(d)),三刚片用 3 个不在同一直线上的铰相连接,符合三刚片规则,故知该体系是几何不变的。

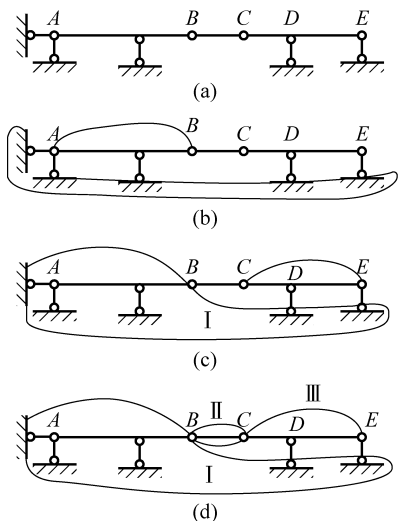


图 1.12

在讨论两刚片规则和三刚片规则时,都曾提出一些应避免的情况,如连接两刚片的3根链杆既不能同时相交一点也不能平行,连接三刚片的3个铰不能在同一直线上等。若出现了这些情形其结果又如何?

如图 1.13(a)所示,3根链杆同时交于 $O$ 点,这样 $A$ 、 $B$ 两刚片可以绕 $O$ 点作微小的相对转动,当转动一个小角度后,这3根链杆不再同时相交一点,则不再产生相对转动,故它是瞬变体系。

若3根链杆相互平行,但不等长(图 1.13(b)),则仍为瞬变体系。因为当3根不等长链杆相互平行时,可认为这3根链杆同时相交一点,其交点在无穷远处。若 $B$ 刚片相对 $A$ 刚片发生转动,3根平行链杆不再平行,也不相交一点,则此体系也为瞬变体系。

若3根链杆平行且等长(图 1.13(c)),则 $A$ 、 $B$ 两刚片产生相对运动后,此3根链杆仍相互平行,即在任意时刻、任何位置,这3根链杆都是平行的,所以在任意时刻都能产生相对运动,因此它为常变体系。

若两刚片用一铰与通过此铰的链杆相连接(图 1.13(d)),则 $A$ 点可作上下微小运动,当产生微小运动后,链杆 $CA$ 不再通过 $B$ 点,符合两刚片规则,仍是几何不变的,故知此体系为瞬变体系。

现在再研究连接三刚片的3个铰在同一直线上的情形。如图 1.13(e)所示,三刚片 $I$ 、 $II$ 、 $III$ ,用同一直线上的 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 三铰相连接,则铰 $A$ 将在以 $B$ 点为圆心、以 $BA$ 为半径及以 $C$ 点为圆心、以 $CA$ 为半径的两圆弧的公切线上,而 $A$ 点即为公切点,所以 $A$ 点可在此公切线上作微小的上下运动。当产生一微小的运动后, $A$ 、 $B$ 、 $C$ 3点不在同一直线上,故不会再发生运动,所以它是一个瞬变体系。

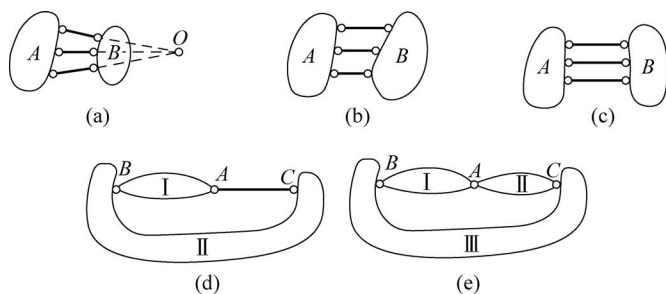


图 1.13

由上述推演过程又一次得知,几何瞬变体系与几何常变体系都不能作为结构计算简图,只有几何不变体系才能作为结构计算简图,所以在定义什么是几何不变体系的规则时,指出这些特例是十分必要的。

## 1.4 平面体系的几何组成分析示例

进行几何组成分析的依据是平面几何不变体系的3个基本规则。这3个规则看似简单,但利用它们却能灵活地解决常见体系的几何组成分析问题。要顺利地用这3个规则去分析形式多样的平面杆系,关键在于选择哪些部分作为刚片、哪些部分作为约束,这就是几